Nesta aula estudaremos métodos para resolver problemas de otimização envolvendo campos escalares bidimensionais, ou seja,

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$$

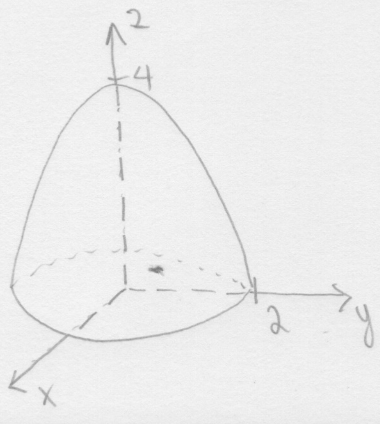
Tais problemas surgem em inúmeros contextos da física, da química e das diversas engenharias e, em geral, envolvem a determinação de um valor máximo ou mínimo para um campo escalar bidimensional que modela alguma grandeza de interesse.

Definição 11.1: "Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dizemos que o ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$ é um máximo absoluto ou global se $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in D$. Similarmente, dizemos que $\mathbf{x}_0 \in D$ é um mínimo absoluto ou global se $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$, $\forall \mathbf{x} \in D$. Um ponto de máximo ou mínimo global é dito um extremo global."

Exemplo 11.2: " Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

Determine os pontos de máximo e mínimo globais.

Solução: $z = f(x,y)$ representa o seguinte parabolóide elíptico:



que possui um máximo global em $\mathbf{x} = (0,0)$, pois

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) = 4 - x^2 - y^2 - 4 = -\|\mathbf{x}\|^2 \leq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}^2$. Por outro lado f não possui mínimo global pois

$$f(x) = 4 - \|x\|^2 < -\|x\|^2 \xrightarrow{\|x\| \to \infty} -\infty \text{ ''}$$

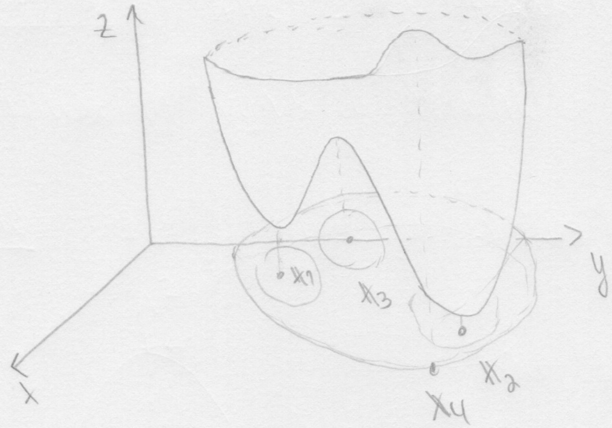
<u>Definição 11.3</u>: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dizemos que:

(a) $x_0 \in D$ é um máximo relativo ou local se existir uma bola aberta $B(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in B(x_0, r)$

(b) $x_0 \in D$ é um mínimo relativo ou local se existir uma bola aberta $B(x_0, r)$, $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in B(x_0, r)$.

Um ponto de máximo ou mínimo local é dito um extremo local."

<u>Exemplo 11.4</u>: " O campo escalar $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cujo gráfico está esboçado abaixo, possui mínimos locais nos pontos x_1 e x_2 e



um máximo local em x_3. Note também que x_2 é um mínimo global e x_4 é um máximo global. É importante ressaltar que x_4 não é um máximo local, pois pertence a borda de D, i.e., $x_4 \in \partial D$ de forma que não existe nenhuma bola aberta centrada em x_4 inteiramente contida em D."

Claramente, determinar os máximos e mínimos locais e globais por inspeção como fizemos nos exemplos anteriores é uma tarefa possivelmente complicada e deveras trabalhosa. Podemos, contudo, assim como no cálculo de funções de uma variável desenvolver métodos mais práticos para a determinação de tais pontos extremos.

<u>Definição 11.5</u>: " Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em um ponto interior $x_0 \in D$, dizemos que x_0 é um ponto crítico ou estacionário de f se $\nabla f(x_0) = 0$."

