

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

- Como alocar recursos limitados entre atividades (ou decisões) competidoras de maneira “ótima”
- Planejamento de atividades para a obtenção do resultado “ótimo”, ou seja, para se alcançar a melhor alternativa dentre todas as soluções viáveis
- Modelo matemático que descreve um determinado problema, em que todas as funções envolvidas são lineares

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

PROBLEMAS DO TIPO

$$\text{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

função objetivo linear
a n variáveis

sujeita a restrições lineares :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

m equações ou
inequações
lineares

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

vetor de n variáveis
reais e positivas

PROGRAMAÇÃO LINEAR (PL)

Notação Matricial:

$$\max z_o = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

$$s.t. \mathbf{A}\mathbf{x} \leq (=) \mathbf{b}$$

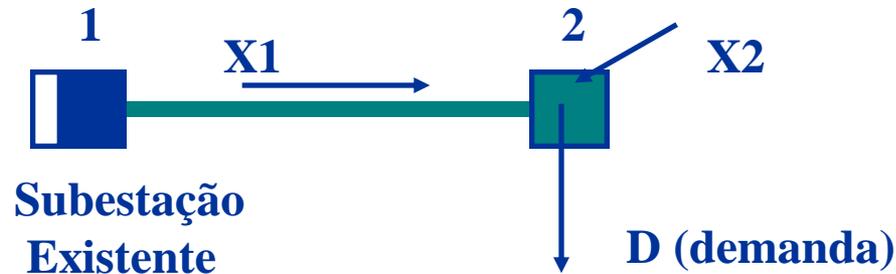
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

função objetivo linear
a n variáveis

m restrições
(equações ou inequações
lineares)

vetor de n variáveis
reais e positivas

Exemplo



Deseja-se alimentar a carga em (2) com demanda D , através da instalação de um alimentador (1-2) e ampliação da Subestação 1 **ou** através da construção de uma nova Subestação em 2. Qual é a alternativa mais econômica? Sabe-se que os valores máximos de $X1$ e $X2$ são respectivamente $XM1$ e $XM2$ e que seus custos unitários (\$/MVA) são $C1$ e $C2$, respectivamente.

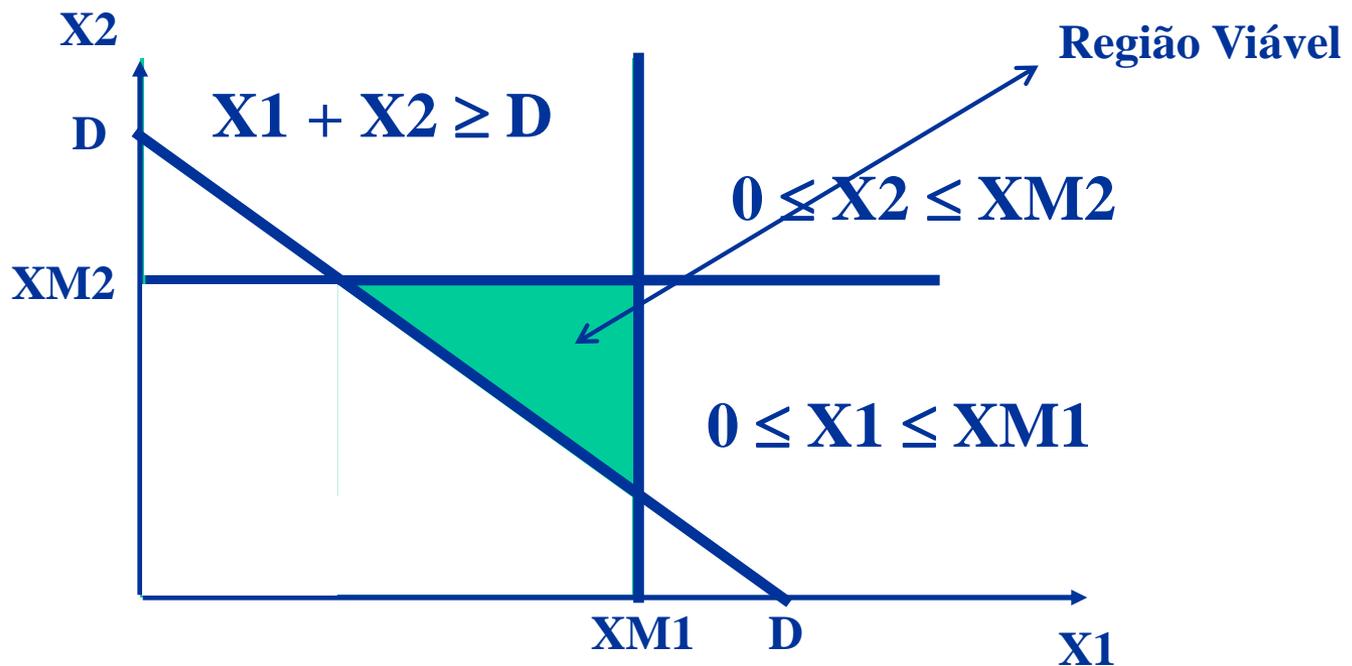
Formulação Matemática por PL

$$\min Z_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$\text{s.a. } 0 \leq X_1 \leq XM_1$$

