$3a - b = 2.84$ $\quad Q(0{,}36, -1{,}76) =$

$a + b = -1.4$ $\quad = 0{,}84^2 + 1{,}4^2 + 1{,}12^2$

$a - 2b = 3.88$ $\quad = \underline{3{,}92}$ melhor solução dado ao que não tem solução

14/08

Mínimos Quadrados

Olhando p/ sistemas sobredeterminados

K incógnitas

N equações $\quad \underline{K \leq N}$

tbm pode: quando houver solução, MMQ vai achá-la

Aula passada: fizemos um exemplos c/ $K = 2$ e $N = 3$

Vamos discutir o caso $\underline{K=1}$, N qualquer

Incógnita: $\underline{a}$

N equações:

Sistema
$$\begin{cases} u_1 a = b_1 \\ u_2 a = b_2 \\ \vdots \\ u_n a = b_n \end{cases}$$

Os coeficientes u_i, b_i são dados

Não esperamos solução (em geral)

MMQ propõe: achar o valor de $\underline{a}$ tal que somar os erros de cada equação

$$Q(a) = (u_1 a - b_1)^2 + (u_2 a - b_2)^2 + \dots + (u_n a - b_n)^2$$

(resíduo quadrático em função de $\underline{a}$)

Ou ainda: MMQ c/ pesos

$p_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ pesos

__/__/__

S T Q Q S S D

$Q(a) = p_1(u_1 a - b_1)^2 + p_2(u_2 a - b_2)^2 + \dots + p_n(u_n a - b_n)^2$

Notação compacta:

$$Q(a) = \sum_{i=0}^{N} p_i(u_i a - b_i)^2 \geq 0$$

→ função quadratica

parabola, concavidade para cima
só tem um ponto crítico que é
o mínimo da função

Obs: Se o sistema tivesse solução $\bar{a}$, então

$$u_i \bar{a} = b_i, \ \forall i$$
$$u_i \bar{a} - b_i = 0, \ \forall i$$
$$Q(\bar{a}) = 0$$

Como $Q(a) \geq 0$, então a solução é um mínimo de Q.

Obs 2: O mínimo (e o valor) dependem da escolha de pesos.

Objetivo: achar a que minimiza $Q(a)$.

Obs: O valor absoluto de Q mínimo não tem sentido a priori.

O problema matemático se reduz a achar o mínimo de Q.

Um jeito é procurar pts. críticos de Q:

$$Q'(a) = 0$$

$$Q'(a) = \frac{d}{da} \sum_i p_i(u_i a - b_i)^2$$
$$= \sum_i \frac{d}{da} \left[p_i(u_i a - b_i)^2 \right]$$
$$= \sum_i p_i \cdot 2(u_i a - b_i) \cdot u_i$$
$$= 2 \sum_i p_i u_i (u_i a - b_i)$$

spiral

Q'(a) = 0:

$$\cancel{2}\sum_i p_i u_i (u_i a - b_i) = 0$$

$$\sum_i (p_i u_i^2 a - p_i u_i b_i) = 0$$

$$\sum_i (p_i u_i^2 a) + \sum_i (-p_i u_i b_i) = 0$$

$$\Big(\sum_i p_i u_i^2\Big) a - \sum_i p_i u_i b_i = 0$$

(*) $\boxed{\Big(\sum_i p_i u_i^2\Big) a = \sum_i p_i u_i b_i}$ 1 equação
1 incógnita

Solução imediata:

$$a = \frac{\sum p_i u_i b_i}{\sum p_i u_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} a = a \sum_{i=1}^{N} 1 = a \cdot N$$

Fixado o conjunto de pesos $(p_i)_{i=1,\dots,N}$
vamos usar a notação:

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

produto escalar
ou interno

Definindo uma notação

$$\langle u, v \rangle = p_1(u_1 v_1) + p_2(u_2 v_2) + \dots + p_n(u_n v_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i v_i$$

os p_i's estão embutidos na notação

(*) reescrita: $\boxed{\langle u, u \rangle a = \langle u, b \rangle}$

(com $u = (u_1, \dots, u_n)$ coefs. do lado esq.

$b = (b_1, \dots, b_n)$ termos independentes

___/___/___

S T Q Q S S D

Agora: $K = 2$

incógnitas a, b → este b vai desbancar o anterior

N equações

$$\begin{cases} u_1 a + v_1 b = w_1 \\ u_2 a + v_2 b = w_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ u_n a + v_n b = w_n \end{cases}$$

c/ pesos $(p_i)_{i=1,\dots,n}$

Objetivo:

Minimizar

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} p_i (u_i a + v_i b - w_i)^2$$

Mínimo tem que ser ponto crítico.

Pt. crítico (a,b) tem que satisfazer

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a}(a,b) = \sum_i p_i 2 (u_i a + v_i b - w_i) u_i$$

$$= 2\left[\left(\sum_i p_i u_i^2\right) a + \left(\sum_i p_i u_i v_i\right) b - \sum_i p_i u_i w_i\right]$$

$$= 2[\langle u, u \rangle a + \langle u, v \rangle b - \langle u, w \rangle]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0: \boxed{\langle u, u \rangle a + \langle u, v \rangle b = \langle u, w \rangle}$$

S T Q Q S S D   ___/___/___

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 2\sum_i p_i v_i (u_i a + v_i b - w_i)$$

$$= 2\left[\langle v,u\rangle a + \langle v,v\rangle b - \langle v,w\rangle\right]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = 0: \quad \boxed{\langle v,u\rangle a + \langle v,v\rangle b = \langle v,w\rangle}$$

Ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} \langle u,u\rangle a + \langle u,v\rangle b = \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle a + \langle v,v\rangle b = \langle v,w\rangle \end{cases}$$ <u>Sistema normal</u>

A solução do MMQ é a solução deste sistema.

<u>Aula passada</u>: $\underline{N=3}$

$$\begin{cases} 3a - b = 2 \\ a + b = 0 \\ a - 2b = 5 \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

pesos uniformes: $p_i = 1, \forall i$

$\langle u,u\rangle = 11$ | $\langle u,w\rangle = 11$

$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle = -4$ | $\langle v,w\rangle = -12$

$\langle v,v\rangle = 6$

$$\begin{cases} 11a - 4b = 11 \\ -4a + 6b = -12 \end{cases}$$

___/___/___

S T Q Q S S D

Caso geral k

Incógnitas: $a_1, a_2, \dots, a_k$

$$\begin{cases} u_1^{(1)} a_1 + u_1^{(2)} a_2 + \dots + u_1^{(k)} a_k = w_1 \\ u_2^{(1)} a_1 + u_2^{(2)} a_2 + \dots + u_2^{(k)} a_k = w_2 \\ \vdots \\ u_n^{(1)} a_1 + u_n^{(2)} a_2 + \dots + u_n^{(k)} a_k = w_n \end{cases}$$

vetor $u^{(1)}$ — $u^{(2)}$ — $u^{(k)}$ — w

Sistema Normal

$$\begin{cases} \langle u^{(1)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(1)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \dots + \langle u^{(1)}, u^{(k)} \rangle a_k = \langle u^{(1)}, w \rangle \\ \langle u^{(2)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(2)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \dots + \langle u^{(2)}, u^{(k)} \rangle a_k = \langle u^{(2)}, w \rangle \\ \vdots \\ \langle u^{(k)}, u^{(1)} \rangle a_1 + \langle u^{(k)}, u^{(2)} \rangle a_2 + \dots + \langle u^{(k)}, u^{(k)} \rangle a_k = \langle u^{(k)}, w \rangle \end{cases}$$

spiral