Eletromagnetismo I

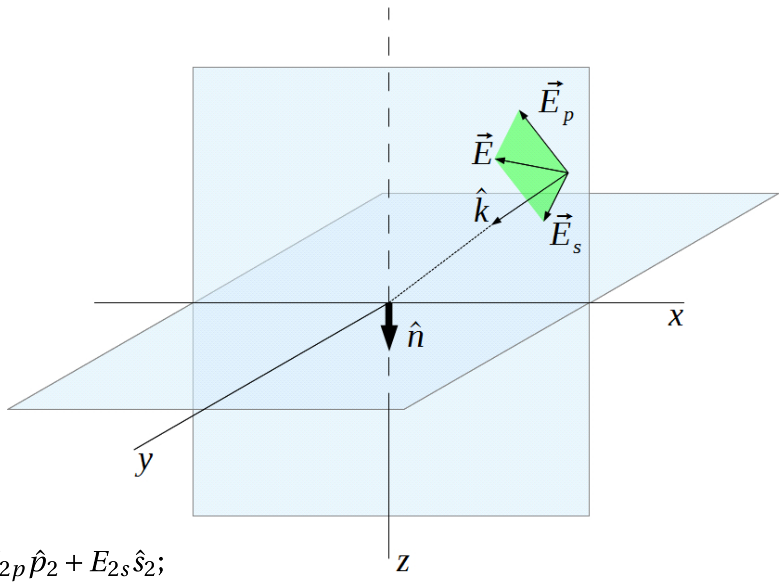
Prof. Ricardo Galvão - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 38

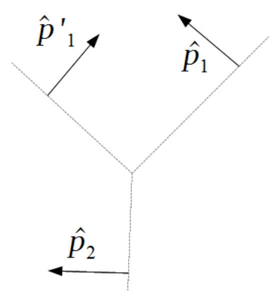
Continuidade das Amplitudes

Como sabemos que os vetores $\vec{k}_1$, $\vec{k}_1'$, $\vec{k}_2$ e $\hat{n}$ estão num mesmo plano, o plano de incidência, podemos facilitar a aplicação das condições de contorno decompondo o campo elétrico numa componente paralela ao plano de incidência, componente $\vec{E}_p$, e outra normal ao plano de incidência (e, portanto, paralela à interface), componente $\vec{E}_s$. O subscrito s vem de senkrecht (alemão). Portanto, os campos elétricos das ondas incidente, refletida e transmitida, ficam



$$\vec{E}_1 = E_{1p}\hat{p}_1 + E_{1s}\hat{s}_1; \quad \vec{E}_1' = E_{1p}'\hat{p}_1' + E_{1s}'\hat{s}_1'; \quad \vec{E}_2 = E_{2p}\hat{p}_2 + E_{2s}\hat{s}_2;$$

Naturalmente, os três versores normais são iguais: $\hat{s}_1 = \hat{s}_1' = \hat{s}_2 = \hat{e}_y$ Já os versores paralelos são coplanares.



Para encontrar as relações entre as amplitudes, basta considerar as condições de contorno para as componentes tangenciais de $\vec{E}$ e $\vec{B}$, ou seja,

$$\hat{n} \times \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_1'\right) = \hat{n} \times \vec{E}_2$$

$$\hat{n} \times \left(\vec{H}_1 + \vec{H}_1'\right) = \hat{n} \times \vec{H}_2$$

Mas

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\mu_i}\vec{B}_i = \frac{1}{\mu_i v_i}\hat{k}_i \times \vec{E}_i = \frac{n_i}{\mu_i c}\hat{k}_i \times \vec{E}_i$$

Portanto, a condição de contorno para a componente tangencial do campo magnético fica

$$\frac{n_1}{\mu_1}\hat{n}\times\left(\hat{k}_1\times\vec{E}_1+\hat{k}_1'\times\vec{E}_1'\right)=\frac{n_2}{\mu_2}\hat{n}\times\left(\hat{k}_2\times\vec{E}_2\right)$$

Como as componentes s e p dão ortogonais entre si, elas se desacoplam nessas equações e podemos resolvê-las para cada polarização separadamente. Isto ocorre porque

$$\hat{n}\times\hat{p} \quad\rightarrow\quad \text{vetor normal ao plano de incidência}$$

$$\hat{n}\times\hat{s} \quad\rightarrow\quad \text{vetor no plano de incidência}$$