$$0 \leq X_2 \leq XM_2$$

$$X_1 + X_2 \geq D$$



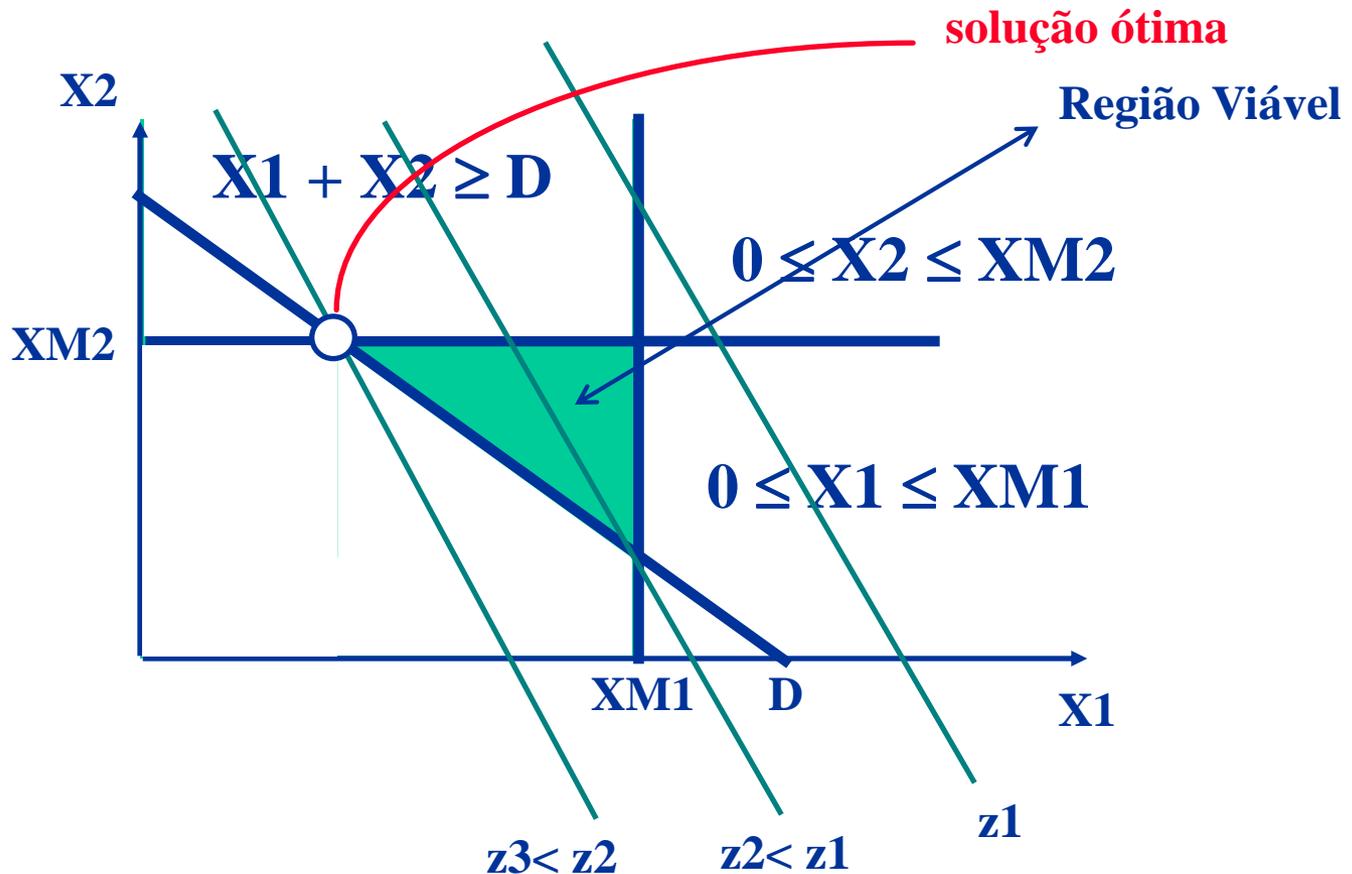
Formulação Matemática por PL

$$\min Z_0 = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

$$\text{s.a. } 0 \leq X_1 \leq X_{M1}$$

$$0 \leq X_2 \leq X_{M2}$$

$$X_1 + X_2 \geq D$$



Aplicações de Programação Linear

- **Configuração ótima de alimentadores em sistemas de distribuição / transmissão**
- **Locação de Suporte Reativo**
- **Áreas de Influência de Subestações**
- **etc.**

Métodos de Solução de Problemas de Programação Linear

- o Método Simplex (Dantzig 1963)
- o Métodos de Ponto Interior (Kharmarkar 1984)
- o Algoritmos Genéticos

Método Simplex

- Forma Canônica do Problema de PL:

$$\text{Max}Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$s.a. \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

- Forma Matricial:

$$\text{Max}Z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$s.a. \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

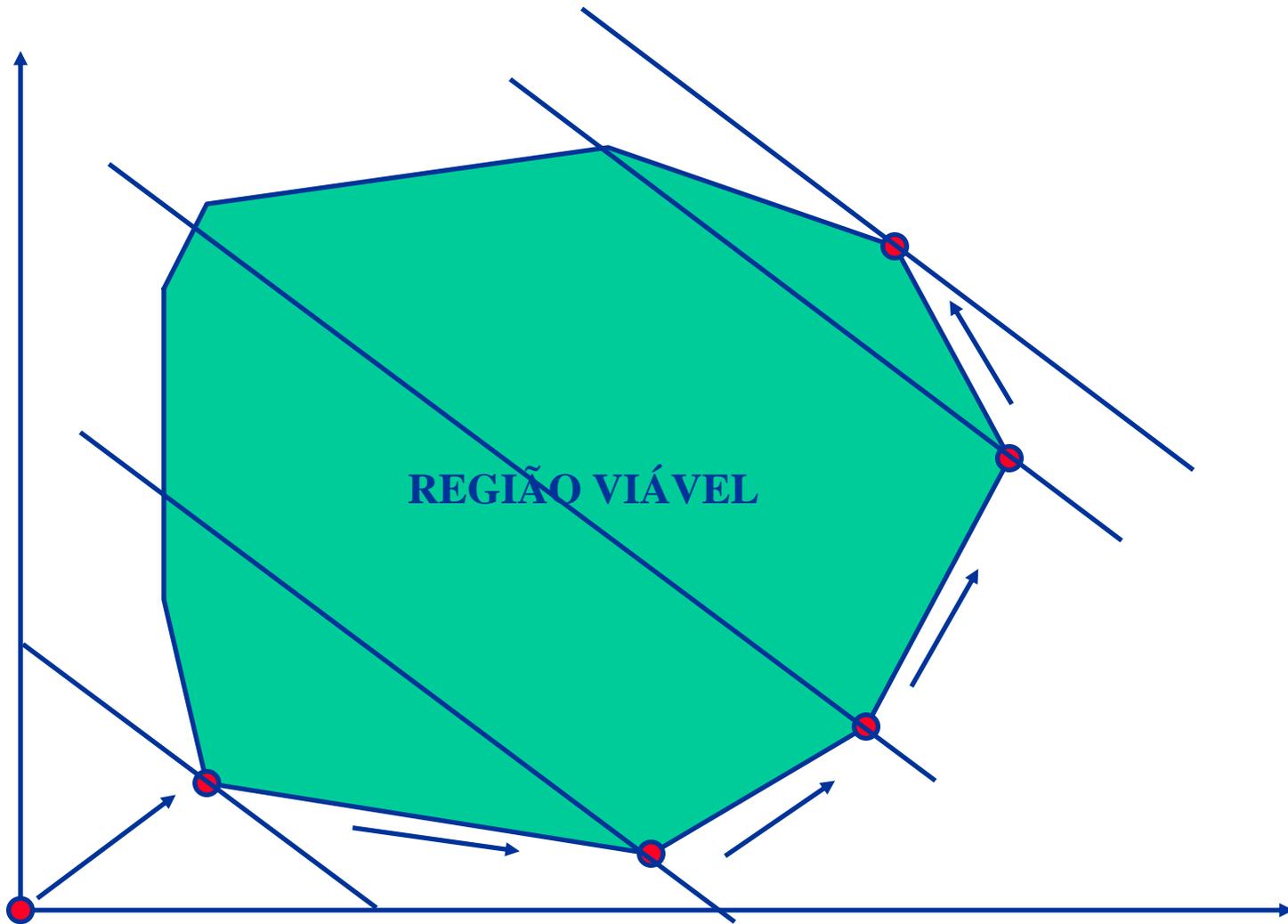
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

