

Capítulo 2

Raízes de funções

2.1 O método da bisseção

O método de Bhaskara, visto no capítulo anterior serve para computarmos as raízes de um tipo específico de função: as quadráticas. Se tivermos outros tipos de funções (contínuas), precisamos de outros métodos para calcular as suas raízes. Neste capítulo veremos um método simples para isso.

Vamos tomar como exemplo a função $x^3 - x^2 - 13x + 8$. Queremos achar os valores de x para os quais o valor da função é zero. Olhando o gráfico dessa função, vemos que ela tem três raízes, conforme mostra a Figura 2.1. Para aplicarmos o método da bisseção, precisamos conhecer o intervalo em que essas raízes estão. Por exemplo, vemos que a raiz mais negativa está em algum ponto no intervalo $(-4, -3)$.

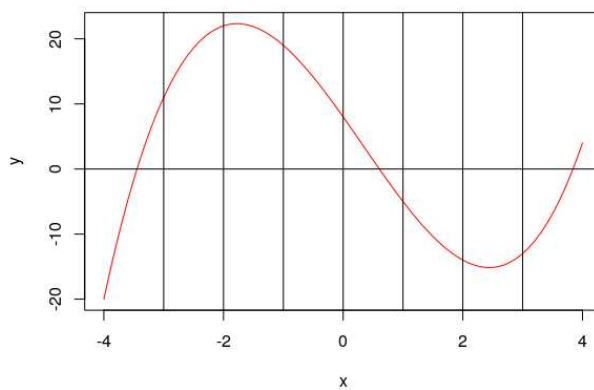


Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = x^3 - x^2 - 13x + 8$

Para tentar achar o ponto em que a curva cruza o eixo x , vamos chutar um valor entre os valores desse intervalo. Nada mais justo que escolher o ponto bem no meio dos dois. Ou seja, se consideramos o intervalo (a, b) , vamos calcular um valor médio $c = (a + b)/2$. No caso do nosso exemplo, seria $c = -3,5$. Então

computamos o valor de f nesse ponto. Obtemos $f(-3.5) = -1,625$. Se o valor computado for zero, então achamos o valor da raiz. Caso contrário, conseguimos diminuir o tamanho do intervalo no qual devemos procurar a raiz.

Note, na Figura 2.2 que o valor da função no ponto médio $-3,5$ está abaixo do eixo x , ou seja, é negativo. Então, não adianta tentar procurar a solução que queremos no intervalo (a, c) . Temos que procurar no outro subintervalo, ou seja, (c, b) . Em outras palavras, devemos escolher esse intervalo pois verificamos que $f(c) \times f(b) < 0$, ou seja, $f(c)$ e $f(b)$ têm sinais opostos.

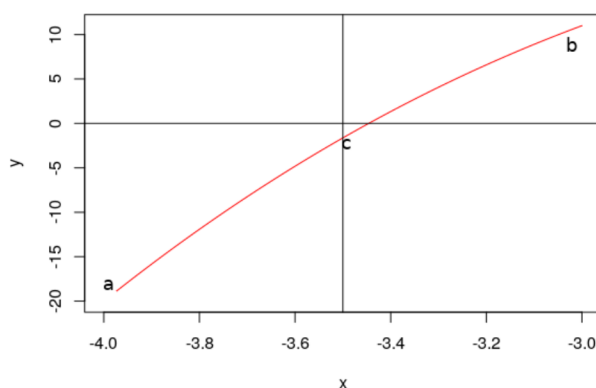


Figura 2.2: Dividindo o intervalo com o método da bisseção

Vamos repetir então as mesmas operações, mas agora considerando um intervalo menor. A cada iteração, o tamanho desse intervalo vai diminuindo e mesmo que nunca consigamos achar o valor exato da raiz, vamos cada vez nos aproximando mais dela. Ou, como costuma-se dizer, vamos convergindo para a solução.

Precisamos saber, também, qual é a tolerância, ou o erro que podemos admitir na nossa resposta. Por exemplo, se usarmos uma tolerância de 0,001, isso significa que estamos satisfeitos com uma resposta que esteja a essa distância da raiz. Ou, olhando para o nosso algoritmo, quando o tamanho do intervalo for menor do que esse valor, podemos parar de dividir e assumir que o valor médio, c , é a resposta que desejamos.

Uma descrição, passo a passo do método pode ser a seguinte:

1. iniciamos com o intervalo (a, b) ;
2. calculamos o ponto médio do intervalo, $c = (a + b)/2$;
3. se $f(c) = 0$ ou se o $b - a < \text{tolerância}$, então, c é a resposta;
4. se $f(c) * f(a) < 0$ reduzimos o intervalo de busca para (a, c) ;
5. caso contrário o próximo intervalo de busca será (c, b) ;
6. repetimos o processo considerando esse novo intervalo.

A Tabela 2.1 mostra a sequência de valores que são utilizados em cada iteração do método, para a computar a primeira raiz do nosso exemplo. É bom notar que utilizamos uma tolerância bastante alta para podermos mostrar todos os valores calculados pois o método da bisseção converge de forma relativamente lenta. Se utilizássemos, por exemplo, 0.00001 como tolerância, precisaríamos de 17 iterações para achar o valor desejado.

