__/__/__ S T Q Q S S D

Caso geral K

Incógnitas: $a_1, a_2, \ldots, a_K$

$$\begin{cases} u_1^{(1)} a_1 + u_1^{(2)} a_2 + \ldots + u_1^{(K)} a_K = w_1 \\ u_2^{(1)} a_1 + u_2^{(2)} a_2 + \ldots + u_2^{(K)} a_K = w_2 \\ \vdots \\ u_n^{(1)} a_1 + u_n^{(2)} a_2 + \ldots + u_n^{(K)} a_K = w_n \end{cases}$$

vetor $u^{(1)}$ $\quad u^{(2)} \quad u^{(K)} \quad w$

Sistema Normal

$$\begin{cases} \langle u^{(1)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(1)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \ldots + \langle u^{(1)}, u^{(K)} \rangle a_K = \langle u^{(1)}, w \rangle \\ \langle u^{(2)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(2)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \ldots + \langle u^{(2)}, u^{(K)} \rangle a_K = \langle u^{(2)}, w \rangle \\ \vdots \\ \langle u^{(K)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(K)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \ldots + \langle u^{(K)}, u^{(K)} \rangle a_K = \langle u^{(K)}, w \rangle \end{cases}$$

16/08

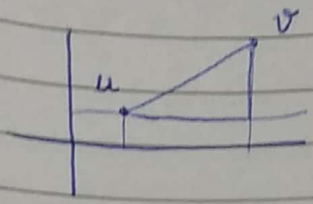
Distância, ortogonalidade e o produto interno (ou escalar)
- (re)visão a jato

$\mathbb{R}^N \rightarrow$ o mesmo N que é o no. de equações nos sistemas sobredeterminados

distância $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$
$v = (v_1, v_2, \ldots, v_N)$

$$dist(u, v) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_N - v_N)^2}$$

distância Euclidiana



Em geral: uma métrica (ou distância) $\underline{d}$ é uma função

$$d : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \longmapsto d(u, v)$$

domínio

contra domínio

(distância entre u e v)

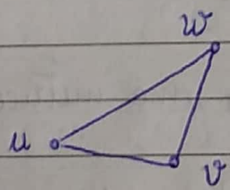
nome da função

como se dá a associação entre domínio e contradomínio

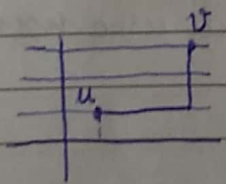
que tem as seguintes propriedades:

- $d(u,v) \geq 0, \ \forall u, v \in \mathbb{R}^N$
- $d(u,v) = 0 \iff u = v$
- $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

(desigualdade triangular)



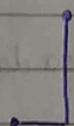
P. ex: distância euclidiana é métrica



- distância do taxista (Manhatan)

$$\sum_{i=1}^{N} |u_i - v_i|$$

- outra: $\max_{i=1,\dots,N} |u_i - v_i|$



Exercício: verifiquem

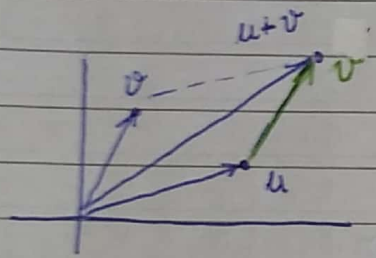
Norma (p/ espaços vetoriais)

Comprimento de um vetor

Norma é uma função $\|\cdot\|$

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longmapsto \|u\| \text{ (norma de } \underline{u}\text{)}$$

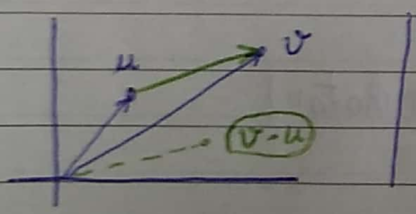
tal que
- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \iff u = 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdade triângular)



(mesmo caso que na métrica)

Uma norma induz uma métrica de forma natural

$$d(u,v) = \|v - u\|$$



Obs: Nem toda métrica vem de uma norma.

