

SEM0501

Dinâmica Aplicada às Máquinas

Aula #4: Movimento curvilíneo:
componentes normal,
tangencial, e cilíndricos

Laboratório de Controle de Robôs

Prof. Dr. Thiago Boaventura

tboaventura@usp.br

São Carlos, 13/08/19



Conteúdo

- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- Exemplo

Comp. Normal e
Tangencial

- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- Exemplo

Componentes
Cilíndricas



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

Conclusão

Conteúdo

- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- Exemplo

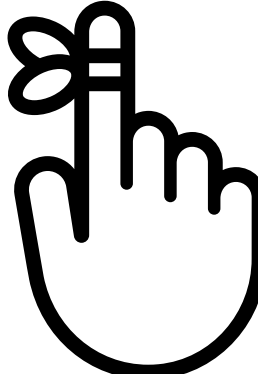
Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

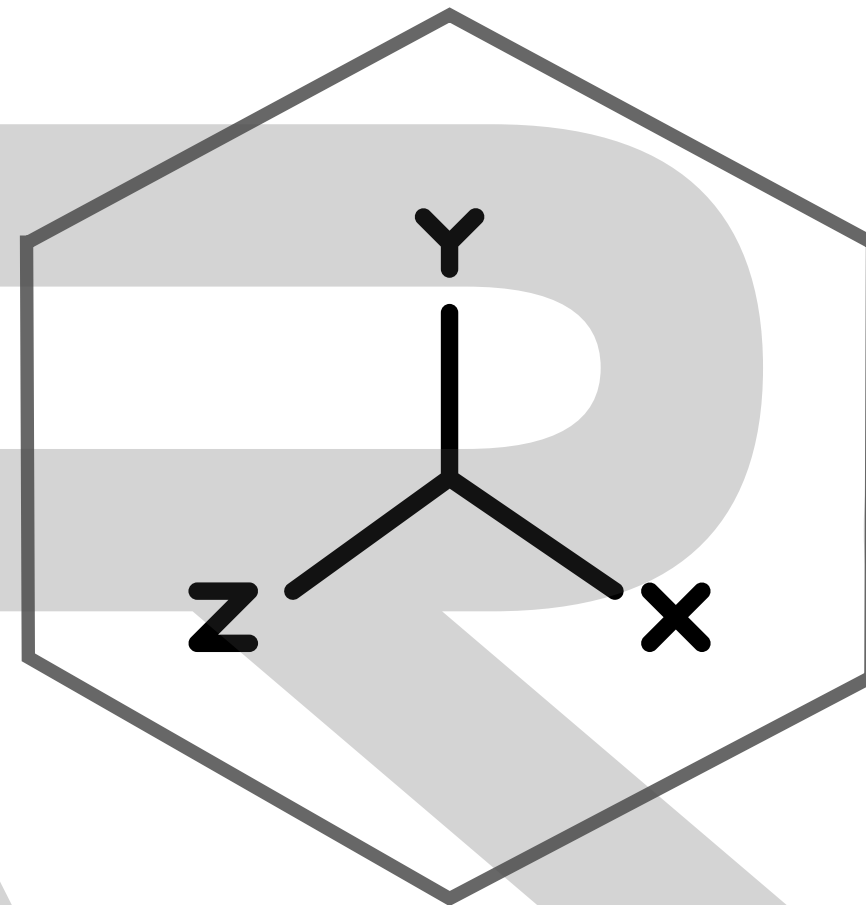
ARCLab

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

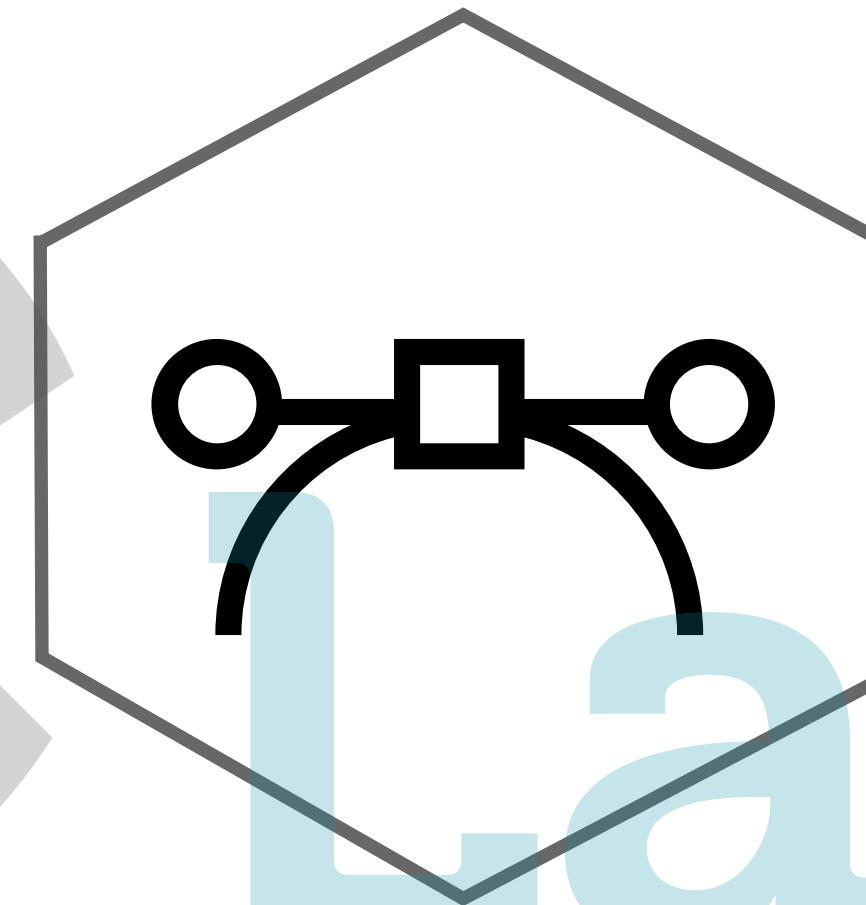
 aula passada...



Movimento em
voo livre segue
uma trajetória
parabólica



Movimento **curvilíneo**
pode ser decomposto
em movimento
retilíneo ao longo
dos eixos **x, y, z**