<u>Exemplo 11.6</u>: " Verifique se a origem é um ponto crítico das funções:

(a) $f(x) = \|x\|^2$, (b) $g(x) = \|x\|$

<u>Solução</u>: (a) Como vimos anteriormente $f(x) = \|x\|^2$ é uma função diferenciável, cujo gradiente é

$$\nabla f = \partial_x (x^2 + y^2) e_1 + \partial_y (x^2+y^2) e_2 = 2(x,y)$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = 2(0,0) = 0$$

Logo, a origem é um ponto crítico de f.

(b) Já a função $g(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ não é diferenciável na origem, pois suas derivadas parciais

$$\partial_x g = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad , \quad \partial_y g = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

não são contínuas em $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Portanto, a origem não é um ponto crítico de g."

Geometricamente, podemos visualizar os pontos críticos de um campo escalar bidimensional $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como os pontos nos quais o gráfico de f, i.e.

$$\text{graf}(f) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} = (x, y, f(x,y)) \,,\ \forall (x,y) \in D \}$$

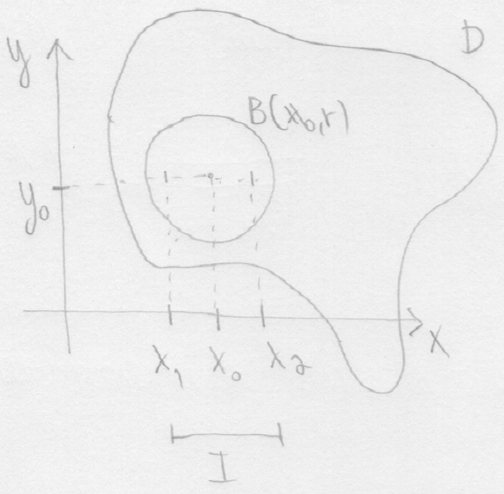
possui um plano tangente horizontal, ou seja, paralelo ao plano $\hat{O}xy$.

O teorema que enunciamos a seguir estabelece uma condição necessária para que um ponto interior seja um extremo local de um campo escalar bidimensional.

Teorema 11.7: " Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável, se $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ for um extremo local então $\mathbf{x}_0$ é um ponto crítico de f."

Demonstração: Suponhamos sem perda de generalidade (por que?) que $\mathbf{x}_0$ é um máximo local de f. Como $\mathbf{x}_0$ é um ponto interior de D, existe um $r \in \mathbb{R}_+$ tal que a bola aberta $B(\mathbf{x}_0, r) \subset D$

na qual $f(x) \leq f(x_0)$.



Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_0 < x_2$ e $(x_1, y_0), (x_2, y_0) \in B(x_0, r)$ e defina uma função

$$g : (x_1, x_2) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \longmapsto g(x) = f(x, y_0)$$

Como f é diferenciável em D, temos que existe

$$g'(x) = \partial_x f(x, y_0) \quad , \quad \forall x \in (x_1, x_2)$$

i.e., g é diferenciável no aberto (x_1, x_2) e em particular no ponto x_0.

Naturalmente, x_0 é um ponto interno (x_1, x_2) e um máximo local de g.

Então $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \partial_x f(x_0, y_0) = 0$.

Um argumento similar permite demonstrar que $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$ (Exercício!).

Portanto, temos que

$$\nabla f(x_0) = (\partial_x f(x_0), \partial_y f(x_0)) = 0$$

de forma que x_0 é um ponto crítico de f. ■

Exemplo 11.8: "Determine os pontos críticos de $f(x,y) = x^3+y^3-3x-3y+4$.

Solução: Claramente f é diferenciável, logo precisamos apenas resolver o sistema $\nabla f(x) = 0$ para identificar os pontos críticos:

$$\begin{cases} \partial_x f = 3x^2-3 = 0 \\ \partial_y f = 3y^2-3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Logo, há quatro pontos críticos de f:

$$(1,1),\ (1,-1),\ (-1,1),\ (-1,-1).\text{"}$$

É importante ressaltar que o teorema 11.7 só se aplica a pontos no interior do domínio de f, de forma que um ponto na fronteira do domínio de f pode ser um extremo ~~local~~ sem que seu gradiente se anule. Por exemplo, seja

$$f : D = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \} \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2y + 3x$$

Claramente, a origem é um mínimo de f em D, pois

$$f(x,y) \geq f(0,0) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in A$$

contudo,

$$\nabla f = (2x+3, x^2)\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = (3,0) \neq \mathbf{0}.$$

Note, entretanto, que pelo fato de $\mathbf{0} \in \partial A$ não há nenhuma contradição com o teorema 11.7.