Definições para o Método Simplex

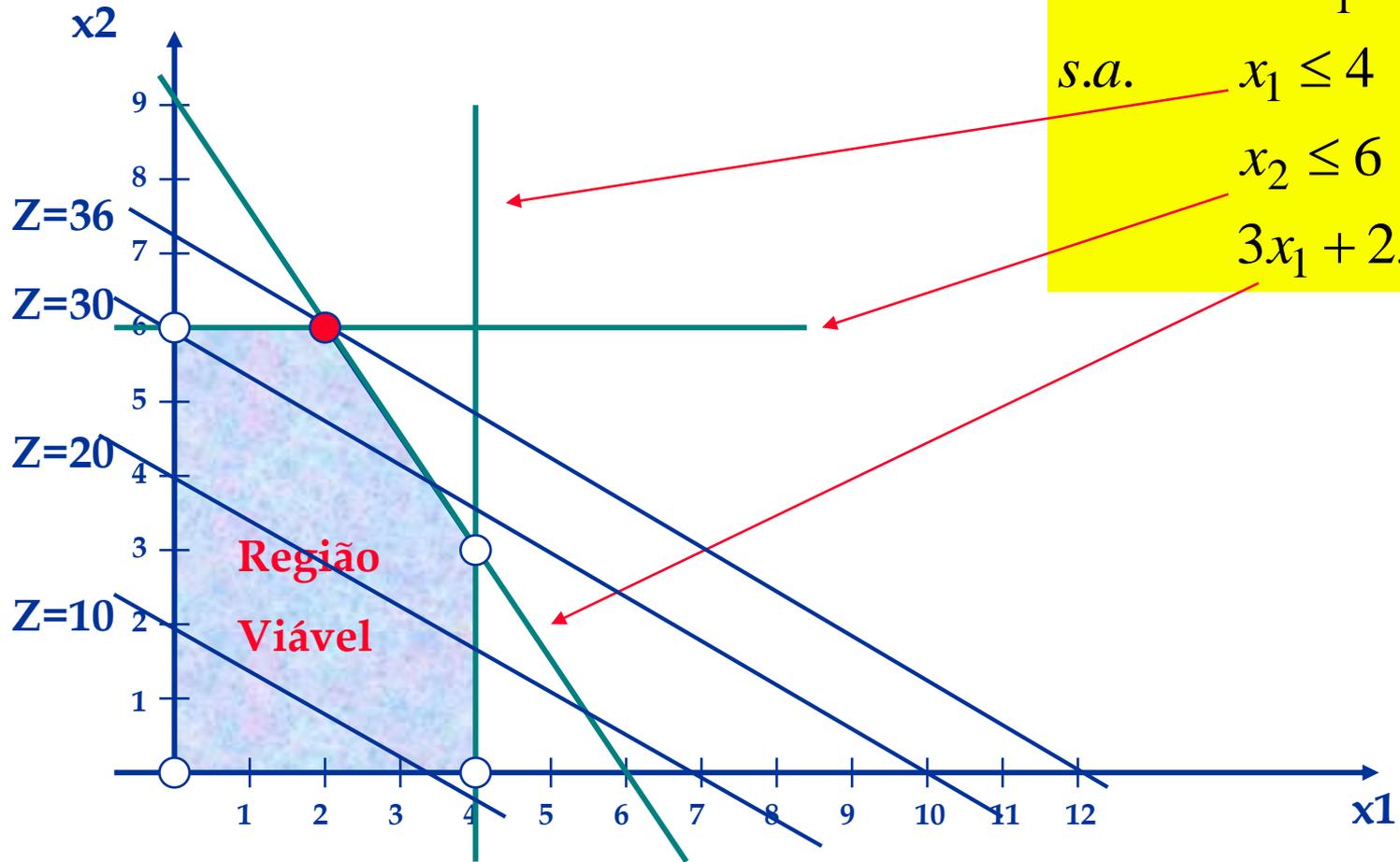
- Solução Viável: qualquer conjunto de valores (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaçam todas as restrições, e $x_i \geq 0$
- Solução Ótima: é uma solução viável que maximiza a função objetivo
- Solução Básica: solução viável que corresponde a um vértice da região viável
- **SIMPLEX:**

solução básica inicial → soluções básicas melhores → solução ótima

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO SIMPLEX



Exemplo



$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a. } x_1 \leq 4$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

Método Simplex:

- Passo 1: definir modelo equivalente, eliminando desigualdades.