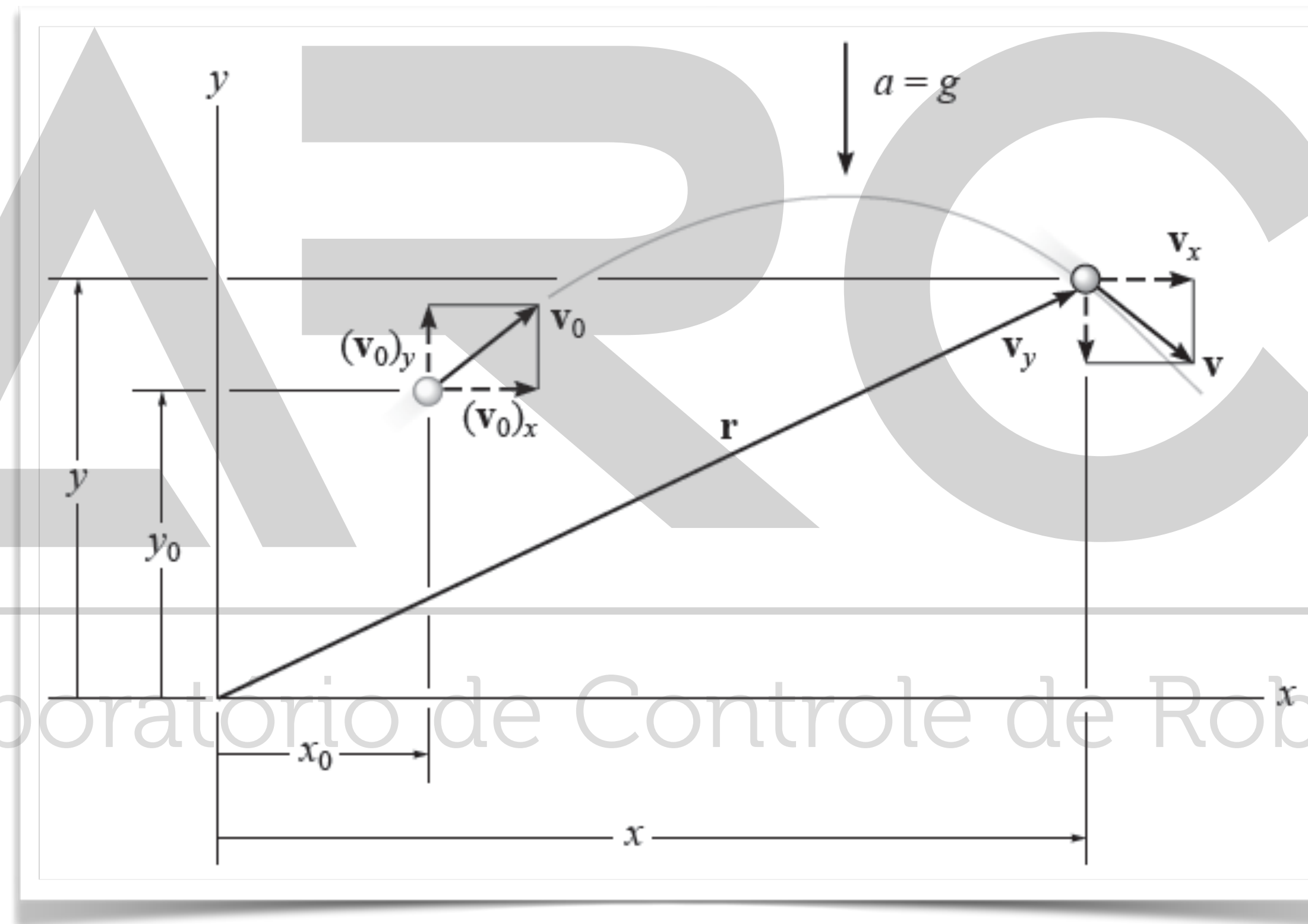


Velocidade é
tangente à
trajetória e
aceleração à
hodógrafa

👉 aula passada...