Exercício: Mostre que

$$\langle S\rangle=\frac{1}{2}\frac{n}{\mu_0 c}\left(E_p^2+E_s^2\right)$$

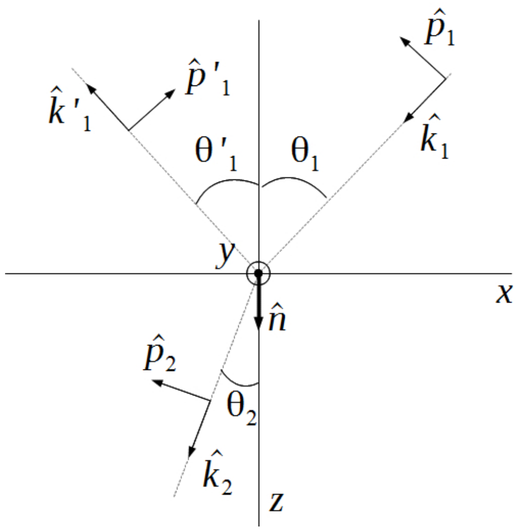
Polarização Normal (s)

Fazendo $E_{ip}=0$, temos que a primeira equação (1) se reduz a

$$(\hat{n}\times\hat{s})=\left[E_{1s}+E_{1s}'=E_{2s}\right]$$

Na segunda equação temos o produto vetorial duplo

$$\hat{n}\times\left(\hat{k}_i\times\vec{E}_i\right)E_{is}\hat{n}\times\left(\hat{k}_i\times\hat{s}\right)=E_{is}\left[(\hat{n}\cdot\hat{s})\hat{k}_i-(\hat{n}\cdot\hat{k}_i)\hat{s}\right]$$



Mas

$$\hat{n}\cdot\hat{k}_i=cos\theta_1;\quad \hat{n}\cdot\hat{k}_i'=cos(180\text{ř}-\theta_1)=-cos\theta_1;\quad \hat{n}\cdot\hat{k}_2=cos\theta_2$$

Portanto, para a polarização norma, o sistema de equações das condições de contorno fica

$$\begin{cases} E_{1s}+E_{1s}'=E_2 \\ \\ \frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_1(E_{1s}-E_{1s}')=\frac{n_2}{\mu_2}cos\theta_2E_{2s}\end{cases}$$

Este sistema pode ser facilmente resolvido, fornecendo os coeficientes de Fresnel

$$r_s = \frac{E'_{1s}}{E_{1s}} = \frac{\frac{n_1}{\mu_1} cos\theta_1 - \frac{n_2}{\mu_2} cos\theta_2}{\frac{n_1}{\mu_1} cos\theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2} cos\theta_2} = \frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}, \quad \text{para} \quad \mu_1 = \mu_2$$

e

$$t_s = \frac{E_{2s}}{E_{1s}} = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1} cos\theta_1}{\frac{n_1}{\mu_1} cos\theta_1 + \frac{n_2}{\mu_2} cos\theta_2} = \frac{2n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2}, \quad \text{para} \quad \mu_1 = \mu_2$$

Fora menção explícita em contrário, vamos sempre considerar a situação $\mu_1 = \mu_2$.

Naturalmente, nas expressões para r_s e t_s temos que impôr que a terceira lei de Snell, $n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2$ seja satisfeita. Impondo essa condição, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} r_s &= \frac{n_1 cos\theta_1 - n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2} = \frac{sen(\theta_2 - \theta_1)}{sen(\theta_1 + \theta_2)} \\[2em] t_s &= \frac{2n_1 cos\theta_1}{n_1 cos\theta_1 + n_2 cos\theta_2} = \frac{2\cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}}$$

Polarização Paralela (p)

Fazendo $E_{is} = 0$ na primeira condição de contorno, temos

$$\hat{n} \times \hat{p}_1 E_{1p} + \hat{n} \times \hat{p}'_1 E'_{1p} = \hat{n} \times \hat{p}_2 E_{2p}$$

Na equação para a segunda condição vamos ter o produto entre os versores

$$\hat{n} \times (\hat{k}_i \times \hat{p}_i) = -\hat{n} \times \hat{s} = \hat{e}_x$$

