# 7600008 - Física IV Lista P1

Gabarito

19 de Agosto de 2019

Considere o campo elétrico discutido em classe, da forma

$$\vec{E} = E_0 \hat{\epsilon} cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

onde a constante $E_0$, o versor $\hat{\epsilon}$, o vetor $\vec{k}$ e a frequência (angular) $\omega$ são conhecidos.

**Questão 1.**

---

Mostre que $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E}$. Sugestão: basta calcular a componente $\hat{x}$ de $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ e fazer a rotação $x \to y \to z \to x$ duas vezes para encontrar as componentes y e z.

**Solução:**

Este exercício foi corrigido e bastava mostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ tinha a mesma direção de $\vec{k} \times \vec{E}$.

assim usamos que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$$

temos a condição $\hat{e} \cdot \vec{k} = 0 \to k_x sin\theta cos\phi + k_y sin\theta sin\phi + k_z cos\theta = 0$

(As soluções particulares que o livro comenta na seção 12.4 envolve uma escolha de ângulos tais que $\hat{\epsilon} = \hat{x}$ com $\hat{u} = \hat{z}$)

Portanto aplicando o rotacional ao campo elétrico

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -[k_y E_0 cos\theta sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - k_z E_0 sin\theta sin\phi sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\hat{x}$$

$$-[k_z E_0 sin\theta cos\phi sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - k_x cos\theta sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\hat{y}$$

$$-[k_x E_0 sin\theta sin\phi sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) - k_y E_0 sin\theta cos\phi sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]\hat{z}$$

só que existe podemos aplicar a identidade trigonométrica onde

$$-sin\Phi = sin(-\Phi) = cos(\Phi + \pi/2)$$

e quando comparamos com

$$\vec{k} \times \vec{E} = (k_y E_z - k_z E_y)\vec{x} + (k_z E_x - k_x E_z)\vec{y} + (k_x E_y - k_y E_x)\vec{z}$$

E por consequência $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ tem a mesma direção de $\vec{k} \times \vec{E}$.

**Questão 2.**

A partir do resultado do item anterior, use a equação de Faraday para determinar o campo magnético. Que direção tem o campo $\vec{B}$?

**Solução:**

pela lei de Faraday temos $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

e do exercício anterior sabemos que a derivada parcial do campo magnético com relação ao tempo terá a mesma direção do rotacional do campo elétrico.

portanto quando tempo um campo da forma $\vec{B} = \vec{B_0} cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

onde sua derivada é

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B_0} \omega sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

consequentemente a direção é

$$\vec{B_0} = \frac{E_0}{c}(\hat{u} \times \epsilon)$$

onde $\hat{u} \times \epsilon$ é o termo do rotacional no item anterior.

**Questão 3.**

Encontre o valor médio da densidade de energia elétrica $U_E = \epsilon_0 E^2/2$ num ponto fixo $\vec{r}$. Para calcular uma média, integre $U_E$ de $t = 0$ a $t = T$ , onde $T = 2\pi/\omega$ é o período, e divida o resultado por T.

**Solução:**

Sabemos que $U_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ onde $\vec{E} = E_0 \hat{\epsilon} cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

então fazendo a média

$$\bar{U}_E = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{2T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt$$

podemos usar a identidade trigonométrica onde

$$cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(2\theta)$$

e então

$$\bar{U}_E = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{2T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(2\theta) \right] \frac{d\theta}{\omega}$$

pela integral de cosseno ser simétrica temos

$$\bar{U}_E = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{4}$$

## Questão 4.

Encontre o valor médio da densidade de energia magnética $U_M = (1/2\mu_0)B^2$ contidas no campo B calculado acima. Compare com a densidade de energia elétrica média.

**Solução:**

Sabemos que $U_M = \frac{1B^2}{2\mu_0}$ onde $\vec{B} = \frac{E_0}{c}(\hat{u} \times \hat{\epsilon})cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$
então fazendo a média

$$\bar{U}_M = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{2T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) dt$$

podemos usar a identidade trigonométrica onde

$$cos^2(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(2\theta)$$

e então

$$\bar{U}_M = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{2T} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos(2\theta) \right] \frac{d\theta}{\omega}$$

pela integral de cosseno ser simétrica temos de maneira idêntica

$$\bar{U}_M = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{4}$$

## Questão 5.

Em classe, encontramos o resultado

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

onde

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

A densidade de corrente energética $\vec{S}$ é conhecida como vetor de Poynting. Encontre o vetor de Poynting para os cammpos elétrico e magnético das questões anteriores. Em que direção aponta ele?