O exemplo que acabamos de considerar ilustra que ao procurarmos por extremantes além dos pontos críticos devemos considerar os pontos da fronteira do domínio do campo escalar em questão.

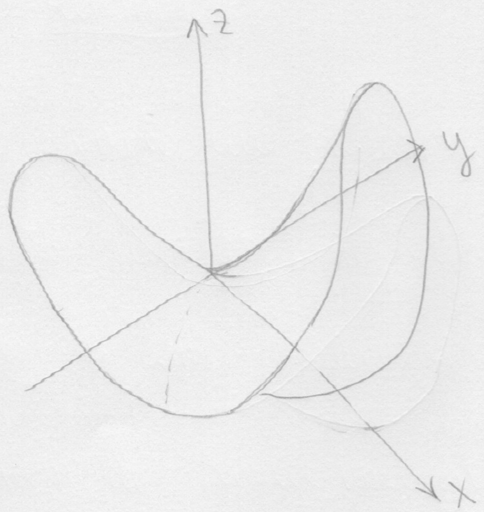
Além de fornecer uma condição necessária para que um ponto interior do domínio de um campo escalar seja um extremo, o teorema 11.7 também sugere que existem pontos críticos que não são extremos.

Definição 11.9: "Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável, um ponto crítico $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ é dito um ponto de sela se qualquer bola aberta $B(\mathbf{x}_0, r)$ contiver pontos $\mathbf{x}_+$ tais que $f(\mathbf{x}_+) > f(\mathbf{x}_0)$ e pontos $\mathbf{x}_-$ tais que $f(\mathbf{x}_-) < f(\mathbf{x}_0)$."

Exemplo 11.10: "Estude os pontos críticos do campo escalar $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = xy$.

Solução: Como f é diferenciável $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, basta estudarmos o sistema $\nabla f = (y, x) = \mathbf{0}$ para determinarmos seus pontos críticos. Claramente, a única solução de tal sistema é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Geometricamente, temos que a superfície $z = f(x,y) = xy$ é um parabolóide hiperbólico, de forma que a origem não é nem um máximo nem um mínimo local.



De fato, para pontos no 1º e no 3º quadrante, i.e., $\mathbf{x} \in \mathbb{R} \mid x \cdot y > 0$, temos que $f(x,y) > 0 = f(0,0)$, ao passo que para pontos no 2º e 4º quadrantes, i.e., $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y < 0$, temos que $f(x,y) < 0 = f(0,0)$.

Conseqüentemente, para qualquer vizinhança da origem existem pontos $\mathbf{x}_+$ tais que $f(\mathbf{x}_+) > f(\mathbf{0})$ e pontos $\mathbf{x}_-$ tais que $f(\mathbf{x}_-) < f(\mathbf{0})$. Logo, a origem é um ponto de sela. //

O próximo teorema fornece condições necessárias para que um ponto interno seja um máximo ou um mínimo local.

Teorema 11.11: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ e considere um ponto interior $x_0 \in \mathring{D}$,

(a) Se x_0 for um máximo local de f então $\partial_x^2 f(x_0) \leq 0$ e $\partial_y^2 f(x_0) \leq 0$;

(b) Se x_0 for um mínimo local de f então $\partial_x^2 f(x_0) \geq 0$ e $\partial_y^2 f(x_0) \geq 0$."