Para isto, são utilizadas variáveis residuais (ou de folga). Ex: $x_1 \leq 4 \rightarrow x_1 + x_3 = 4$

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a.} \quad x_1 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_4 = 6$$

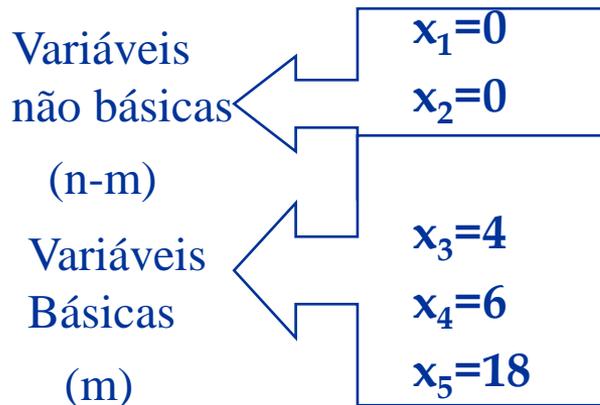
$$3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$$

$$\text{com } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

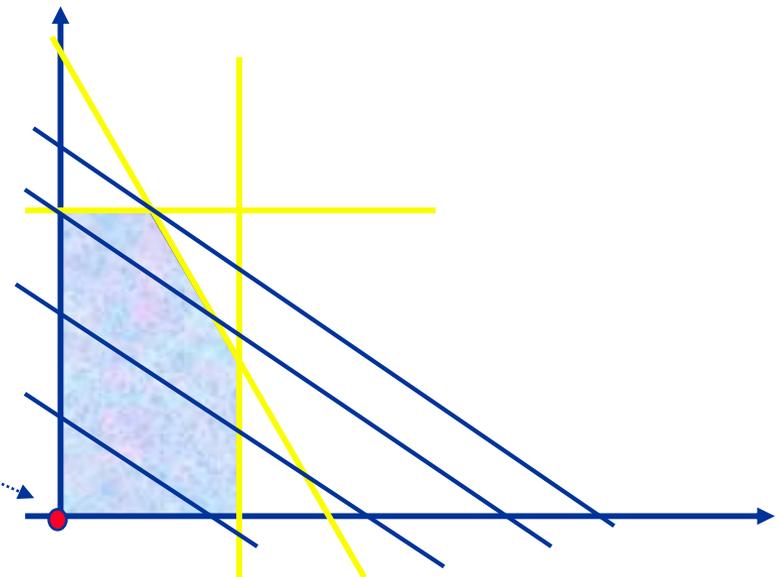
x_3, x_4, x_5 : variáveis residuais (ou de folga)

Método Simplex:

- **Passo 2: determinar uma solução básica (fazendo-se $n-m$ variáveis iguais a zero ou não básicas e as demais m variáveis positivas ou básicas)**
 - Seleccionam-se as variáveis residuais como sendo as variáveis básicas iniciais, ou seja, inicia-se com solução básica na origem ($x_1=x_2=\dots=x_{n-m}=0$).
 - Para o exemplo anterior:



($n=5, m=3$)



Método *Simplex*:

- **Passo 3:** obter outra solução básica (ou concluir que a solução atual é a ótima). Deve ser solução básica correspondente a vértice adjacente que aumente o valor de Z. É obtido trocando-se uma variável básica com uma não básica:
 - **Variável para entrar na base:** análise na função objetivo daquela que aumenta 'mais rapidamente' Z. No exemplo, se $Z = 3x_1 + 5x_2$; então x_2 é escolhida para entrar na base ($5 > 3$)
 - **Variável para sair da base:** valor vai para zero; escolha compatível com a variável que vai entrar na base. No exemplo, x_2 deve entrar (maior aumento possível):
 - $x_1 + x_3 = 4$ (sem limite para x_2)
 - $x_2 + x_4 = 6 \rightarrow x_2 \leq 6 \rightarrow x_4$ deve sair da base e $x_2 = 6$
 - $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \rightarrow x_2 \leq 9$

Método *Simplex*:

- Passo 4: determinar os novos valores das outras variáveis básicas (no ex. x_3 e x_5), utilizando manipulação algébrica (método de Gauss-Jordan) das equações (cada variável básica deve aparecer em uma única equação, e cada equação deve conter somente uma variável básica):

$$\begin{array}{rcl} Z - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_3 = 4 \\ & x_2 & + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 & + & x_5 = 18 \end{array}$$

$(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 4, x_4 = 6, x_5 = 18, Z = 0)$



$$\begin{array}{rcl} Z - 3x_1 & + & 5x_4 = 30 \\ x_1 & + & x_3 = 4 \\ & x_2 & + x_4 = 6 \\ 3x_1 & - & 2x_4 + x_5 = 6 \end{array}$$

$(x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 6, Z = 30)$

Esta solução é
ótima
?

Método *Simplex*:

- Análise da função $Z=30+3x_1-5x_4$
se x_1 entra na base e x_4 permanece fora da base,
então Z pode aumentar
- x_1 entra e x_5 sai da base

$$\begin{array}{rcl}
 Z - 3x_1 & + 5x_4 & = 30 \\
 x_1 & + x_3 & = 4 \\
 x_2 & + x_4 & = 6 \\
 3x_1 & - 2x_4 + x_5 & = 6 \\
 (x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 0, x_5 = 6, Z = 30)
 \end{array}$$



$$\begin{array}{rcl}
 Z & + 3x_4 + x_5 & = 36 \\
 & + x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 & = 2 \\
 x_2 & + x_4 & = 6 \\
 x_1 & - \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = 2 \\
 (x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0, Z = 36)
 \end{array}$$

Esta solução é
ótima
?

Método *Simplex*:

- Análise da função $Z=36 - 3x_4 - x_5$
qualquer acréscimo de x_4 ou x_5 irá reduzir Z
- Portanto a solução é a ótima, com $Z=36, x_1 = 2, x_2 = 6$

Método *Simplex* - “SIMPLEX TABLEAU”

	Variáveis Básicas	Coeficientes					L.D.
		Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	
(0)	Z	1	-3	-5	0	0	0
(1)	x ₃	0	1	0	1	0	4
(2)	x ₄	0	0	1	0	1	6
(3)	x ₅	0	3	2	0	0	18

entra ↓ (pointing to x₂ in row 0)
sai ← (pointing to x₄ in row 2)

	Variáveis Básicas	Coeficientes					L.D.	
		Z	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄		x ₅
(0)	Z	1	-3	0	0	5	0	30
(1)	x ₃	0	1	0	1	0	0	4
(2)	x ₂	0	0	1	0	1	0	6
(3)	x ₅	0	3	0	0	-2	1	6

entra ↓ (pointing to x₁ in row 0)
sai ← (pointing to x₅ in row 3)

$Eq(0) = Eq(0) + 5 Eq(2)$
 $Eq(3) = Eq(3) - 2 Eq(2)$

Método *Simplex* - “SIMPLEX TABLEAU”