Por outro lado, da figura para os versores $\hat{p}_i$ vemos que

$$\hat{n} \times \hat{p}_1 = sen(90 + \theta_1)(-\hat{e}_y) = -cos\theta_1 \hat{e}_y$$

$$\hat{n} \times \hat{p}'_1 = sen(90 + \theta_1)\hat{e}_y = cos\theta_1 \hat{e}_y$$

$$\hat{n} \times \hat{p}_2 = sen(90 = \theta_2)(-\hat{e}_y) = -cos\theta_2 \hat{e}_y$$

Então, as duas relações para as condições de contorno ficam

$$\begin{cases} cos\theta_1 (E_{1p} - E'_{1p}) = cos\theta_2 E_{2p} \\[2em] \quad \frac{n_1}{\mu_1}(E_{1p} + E'_{1p}) = \frac{n_2}{\mu_2} E_{2p} \end{cases}$$

Cuja solução fornece as relações de Fresnel

$$r_p = \frac{\frac{n_2}{\mu_2}cos\theta_1 - \frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_2}{\frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_2 + \frac{n_2}{\mu_2}cos\theta_1}; \qquad t_p = \frac{2\frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_1}{\frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_2 + \frac{n_1}{\mu_1}cos\theta_1},$$

Considerando novamente a situação $\mu_1 = \mu_2$ e utilizando a terceira lei de Snell, obtemos

$$\boxed{\begin{aligned} r_p &= \frac{n_2cos\theta_1 - n_1cos\theta_2}{n_1cos\theta_2 + n_2cos\theta_1} = \frac{tg(\theta_1-\theta_2)}{tg(\theta_1+\theta_2)} \\ \\ t_s &= \frac{2n_1cos\theta_1}{n_1cos\theta_2 + n_2cos\theta_1} = \frac{2cos\theta_1 sen\theta_2}{sen(\theta_1+\theta_2)cos(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}}$$

Observações Importantes

i) Para a polarização s, as relações de Fresnel representam as relações entre os vetores $\vec{E}$, porque todos estão na mesma direção (perpendicular ao plano de incidência).

ii) Para a polarização p, as relações de Fresnel representam as relações somente entre os módulos dos vetores $\vec{E}$ porquê eles não são paralelos.

iii) Em geral, $r_s \neq r_p$ e $t_s \neq t_p$, No entanto, ambas as polarizações têm os mesmos coeficientes de Fresnel para incidência norma, os mesmos já havíamos derivado $\Rightarrow$ mostrar o resultado!

iv) É fácil de verificar que $r_s + t_s \neq 1$ e $r_p + t_p \neq 1$, o quê está correto porque estes coeficientes não representam a reflexão e transmissão de energia.

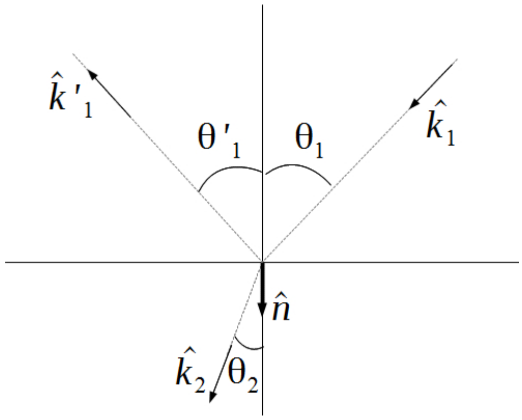
Reflexão e Transmissão de Potência

No caso de incidência oblíqua, existe sempre uma componente do vetor de Poynting paralela à interface que representa a potência da onda sendo transmitida naquela direção. Por isso, na definição dos coeficientes de reflexão e transmissão de potência é necessário considerar apenas a componente do vetor de Poynting perpendicular à interface, ou seja, definimos os coeficientes de reflexão e transmissão de energia (ou potência) como

$$R = \frac{\langle \vec{S}_1' \rangle \cdot (-\hat{n})}{\langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \hat{n}}; \qquad T = \frac{\langle \vec{S}_2 \cdot \hat{n} \rangle}{\langle \vec{S}_1 \rangle \cdot \hat{n}}$$

$$\left[\langle \vec{S} \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c}|E|^2\hat{k} \right]$$

Polarização Normal (s)



$$R_s = \frac{|E'_{1s}|^2 \hat{k}'_1 \cdot (-\hat{n})}{|E_{1s}|^2 \hat{k}_1 \cdot \hat{n}} = r_s^2 \frac{-cos(180ř - \theta_1)}{cos\theta_1}$$

$$T_s = \frac{n_2}{n_1} \frac{|E_{2s}|^2}{|E_{1s}|^2} \frac{\hat{k}_2 \cdot \hat{n}}{\hat{k}_1 \cdot \hat{n}} = \frac{n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1} t_s^2$$