Demonstração:

(a) Defina, como na demonstração do teorema 11.7 uma função

$$g: (x_1, x_2) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto g(x) = f(x, y_0)$$

onde $x_1 < x_0 < x_2$ e $(x_1, y_0), (x_2, y_0) \in B(x_0, r) \subset D$

Das hipóteses sobre f, segue que x_0 é um ponto do interior do domínio de g e além disso, é um máximo local de g. Como g também é de classe $\mathcal{C}^2$, temos necessariamente que:

$$g'(x_0) = 0 \text{ e } g''(x_0) \leq 0 \Rightarrow \partial_x^2 f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Similarmente, podemos definir a função:

$$h: (y_1, y_2) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto h(y) = f(x_0, y)$$

onde $y_1 < y_0 < y_2$ e $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in B(x_0, r) \subset D$

que satisfaz:

$$h'(y_0) = 0 \text{ e } h''(y_0) \leq 0 \Rightarrow \partial_y^2 f(x_0, y_0) \leq 0$$

(b) Exercício!

Exemplo 11.12: "Determine quais dos pontos críticos da função do exemplo 11.8 são candidatos a máximos e mínimos locais.

Solução: precisamos avaliar as derivadas $\partial_x^2 f$ e $\partial_y^2 f$ com

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$$

nos pontos: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$. Como

$$\partial_x^2 f = 6x \quad \text{e} \quad \partial_y^2 f = 6x$$

temos que

(*) $(1,1) \Rightarrow \partial_x^2 f = 6 \geqslant 0$ e $\partial_y^2 f = 6 \geqslant 0$

$\Rightarrow$ possível ponto de mínimo local

(*) $(1,-1) \Rightarrow \partial_x^2 f = 6 \geqslant 0$ e $\partial_y^2 f = -6 \leqslant 0$

$\Rightarrow$ não é extremo local (ponto de sela)

(*) $(-1,1) \Rightarrow \partial_x^2 f = -6 \leqslant 0$ e $\partial_y^2 f = 6 \geqslant 0$

$\Rightarrow$ não é extremo local (ponto de sela)

(*) $(-1,-1) \Rightarrow \partial_x^2 f = -6 \leqslant 0$ e $\partial_y^2 f = -6 \leqslant 0$

$\Rightarrow$ possível ponto de máximo."

A seguir enunciamos um teorema que fornece condições suficientes para que um ponto crítico seja um extremo local.

<u>Teorema 11.13</u>: "Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^2} \mathbb{R}$ e $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathring{D}$ um ponto crítico. Denote por

$$H(x,y) = \det \begin{bmatrix} \partial_x^2 f(x,y) & \partial_y \partial_x f(x,y) \\ \partial_x \partial_y f(x,y) & \partial_y^2 f(x,y) \end{bmatrix}$$

o hessiano de f. Assim,

(a) Se $H(\mathbf{x}_0) > 0$ e $\partial_x^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$, então $\mathbf{x}_0$ é um mínimo local de f;

(b) Se $H(\mathbf{x}_0) > 0$ e $\partial_x^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$, então $\mathbf{x}_0$ é um máximo local de f;

(c) Se $H(\mathbf{x}_0) < 0$, então $\mathbf{x}_0$ é um ponto de sela;

(d) Se $H(\mathbf{x}_0) = 0$, nada se pode afirmar."

A demonstração completa deste teorema está além das pretensões deste curso. Contentaremo-nos, pois, com uma argumentação geométrica que ilustra as idéias principais envolvidas na demonstração.

A idéia fundamental da demonstração surge da constatação de que parabolóides elípticos e hiperbólicos (vide exemplos 11.2 e 11.10) constituem exemplos significativamente simples de pontos de máximos ou mínimos e pontos de sela. Assim, procura-se o parabolóide que melhor aproxima o gráfico do campo escalar bidimensional na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{x}_0$, a partir do comportamento das derivadas de segunda ordem do campo escalar em questão.

Um parabolóide genérico é descrito pela seguinte forma quadrática:

$$P(\mathbf{x}) = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + Dx + Fy + G$$

que depende de 6 parâmetros. Logo, para determiná-lo precisamos de 6 equações. A primeira, vem naturalmente da constatação de que o parabolóide e o campo escalar devem coincidir no ponto crítico, i.e.

$$(1) \quad P(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)$$

outras duas condições surgem ao demandarmos que o parabolóide e o gráfico de f tenham o mesmo plano tangente em $\mathbf{x}_0$

$$\nabla P(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \Rightarrow \begin{cases} (2) \quad \partial_x P(\mathbf{x}_0) = \partial_x f(\mathbf{x}_0) \\ (3) \quad \partial_y P(\mathbf{x}_0) = \partial_y f(\mathbf{x}_0) \end{cases}$$

As demais três equações surgem ao demandarmos que tal aproximação parabólica descreva o campo f suficientemente bem numa vizinhança do plano tangente em $\mathbf{x}_0$, permitindo assim determinarmos a natureza do ponto crítico.