**Solução:**

Substituindo os campos que encontramos nos exercícios ateriores temos

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} {E_0}^2 cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)[\hat{\epsilon} \times (\hat{u} \times \hat{\epsilon})]$$

E com a identidade vetorial dos produtos triplos

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

portanto, pelas condições impostas pelas equações de Maxwell

$$\hat{\epsilon} \times (\hat{u} \times \hat{\epsilon}) = \hat{u}(\hat{\epsilon} \cdot \hat{\epsilon}) - \hat{\epsilon}(\hat{\epsilon} \cdot \hat{u})$$

portanto o vetor de pointing toma o sentido de propagação da onda

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} {E_0}^2 cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\hat{u}$$

## Questão 6.

Expresse o vetor de Poynting da questão anterior em termos da densidade de energia.

**Solução:**

A densidade de energia eletromagnética no vácuo é dada por

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Assim, com os campos fornecidos nos exercícios anteriores

$$U = \epsilon_0 {E_0}^2 cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

com o vetor de pointing

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} {E_0}^2 cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\hat{u}$$

finalmente encontramos

$$\vec{S} = CU\hat{u}$$

## Questão 7.

O módulo do vetor de Poynting dá a energia por unidade de tempo que atravessa uma área unitária perpendicular à direção de propagação da onda eletromagnética. A intensidade da radiação solar que atinge o topo da atmosfera é igual a $1.4kW/m^2$ . Calcule o campo elétrico naquela região.

**Solução:**

Dos exercícios anteriores nossa densidade de energia média é

$$\bar{U}_T = \frac{\epsilon_0 {E_0}^2}{2}$$

e pelo enunciado conseguimos compreender que

$$IA = c\bar{U}_t$$

onde A é a área de meia esfera.

isolando o campo elétrico proveniente da densidade de energia média temos

$$E_0 = \sqrt{\frac{4\pi I}{c\epsilon_0}}(R_t + R_e xo)$$

onde $R_t$ e $R_e xo$ é respectivamente o raio da terra e da exosfera.

## Questão 8.

A partir do resultado do problema anterior, indique, sem efetuar a conta, como você calcularia o campo elétrico na superfície do Sol. Suponha conhecidas a distânncia d do Sol à Terra e o raio R do Sol.

**Solução:**

Como podemos calcular um fluxo tal que

$$\phi = \int \vec{S} \cdot \hat{n} dA$$

criamos uma dependência direta com a área da superfície onde

$$\phi = |\vec{S}| \int dA = |\vec{S}| 4\phi r^2$$

Por conservação

$$|\vec{S_1}| = |\vec{S_2}| \left(\frac{d}{R}\right)$$

onde as intensidades $S_1$ e $S_2$ são respectivamente na superfície do Sol e da Terra.

## Questão 9.

Problema 12.1 do livro-texto: Um capacitor de placas paralelas é formado por dois discos circulares de raio a separados por uma distância $d << a$, no vácuo. As placas estão ligadas a um gerador AC que produz uma carga no capacitor $Q = Q_0 sin(\omega t)$. Admita que o campo $\vec{E}$ entre as placas é uniforme, desprezando fuga das linhas de força, tome o eixo z ao longo do eixo do capacitor. Calcule o campo $\vec{B}$ entre as placas, a uma distância $\rho$ do eixo.

**Solução:**

Sabemos que o campo de um disco carregado é:

$$\vec{E}(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[\frac{z}{(a^2+z^2)^{1/2} - \frac{z}{|z|}}\right]\hat{z}$$

na condição de $d << a$ e superposto no interior do capacitor, ele pode ser simplificado como

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Mas $\sigma = \frac{Q_0 sin(\omega t)}{\pi a^2}$
e portanto

$$\vec{E} = \frac{Q_0 sin(\omega t)}{\epsilon_0 \pi a^2}\hat{z}$$

assim conseguimos o campo magnético aplicando

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

então

$$B2\pi\rho = \frac{\pi\rho^2\mu_0\omega Q_0 cos(\omega t)}{\epsilon_0\pi a^2}$$

finalmente

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega\rho Q_0 cos(\omega t)}{2\pi a^2}th\hat{e}ta$$

## Questão 10.

Problema 12.2a do livro-texto: Um fio condutor retílineo cilíndrico muito longo, de condutividade $\sigma$ e raio a, transporta uma corrente constante, de densidade $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ uniformemente distribuida sobre a seção transversal. Tome o eixo cilíndrico como o eixo z. Calcule $\vec{B}$ na superfície do fio.

**Solução:**

O exercício fornece a corrente de densidade $\vec{j} = \sigma\vec{E}$. Assim, para calcular o campo magnético na superfície do fio basta aplicar

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

$$2\pi a B = \mu_0 j \pi a^2 \rightarrow B = \frac{\mu_0 \sigma E a}{2}$$

onde que pela simetria do fio infinito, o sentido do campo magnético se torna $\hat{\theta}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma E a}{2}\hat{\theta}$$