	Variáveis Básicas	Coeficientes					L.D.	
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
(0)	Z	1	0	0	0	3	1	36
(1)	x_3	0	0	0	1	2/3	-1/3	2
(2)	x_2	0	0	1	0	1	0	6
(3)	x_1	0	1	0	0	-2/3	1/3	2

$$\text{Eq}(0) = \text{Eq}(0) + 1 \text{Eq}(3)$$

$$\text{Eq}(1) = \text{Eq}(1) - (1/3) \text{Eq}(3)$$

Solução Ótima

$$Z = 36$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 6$$

Exemplo ilustrativo

- “ Um produtor independente dispõe de 2 unidades de geração, que podem ser conectadas ao sistema elétrico em pontos distintos, para a venda do excedente de energia elétrica que são capazes de produzir. Tanto os custos de produção quanto as tarifas negociadas para a venda de energia são distintos para os 2 geradores. O produtor deseja vender o máximo possível de energia, seguindo entretanto seu plano de negócios, que não permite gastar acima de um valor pré-estabelecido para a produção de energia elétrica ”.

Dados do problema

	Gerador 1	Gerador 2
Capacidade de produção (MWh)	5000	7000
Custo de produção (R\$/MWh)	50	100
Tarifa de venda (R\$/MWh)	90	120
Máximo custo de produção total (R\$)	800.000	

A formulação PL

$$\text{Max } Z = 90 x_1 + 120 x_2$$

sujeita a :