Ex: taxista

$\|u\| = \sum_i |u_i| \xrightarrow{\text{induz}}$ métrica do taxista

máximo

$\|u\| = \max_i |u_i| \overset{\text{induz}}{\rightsquigarrow}$ métrica do máximo

euclidiana

$\|u\| = \sqrt{\sum_i u_i^2} \overset{\text{induz}}{\rightsquigarrow}$ métrica euclidiana

S T Q Q S S D

__/__/__

Produto Interno (ou Escalar)

Um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$$

que satisfaz

1) $\circ$ $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ (comutativo ou simétrico)

2) $\circ$ $\langle u, u \rangle \geq 0$

3) $\circ$ $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$

4) $\circ$ $\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle u, w \rangle$

reais (linearidade)

[OBS: vale tb. na 1ª coordenada usando a simetria]

Um produto interno induz naturalmente uma norma:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Exemplo $p_i > 0$, $i = 1, \dots, N$

$$\boxed{\langle u, v \rangle \overset{\text{def}}{=} \sum_{i}^{N} p_i u_i v_i}$$

Exercício Fácil: Realmente é produto interno

A propriedade de desigualdade triangular da norma sai de uma propriedade do produto interno chamada de desigualdade de Cauchy-Schwarz que é:

$$\boxed{|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$$

"O tamanho de $\langle u, v \rangle$ não supera o produto das normas"

spiral

Por quê?

Truque: $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer

$$\mathbb{R} \ni \lambda \longmapsto \underbrace{\langle \lambda u - v, \lambda u - v \rangle}_{= f(\lambda)} \in \mathbb{R}$$

função real

$f(\lambda) \geq 0$ (pela propriedade 2)

Usando 4) e 1):

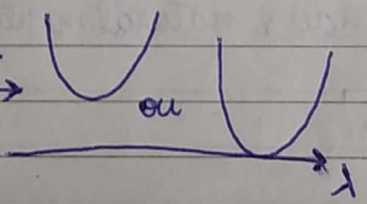
$$f(\lambda) = \lambda^2 \langle u,u \rangle - \lambda \langle v,u \rangle - \lambda \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

Pela 1)

$$f(\lambda) = \langle u,u \rangle \lambda^2 - 2\langle u,v \rangle \lambda + \langle v,v \rangle$$

função quadrática

$f(\lambda) \geq 0 \implies$



discriminante não é positivo

$\Downarrow$

$$0 \geq \Delta = 4\langle u,v \rangle^2 - 4\langle u,u \rangle \langle v,v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle u,v \rangle^2 - \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle \leq 0$$

$$\langle u,v \rangle^2 \leq \langle u,u \rangle \langle v,v \rangle$$

$$\langle u,v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\boxed{|\langle u,v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$$ QED

Desig. Triangular

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle =$$

$$= \langle u,u \rangle + \langle v,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle =$$

$$= \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$\leq \langle u,u \rangle + 2|\langle u,v \rangle| + \langle v,v \rangle$$

S T Q Q S S D

__/__/__

C. - S

$\leq \langle u,u\rangle + 2\|u\|\cdot\|v\| + \langle v,v\rangle$

$= \|u\|^2 + 2\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2$

$= (\|u\| + \|v\|)^2$

$\therefore \|u+v\|^2 \leq (\|u\|+\|v\|)^2$

$\Rightarrow \boxed{\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|}$ QED

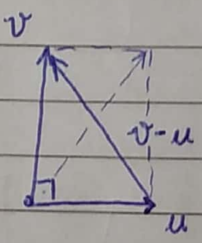
Ortogonalidade

DEF: u é ortogonal a v se $\langle u, v\rangle = 0$

Teorema de Pitágoras

Se $\langle u, v\rangle = 0$ então

$\|v-u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$



Por quê?

$\|v-u\|^2 = \langle v-u, v-u\rangle$

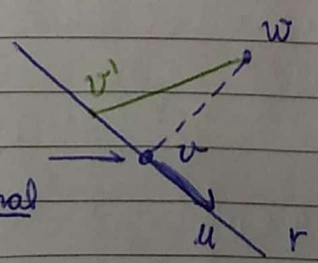
$= \langle v,v\rangle - 2\underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \langle u,u\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Também

Obs: $\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Intuição: por que o pt. mais próximo está na proj. ortogonal?

v: proj. ortogonal



Af: $v' \in$ reta

$\|w - v'\| \geq \|w - v\|$

$\langle w - v, u\rangle = 0$

mínima distância - proj. ortogonal