Que as condições:

$$(4) \quad \partial_x^2 P(x_0) = \partial_x^2 f(x_0)$$

$$(5) \quad \partial_y^2 P(x_0) = \partial_y^2 f(x_0)$$

$$(6) \quad \partial_x \partial_y P(x_0) = \partial_x \partial_y f(x_0)$$

são suficientes para garantir tal resultado é o passo não trivial da demonstração.

Note que não precisamos demandar que

$$\partial_y \partial_x P(x_0) = \partial_y \partial_x f(x_0)$$

pois como f é de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaz às hipóteses do teorema de Schwarz.

Assim, o sistema

$$\begin{cases} \frac{A}{2} x_0^2 + B x_0 y_0 + \frac{C}{2} y_0^2 + D x_0 + F y_0 + G = f(x_0) \\ A x_0 + B y_0 + D = \partial_x f(x_0) \\ B x_0 + C y_0 + F = \partial_y f(x_0) \\ A = \partial_x^2 f(x_0) \\ C = \partial_y^2 f(x_0) \\ B = \partial_x \partial_y f(x_0) \end{cases}$$

determina o parabolóide que melhor aproxima o gráfico do campo escalar.

Agora para determinar o tipo do parabolóide, olhamos para as suas curvas de nível:

$$\frac{A}{2}x^2 + Bxy + \frac{C}{2}y^2 + Dx + Fy + G = \text{constante} \qquad (*)$$

Da geometria analítica sabemos que $(*)$ representa uma:

(i) Hipérbole, se $B^2 - 4\left(\frac{A}{2}\right)\cdot\left(\frac{C}{2}\right) = B^2 - AC > 0$

(ii) Elipse, se $B^2 - AC < 0$

(iii) Parábola, se $B^2 - AC = 0$

Consequentemente,

(a) Se $B^2 - AC < 0$, $A > 0$ e $C > 0$, as curvas de nível são elipses, e o gráfico de $P(x)$ é um parabolóide elíptico com concavidade para cima. Logo, f tem um mínimo local em x_0

(b) Se $B^2 - AC < 0$, $A < 0$ e $B < 0$, as curvas de nível são elipses, e o gráfico de $P(x)$ é um parabolóide elíptico com concavidade para baixo. Logo, f tem um máximo local em x_0.

(c) Se $B^2 - AC > 0$, as curvas de nível são hipérboles, e o gráfico de $P(x)$ é um parabolóide hiperbólico. Logo, f tem um ponto de sela em x_0.

(d) Se $B^2 - AC = 0$, as curvas de nível de $P(x)$ são parábolas, e o gráfico de $P(x)$ é um cilindro parabólico. Logo, nada pode ser concluído.

<u>Exemplo 11.14</u>: " Classificar os pontos críticos da função $f(x) = x^3+y^3-3(x+y)$. "

<u>Solução</u>: Precisamos avaliar o hessiano nos pontos: $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

Como:

$$H(x,y) = \det\begin{pmatrix} \partial_x^2 f & \partial_y\partial_x f \\ \partial_x\partial_y f & \partial_y^2 f \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} = 36xy$$

(*) $\underline{(1,1)} \Rightarrow H(1,1) = 36 > 0$, $\partial_x^2 f(1,1) = 6 > 0$

$\Rightarrow (1,1)$ é um mínimo local

(*) $(1,-1) \Rightarrow H(1,-1) = -36 < 0 \Rightarrow (1,-1)$ é um ponto de sela

(*) $(-1,1) \Rightarrow H(-1,1) = -36 < 0 \Rightarrow (-1,1)$ é um ponto de sela

(*) $(-1,-1) \Rightarrow H(-1,-1) = 36 > 0$, $\partial_x^2 f(-1,-1) = -6 < 0$

$\Rightarrow (-1,-1)$ é um máximo local. "

Até agora estudamos condições necessárias e suficientes para que um ponto interior do domínio de um campo escalar bidimensional seja um extremo local. Entretanto, em muitos problemas práticos deseja-se encontrar os extremos em um subconjunto, muitas vezes fechado, do domínio do campo escalar em questão. É neste contexto que o teorema de Weierstraß garante a existência de extremos para toda função contínua em um conjunto compacto.