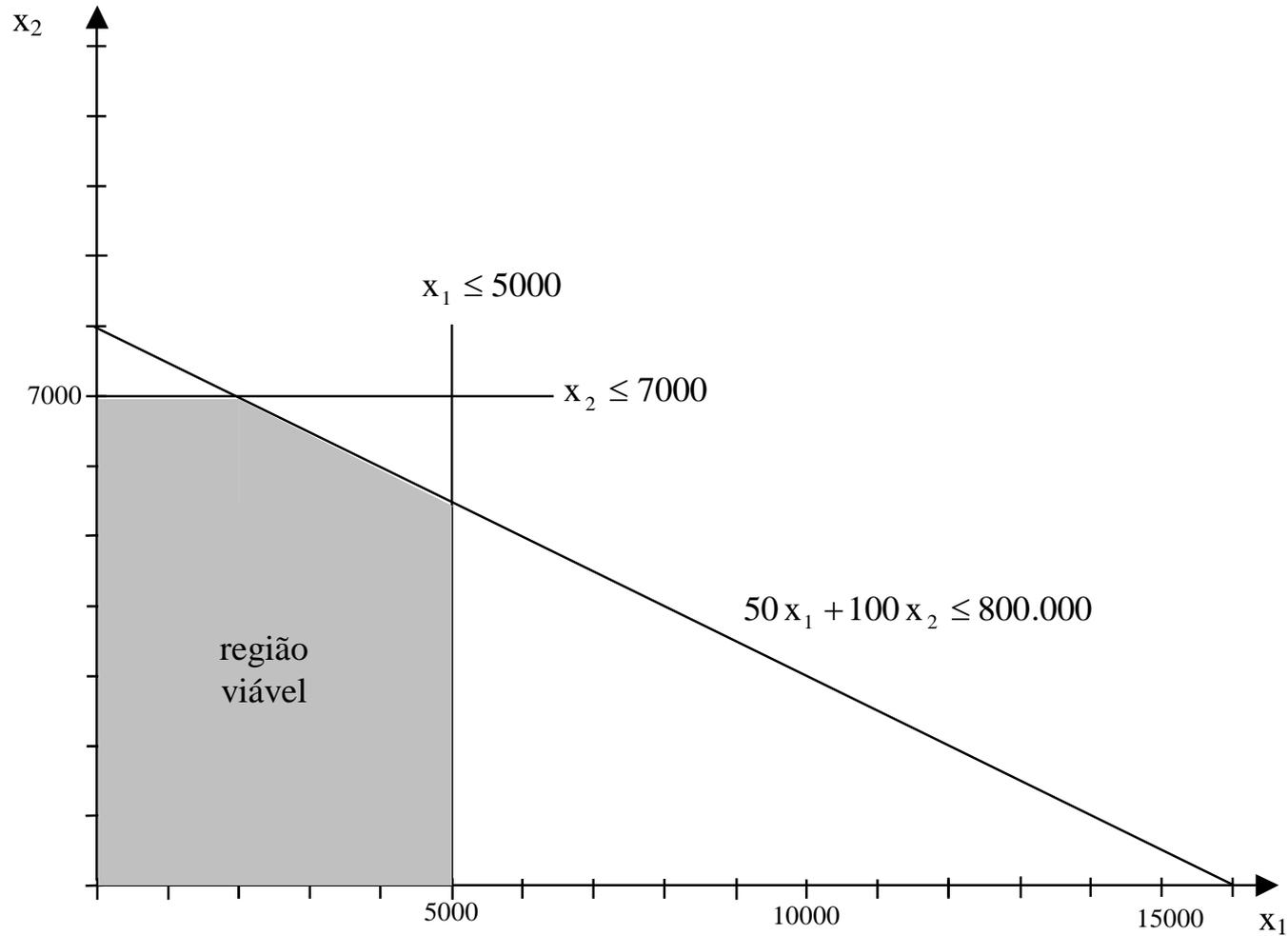
$$x_1 \leq 5000$$

$$x_2 \leq 7000$$

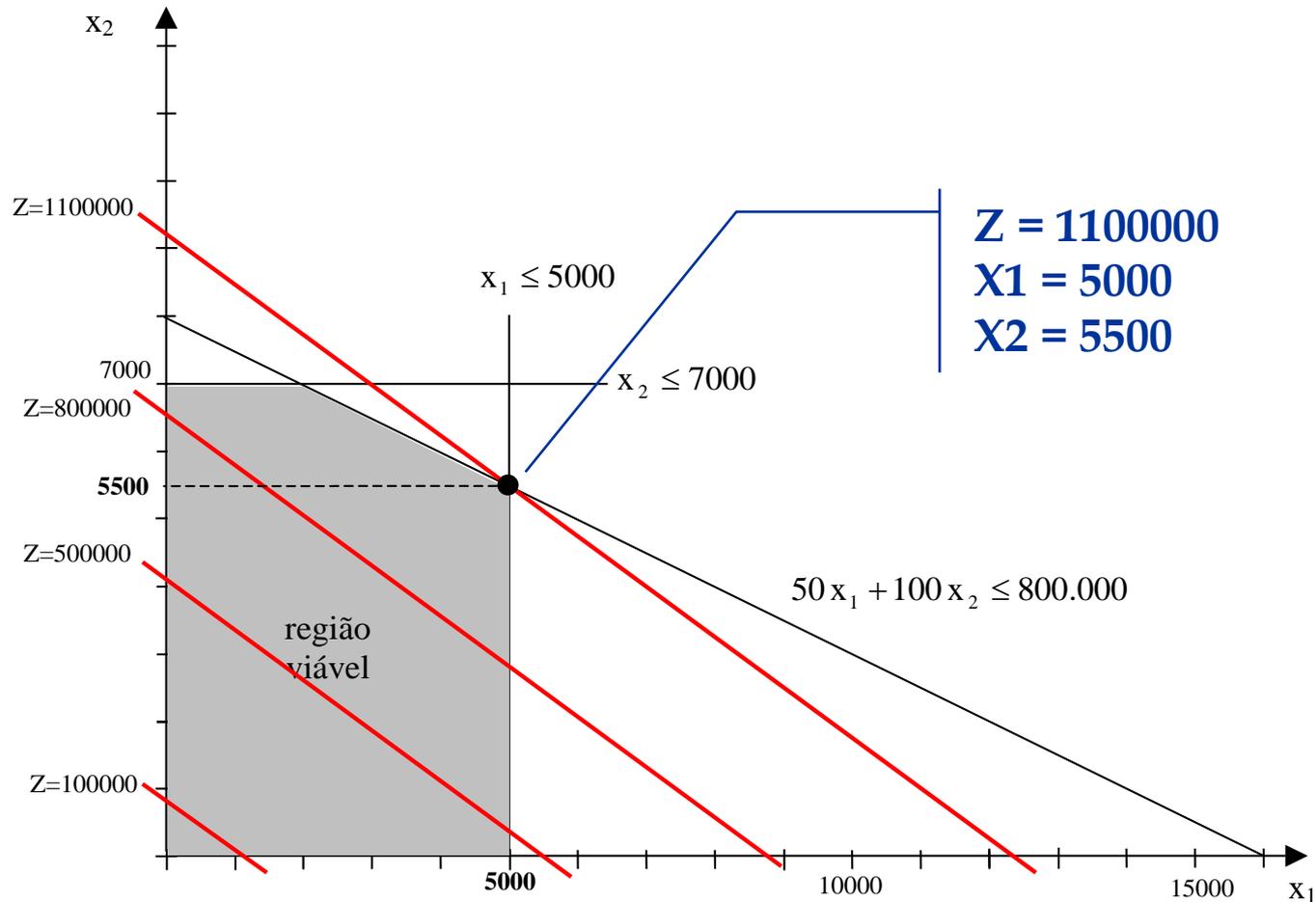
$$50 x_1 + 100 x_2 \leq 800.000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Interpretação Geométrica