Portanto

$$\boxed{R_s = r_s^2; \qquad T_s = \frac{n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1} t_s^2}$$

e um resultado semelhante é obtido para a polarização paralela

$$\boxed{R_p = r_p^2; \qquad T_p = \frac{n_2 cos\theta_2}{n_1 cos\theta_1} t_p^2} \quad \text{(Exercício.)}$$

Exercício: Provar que $R_s + T_s = 1$ e $R_p + T_p = 1$.

Variação de R e T com θ_1 → Casos Especiais

$$\boxed{\begin{array}{c} \theta_1 = 0 \\ \\ \theta_2 = 2\pi \end{array}} : \quad r_s = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}; \quad r_p = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = -r_s \quad \text{(porque o sinal trocado?)}$$

$$t_s = = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = t_p$$

$$R_s = R_p = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}; T_s = T_p = \left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{\pi}{2}} : \quad \Rightarrow \quad \underline{\text{incidência rasante}}$$

θ_2 só existe se $\frac{n_1}{n_2} < 1$, que corresponde a onda incidente de um meio menos denso para outro mais denso.

$$
\begin{aligned}
r_s &= \frac{sen\left(\theta_2-\frac{\pi}{2}\right)}{sen\left(\theta_2+\frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{cos\theta_2}{cos\theta_2} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad R_s = 1;\;\; T_s = 0; \qquad \text{(reflexão total)} \\
t_s &= \frac{2cos\frac{\pi}{2}sen\theta_2}{sen\left(\theta_2+\frac{\pi}{2}\right)} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_p &= \frac{tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)}{tg\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)} = -1 \qquad \Rightarrow \qquad R_p = 1; T_p = 0; \quad \text{(reflexão total)} \\
t_p &= \frac{2cos\frac{pi}{2}sen\theta_2}{sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta_2\right)cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)} = 0
\end{aligned}
$$

Condição para Refletância Nula: Ângulo de Brewster

$$
\begin{aligned}
r_s \quad &= \quad 0; \quad \Rightarrow \quad sen(\theta_2-\theta_1) = 0; \quad n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2 \\
&\therefore \theta_2 = \theta_1 \quad \rightarrow \quad n_1 = n_2: \text{ só se não houver descontinuidade!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_p \;= 0 \quad \Rightarrow \quad & i)\, tg(\theta_1-\theta_2) = 0; \quad n_1 sen\theta_1 = n_2 sen\theta_2 \\
& \therefore \theta_1 = \theta_2 = 0 \quad \rightarrow \quad n_1 = n_2: \text{ mesmo caso anterior.}
\end{aligned}
$$

$$ii)\, tg(\theta_1+\theta_2) = \infty; \quad n_1 sen\theta_1 - n_2 sen\theta_2$$

$$\therefore \boxed{\theta_1+\theta_2 = \frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow \quad \text{define o } \underline{\text{ângulo de Brewster}}\text{: } \theta_B$$

$$n_1 sen\theta_B = n_2 sen\left(\frac{\pi}{2}-\theta_B\right) = n_2 cos\theta_B$$

$$\boxed{tg\theta_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

O ângulo de Brewster existe para qualquer valor de $n_2/n1$, mas só deixa de refletir a polarização paralela.