Definição 11.15: " Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$, dizemos que S é compacto se for fechado e limitado."

Lembramos que S é um conjunto fechado se o seu complementar, i.e., $\mathbb{R}^n \setminus S$, for aberto e que S é um conjunto limitado se estiver contido em alguma bola aberta da origem.

Exemplo 11.16: " Toda bola fechada de centro x_0 e raio $r > 0$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}$$

é um conjunto compacto, pois é fechado e limitado."

Com isso podemos enunciar o teorema de Weierstraß cuja demonstração está fora do escopo deste curso, podendo ser encontrada em livros de análise real.

Teorema 11.17: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{C^0} \mathbb{R}$, se $S \subseteq D$ for compacto então existem $x_1, x_2 \in S$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in S$."

Assim, se $f: S \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^2} \mathbb{R}$ onde S é algum compacto, o teorema de Weierstraß garante que existem, $x_1, x_2 \in S$ tais que

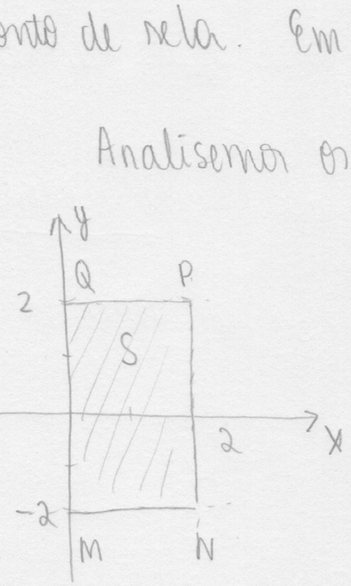
$f(x_1)$ é o valor mínimo e $f(x_2)$ é o valor máximo de f em S.

Resta-nos o problema de determinar tais pontos. Sabemos que dentre os pontos interiores, apenas os críticos, podem ser extremos. De forma que nossa primeira tarefa consiste em identificar tais pontos críticos no interior de S, e determinar a sua natureza. A seguir procuramos pelos máximos e mínimos sobre a borda de S. Comparando os valores dos pontos assim obtidos tanto no interior quanto na fronteira de S determinamos os pontos máximo e mínimo de f em S.

Exemplo 11.18: "Determine os extremos de $f(x) = x^3 + y^3 - 3(x+y)$ em $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,2] \text{ e } |y| \leq 2\}$."

Solução: Dos exemplos anteriores sabemos que os pontos críticos de f em $\mathbb{R}^2$ são: $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$, destes apenas $(1,1), (1,-1) \in \mathring{S}$. Além disso, sabemos que $(1,1)$ é um mínimo local e $(1,-1)$ é um ponto de sela. Em particular, $f(1,1) = -4$.

Analisemos os pontos de fronteira. Para tanto precisamos considerar



as quatro funções definidas pelas restrições de f aos segmentos $\overline{QP}$, $\overline{PN}$, $\overline{MN}$ e $\overline{QM}$

(1) $\overline{QP}$: $g_1(x) = f(x,2) = x^3 - 3x + 2$, $x \in [0,2]$

$g_1'(x) = 3x^2 - 3 \quad , \quad g_1'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad , \quad -1 \notin [0,2]$

$g_1''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad g_1''(1) = 6 \geqslant 0 \Rightarrow f(1,2) = 0$ é um mínimo

(2) $\overline{MN}$: $g_2(x) = f(x,-2) = x^3 - 3x - 2 \quad , \quad x \in [0,2]$

$g_2'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \quad , \quad -1 \notin [0,2]$