Solução do Problema



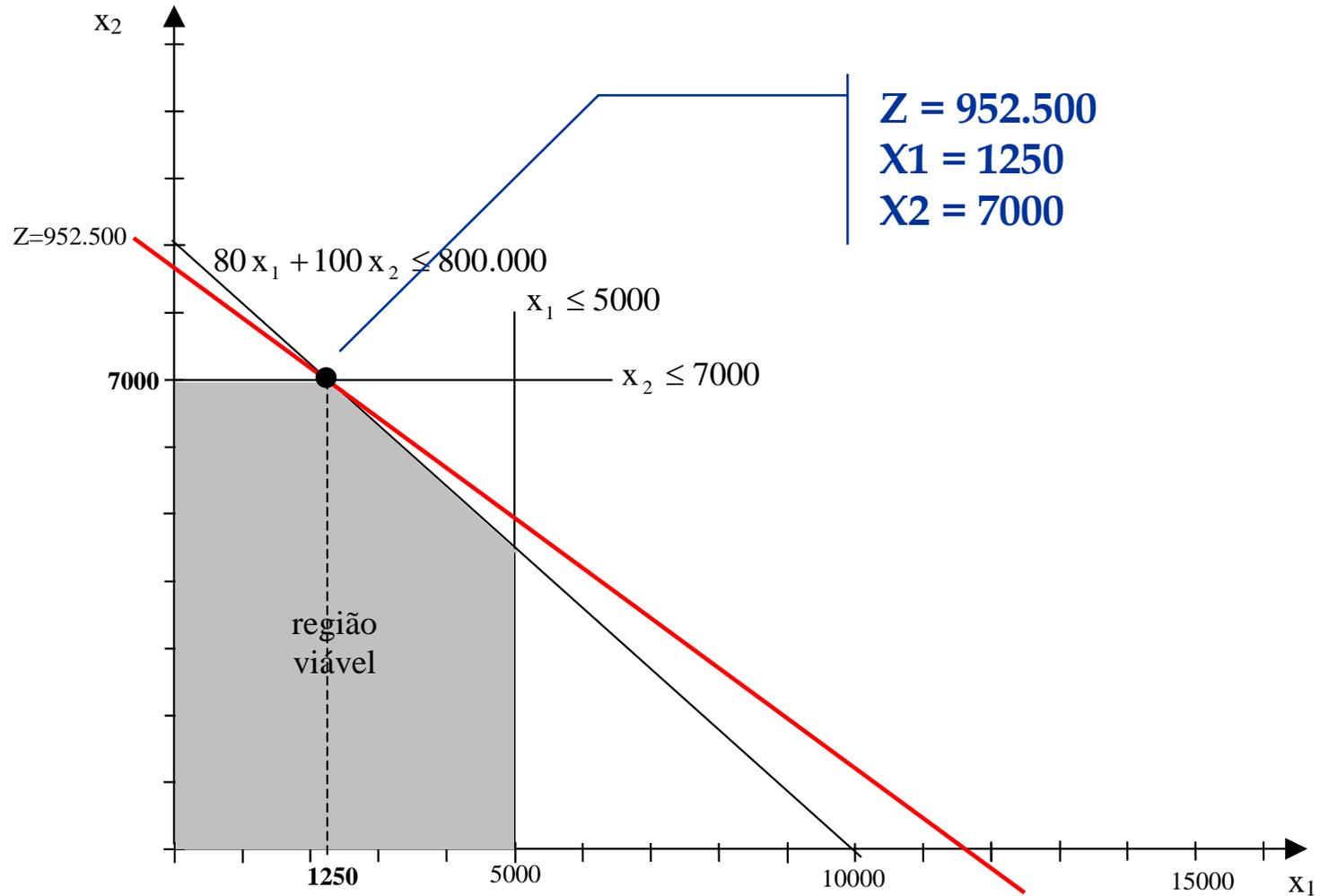
Análise

- A partir das figuras anteriores, observa-se que a solução ótima para o produtor é utilizar a capacidade máxima do gerador 1 ($x_1=5000$ MWh), que tem um custo de produção menor (50 R\$/MWh) e uma margem de lucro na venda maior (Margem = Tarifa de venda - Custo de produção). A produção do gerador 2 ($x_2=5500$ MWh) é menor que sua capacidade máxima (7000 MWh) devido à restrição de máximo custo de produção total (R\$ 800.000).

Análise

- O que ocorreria se o custo de produção do gerador 1 passasse de 50 R\$/MWh para 80 R\$/MWh ?

Nova solução



Análise

- Neste caso, embora o custo de produção do gerador 1 continue menor, a margem de lucro na venda da energia produzida pelo gerador 2 torna-se melhor (margem do gerador 1 igual a 10 R\$/MWh e contra 20 R\$/MWh do gerador 2). Neste caso, a melhor alternativa para o produtor é utilizar a capacidade máxima do gerador 2 ($x_2=7000$ MWh), e complementar sua produção com o gerador 1 ($x_1=1250$ MWh)

Solução do problema utilizando o SIMPLEX

Passo 1

Definir modelo equivalente, eliminando as desigualdades com a utilização de variáveis residuais.

$$\text{Max } Z = 90x_1 + 120x_2$$

$$s.a. \quad x_1 \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad = 5000$$

$$\quad \quad \quad x_2 \quad \quad \quad + x_4 \quad \quad \quad = 7000$$

$$50x_1 + 100x_2 \quad \quad \quad + x_5 = 800000$$

$$\text{com } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Passo 2

□ Determinar uma solução básica inicial:

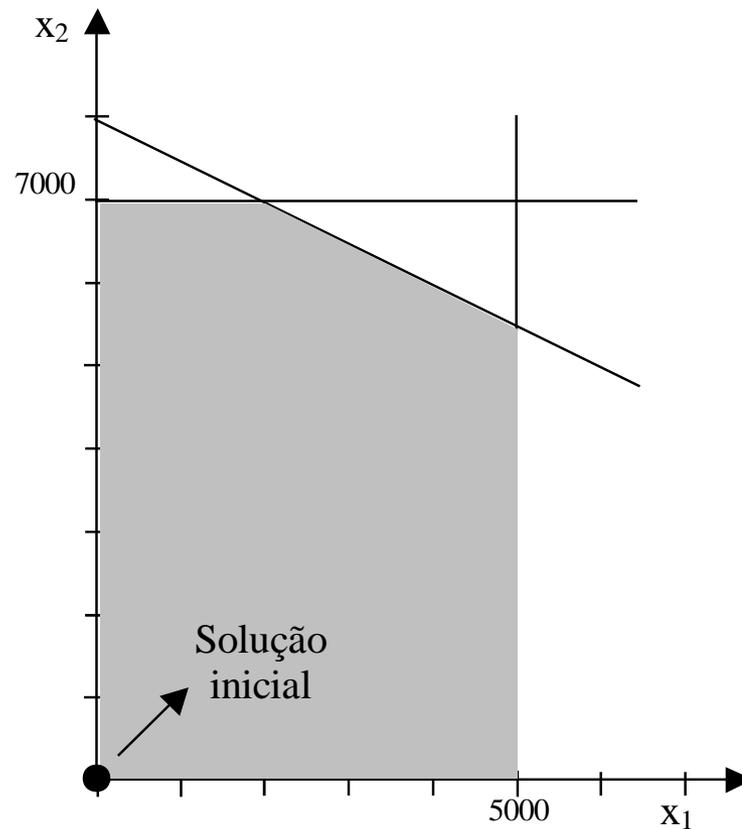
$$x_1 = x_2 = 0$$

$$x_3 = 5000$$

$$x_4 = 7000$$

$$x_5 = 800000$$

$$Z = 0$$



Passo 3

- Obter outra solução básica, ou concluir que a solução atual é a ótima. A nova solução deve ser uma outra solução básica correspondente a um vértice adjacente que aumente o valor da função Z. Esta solução é obtida trocando-se uma variável básica com uma não básica
- Analisando a função objetivo, a variável x_2 é escolhida para entrar na base, pois tem maior coeficiente (120 contra 90 de x_1).
- Para sair da base, é escolhida a variável x_4 , pois é a que mais limita o aumento da variável que vai entrar na base (x_2), ou seja:

$$x_1 + x_3 = 5000$$

→ sem limite para x_2

$$x_2 + x_4 = 7000$$

→ $x_2 = 7000 / 1 = 7000$ (sai x_4)

$$50x_1 + 100x_2 + x_5 = 800000$$

→ $x_2 = 800000 / 100 = 8000$ (sai x_5)

Passo 4

- Determinar os novos valores das outras variáveis básicas (x_3 e x_5), utilizando manipulação algébrica das equações (cada variável básica deve aparecer em uma única equação, e cada equação deve conter somente uma variável básica):