Tabela 2.1: Sequência de valores no método da bisseção para $f(x) = x^3 - x^2 - 13x + 8$

Iteração	a	b	c	Erro
1	-4	-3	-3.5	0.5
2	-3.5	-3	-3.25	0.25
3	-3.5	-3.25	-3.375	0.125
4	-3.5	-3.375	-3.4375	0.0625
5	-3.5	-3.4375	-3.46875	0.03125
6	-3.46875	-3.4375	-3.453125	0.015625
7	-3.453125	-3.4375	-3.4453125	0.0078125
8	-3.453125	-3.4453125	-3.44921875	0.00390625
9	-3.44921875	-3.4453125	-3.447265625	0.001953125
10	-3.447265625	-3.4453125	-3.4462890625	0.0009765625

2.2 O método de Newton-Raphson

Este é um outro método iterativo para computarem-se raízes de funções. Assim como no método da bisseção, precisamos ter uma ideia de onde se encontra a raiz que desejamos computar. Mas nesse caso não precisamos definir um intervalo, e sim um “chute” inicial. Precisamos também conhecer a primeira derivada da função que desejamos computar e, ainda, um valor de tolerância que representa o erro máximo que aceitamos na nossa resposta.

A partir do nosso chute inicial, x_0 , computamos a próxima aproximação da raiz fazendo:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

E assim, continuamos até que a diferença entre x_{i-1} e x_i seja menor que a nossa tolerância.

Olhando na Figura 2.3, podemos entender o que o método faz. Usando o nossa função como exemplo, e iniciando com um chute inicial de -3 , achamos a reta tangente que passa por $f(-3)$ e cuja inclinação é dada por $f'(-3)$. Traçando essa reta, vamos encontrar o ponto onde ela cruza o eixo x , que é $-3,55$. Veja que esse ponto está mais próximo da raiz, e é justamente o próximo valor que usaremos como chute. Repetimos o processo nesse ponto, até chegarmos a uma aproximação aceitável.

Os primeiros passos, para o nosso exemplo, seriam os seguintes, considerando a primeira derivada da função $f'(x) = 3x^2 - 2x - 13$:

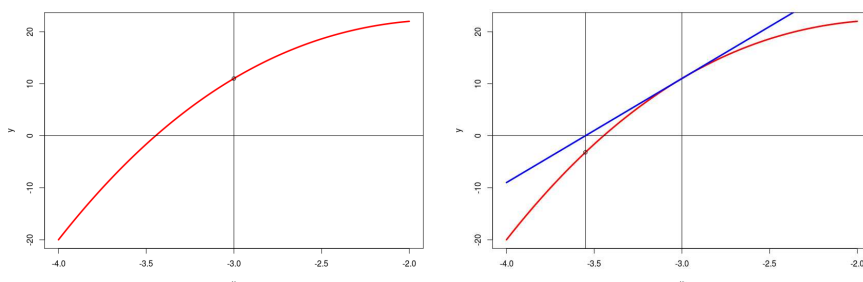


Figura 2.3: O método de Newton-Raphson para $f(x) = x^3 - x^2 - 13x + 8$

- 1) Chute inicial $x_0 = -3$
- 2) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -3 - \frac{11}{20} = -3.55$
- 3) $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -3.55 - \frac{-3,191374999999936}{31,9075} = -3,44998041212881$

Para acharmos a raiz mostrada na Figura 2.3, teríamos a sequência de pontos apresentada na Tabela 2.2. Note que, em relação ao método da bisseção, precisamos bem menos iterações para chegar na aproximação desejada. Na verdade, com essas 4 iterações chegamos a um erro inferior a 10^{-5} . Se utilizarmos uma aproximação de 10^{-9} , apenas uma iteração a mais é necessária. Realmente, uma das características deste método é que ele converge para a solução mais rapidamente.

Tabela 2.2: Sequência de valores no método de Newton-Raphson para $f(x) = x^3 - x^2 - 13x + 8$

Iteração	x_i	x_{i+1}	Erro
1	-3	-3,55	0,55
2	-3,55	-3,44998041212881	0,10001958787119
3	-3,44998041212881	-3,4460777931392697	0,003902618989540
4	-3,4460777931392697	-3,446071939012778	5,854126E-06

Por outro lado, dependendo da função que usamos e do chute inicial que damos, é possível que o método não convirja para a resposta correta. Por isso, é bom incluir na execução do algoritmo, um limite para o número de iterações. Se após esse determinado número de iterações não obtivermos o resultado desejado, o método falhou. Na Figura 2.4 mostramos o exemplo da função $f(x) = xe^{-x^2}$, para o qual escolhemos o valor inicial $x_0 = 1$. Como vemos com as duas primeiras iterações, os valores escolhidos vão se afastando da solução desejada ao invés de se aproximar. Para esse caso, se escolhermos um valor no intervalo aberto $(-0,5, 0,5)$, obteremos a resposta correta.

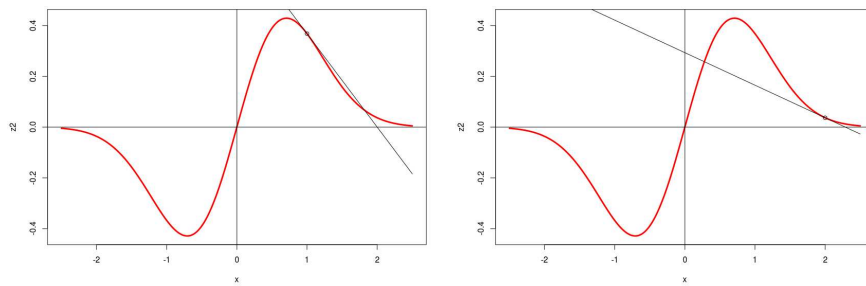


Figura 2.4: O método de Newton-Raphson para $f(x) = xe^{-x^2}$