$g_2''(x) = 6x \quad \Rightarrow \quad g_2''(1) = 6 \geqslant 0 \Rightarrow f(1,-2) = -4$ é um mínimo

(3) $\overline{QM}$: $g_3(y) = f(0,y) = y^3 - 3y \quad , \quad y \in [-2,2]$

$g_3'(y) = 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$$g_3''(y) = 6y \Rightarrow \begin{cases} g_3''(1) = 6 \geqslant 0 \Rightarrow f(0,1) = -2 \text{ é um mínimo} \\ g_3''(-1) = -6 \leqslant 0 \Rightarrow f(0,-1) = 2 \text{ é um máximo} \end{cases}$$

(4) $\overline{PN}$: $g_4(y) = f(2,y) = y^3 - 3y + 2 \quad , \quad y \in [-2,2]$

$g_4'(y) = 3y^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$

$$g_4''(y) = 6y \Rightarrow \begin{cases} g_4''(1) = 6 \geqslant 0 \Rightarrow f(2,1) = 0 \\ g_4''(-1) = -6 \leqslant 0 \Rightarrow f(2,-1) = 4 \text{ é um máximo} \end{cases}$$

Resta apenas calcularmos f nos vértices:

$f(0,-2) = -2 \quad , \quad f(0,2) = 2 \quad , \quad f(2,-2) = 0 \quad , \quad f(2,2) = 4$

Comparando todos os valores obtidos concluímos que em S, f atinge um

(*) <u>Máximo</u>: $x = (2,-1)$ e $x = (2,2)$ com $f(x) = 4$

(*) <u>Mínimo</u>: $x = (1,1)$ e $x = (1,-2)$ com $f(x) = -4$. "

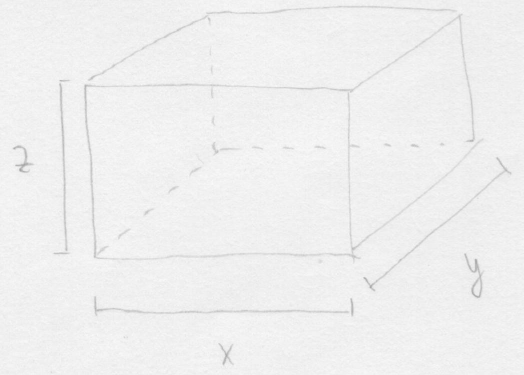
<u>Exemplo 11.19</u>: " Quais as dimensões de uma caixa retangular sem tampa com volume $4m^3$ com menor área superficial possível?

<u>Solução</u>: Precisamos encontrar o mínimo global da função:

$$A : D \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto A(x) = 2xz + 2yz + xy$$

onde $D = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0 \}$ tal que o vínculo

$V = x \cdot y \cdot z = 4$ seja satisfeito.



Devido ao vínculo podemos eliminar a coordenada z, por

$$z = \frac{4}{xy}$$

e reduzir A a um campo escalar bidimensional

$$a : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto a(x) = \frac{8}{y} + \frac{8}{x} + xy$$

onde $\tilde{D} = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \}$

Como $\tilde{D}$ é um aberto, todo mínimo é um ponto crítico, que determinamos através do sistema $\nabla a = 0$, i.e.,

$$\begin{cases} \partial_x a = -\dfrac{8}{x^2} + y = 0 \\ \\ \partial_y a = -\dfrac{8}{y^2} + x = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $x = (2,2)$. Resta sabermos se tal ponto é de fato um mínimo:

$$H(x,y) = \det \begin{pmatrix} \partial_x^2 a & \partial_y \partial_x a \\ \partial_x \partial_y a & \partial_y^2 a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 16x^{-3} & 1 \\ 1 & 16y^{-3} \end{pmatrix} = 256x^{-3}y^{-3} - 1$$

$$\Rightarrow H(2,2) = \frac{2^8}{2^6} - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\Rightarrow \partial_x^2 a\,(2,2) = \frac{16}{8} = 2 > 0$$

Logo, $(2,2)$ é um mínimo local e global. De forma que as dimensões da caixa que minimizam a sua área superficial são

$$x = 2m, \quad y = 2m, \quad z = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1\,m \;.\; //$$