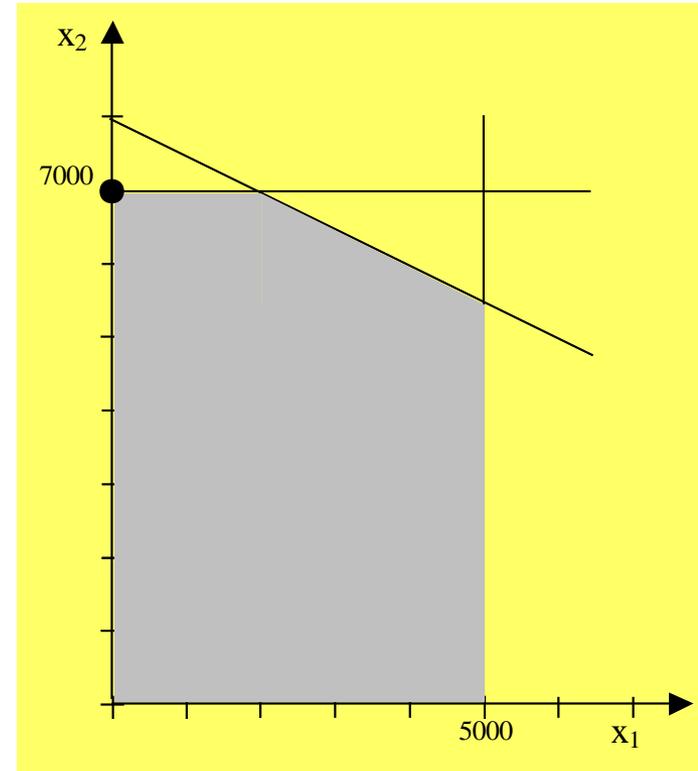
$$\begin{aligned}
 Z - 90x_1 - 120x_2 &= 0 \\
 x_1 + x_3 &= 5000 \\
 x_2 + x_4 &= 7000 \quad \Leftarrow \text{Linha Pivô} \\
 50x_1 + 100x_2 + x_5 &= 800000
 \end{aligned}$$

$$(x_1 = x_2 = 0, x_3 = 5000, x_4 = 7000, x_5 = 800000, Z = 0)$$

⇓

$$\begin{aligned}
 Z - 90x_1 + 120x_4 &= 840000 \\
 x_1 + x_3 &= 5000 \\
 x_2 + x_4 &= 7000 \\
 50x_1 - 100x_4 + x_5 &= 100000
 \end{aligned}$$

$$(x_1 = x_4 = 0, x_2 = 7000, x_3 = 5000, x_5 = 100000, Z = 840000)$$



Passo 5

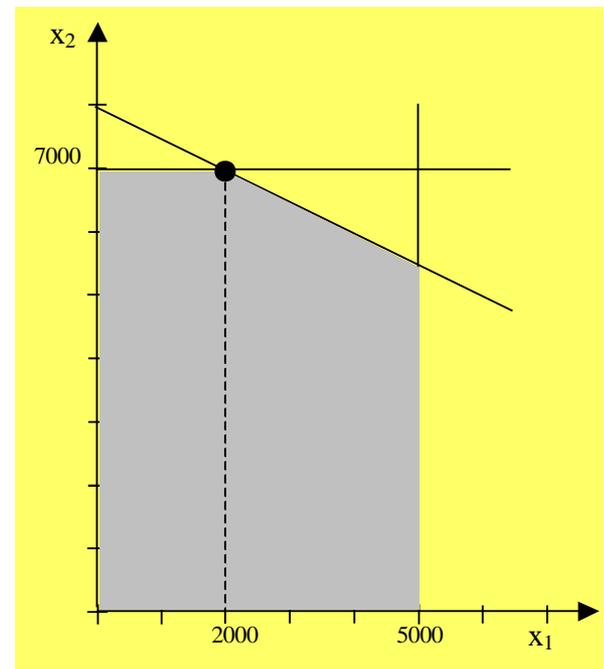
- Verificar se a solução é a ótima, verificando a equação correspondente à função objetivo a ser maximizada:

$$Z = 840000 + 90x_1 - 120x_4$$

- Como o valor atual de x_1 é zero, se esta variável entrar na base (aumentar seu valor) a função objetivo terá seu valor aumentado.
- Repetindo-se os passos 3 e 4, obtém-se nova solução (x_1 entra na base e x_5 sai):

$$\begin{array}{rcll} Z & -60x_4 + & 1,8x_5 & = 1020000 \\ & x_3 & + 2x_4 - 0,02x_5 & = 3000 \\ & x_2 & + x_4 & = 7000 \\ & x_1 & - 2x_4 + 0,02x_5 & = 2000 \end{array}$$

$$(x_1 = 2000, x_2 = 7000, x_3 = 3000, x_4 = x_5 = 0, Z = 1020000)$$



□ **Analisando novamente a função objetivo:**

$$Z = 1020000 + 60x_4 - 1,8x_5$$

verifica-se que x_4 deve entrar na base, e pelas equações das restrições, x_3 deve sair, resultando:

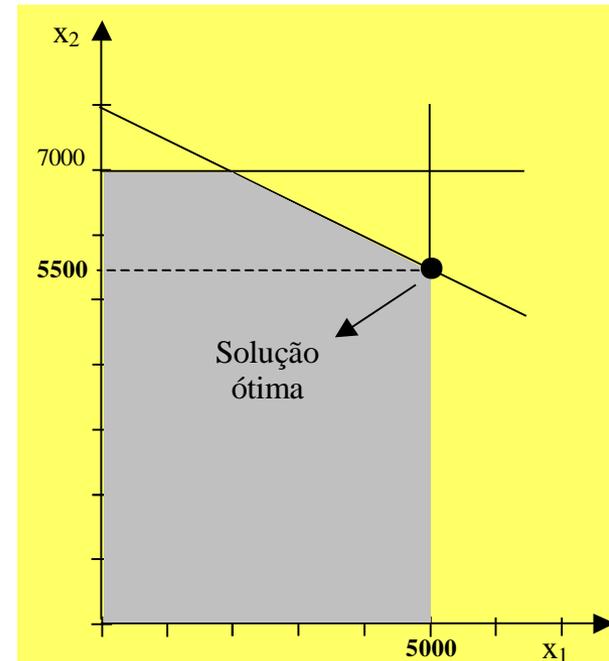
$$Z \quad + 30x_3 \quad + 1,2x_5 = 1110000$$

$$x_3 + 2x_4 - 0,02x_5 = 3000$$

$$x_2 - 0,5x_3 + 0,01x_5 = 5500$$

$$x_1 + x_3 = 5000$$

$$(x_3 = x_5 = 0, x_1 = 5000, x_2 = 5500, x_4 = 1500, Z = 1110000)$$



Análise

$$Z = 1110000 - 30x_3 - 1,2x_5$$

- verifica-se que qualquer aumento de x_3 ou x_5 (valores atuais $x_3 = x_5 = 0$) irá reduzir o valor da função objetivo, e portanto conclui-se que a solução atual é a solução ótima, ou seja:

$$Z = 1110000$$

$$x_1 = 5000$$

$$x_2 = 5500$$