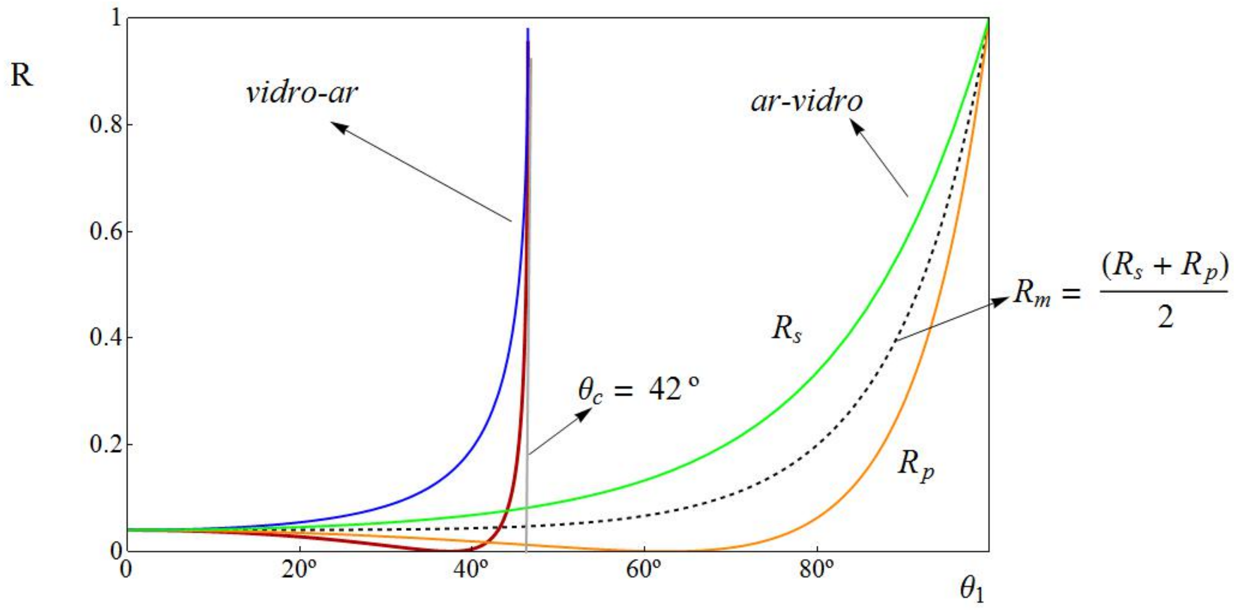
$$\underline{\text{ar-vidro}}: n_1 = 1.0; \;\; n_2 = 1.5; \quad \Rightarrow \quad \theta_B = 56ř$$

$$\underline{\text{vidro-ar}}: n_1 = 1.5; \;\; n_2 = 1.0; \quad \Rightarrow \quad \theta_B = 33,7ř$$

Reflexão Interna Total

$$\theta_2 \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad n_1 sen\theta_1 = n_2 \quad \therefore \quad \boxed{\theta_1 = arcsen\left(\frac{n_2}{n}\right)}$$

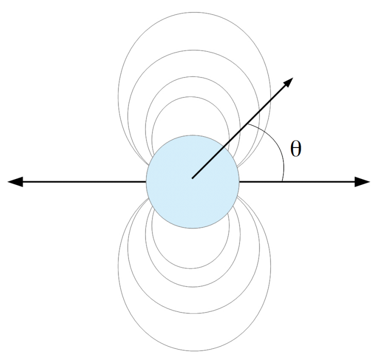
Portanto, a reflexão interna total só pode acontecer se a onda estiver incidindo do meio opticamente mais denso para o menos denso.

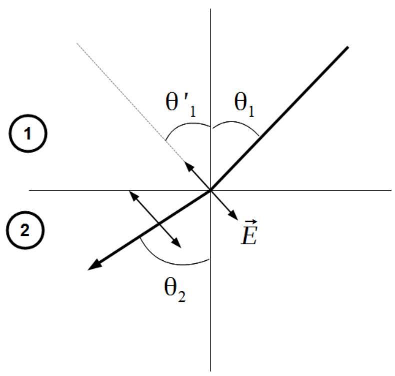


(Compare com as figuras 9.16 e 9.17 do livro texto)

Explicação do Física para o ângulo de Brewster

Quando uma onda eletromagnética incide numa superfície, os elétrons da superfície são colocados me movimento oscilatório pelo campo elétrico da onda. Os elétrons vibrantes radiam, dando origem às ondas refletidas e transmitidas. Mas a direção de movimento dos elétrons tem que ser paralela à do campo elétrico (se os efeitos do campo magnético da onda puderem ser desprezados, o que é válido para $v/c \ll 1$). Mas, como veremos no próximo capítulo, a energia radiada por um elétron tem uma dependência $sen^2\theta$ com o ângulo θ entre a direção do movimento e a direção de radiação. Como a direção da onda transmitida é perpendicular à da onda refletida, na condição de Brewster $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, o campo elétrico $\vec{E}_2$





da onda transmitida (que coloca os elétrons no meio ② em movimento) é paralelo à direção que deveria aparecer a onda refletida e, portanto, não há radiação refletida.