Movimento em
voo livre segue
uma trajetória
parabólica



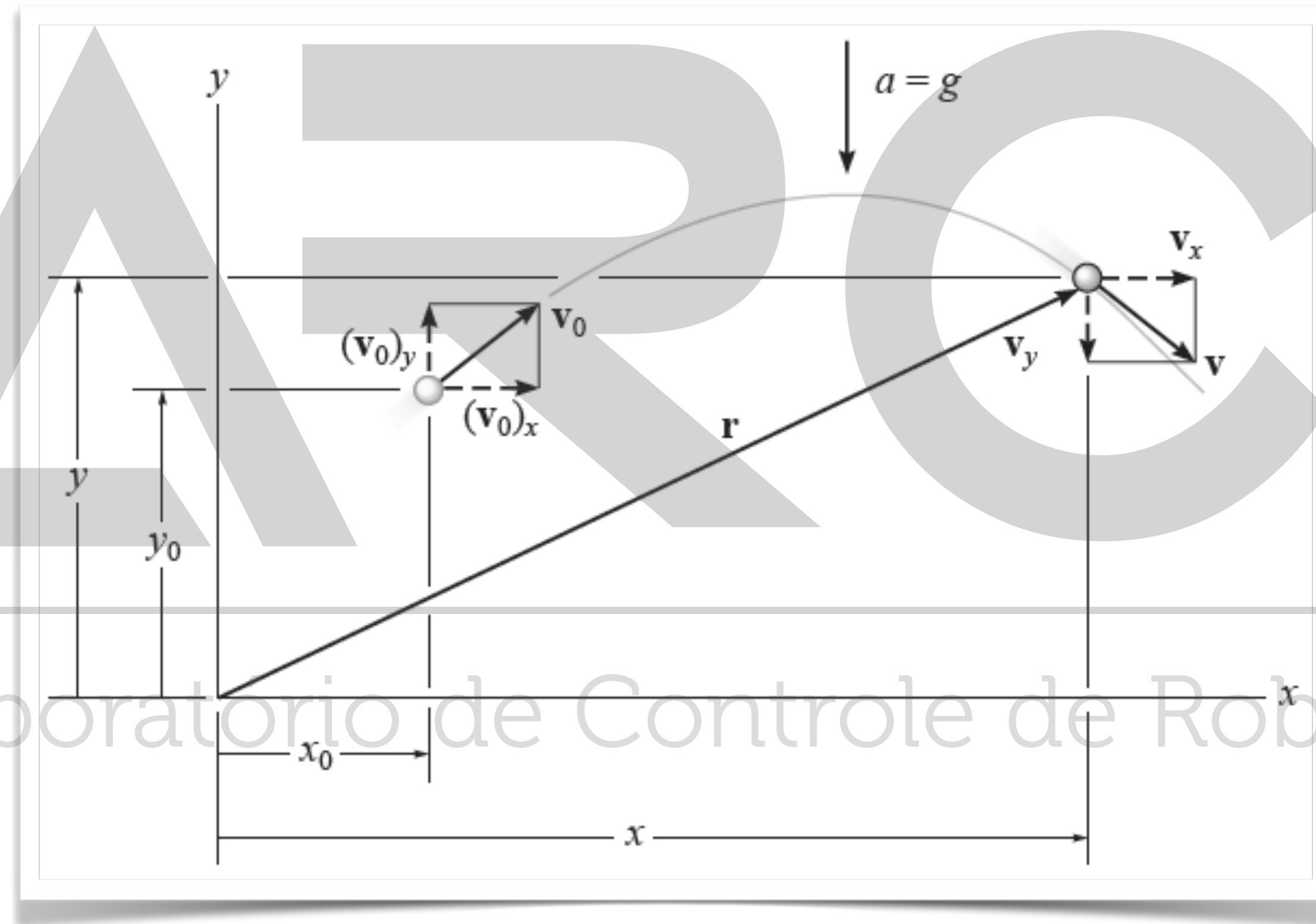
~~Resistência
do ar~~

Peso

 aula passada...



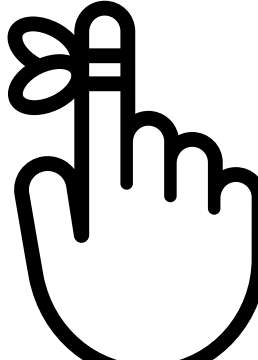
Movimento em
voo livre segue
uma trajetória
parabólica



$$a_x = 0$$

$$a_y = -g$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

 aula passada...



Movimento em
voo livre segue
uma trajetória
parabólica

$(\pm \rightarrow)$

$$v = v_0 + a_c t;$$

$$v_x = (v_0)_x$$

$(\pm \rightarrow)$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$$

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

$(\pm \rightarrow)$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c (x - x_0);$$

$$v_x = (v_0)_x$$

$(+\uparrow)$

$$v = v_0 + a_c t;$$

$$v_y = (v_0)_y - gt$$

$(+\uparrow)$

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_c t^2;$$

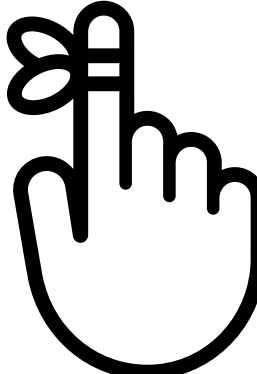
$$y = y_0 + (v_0)_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

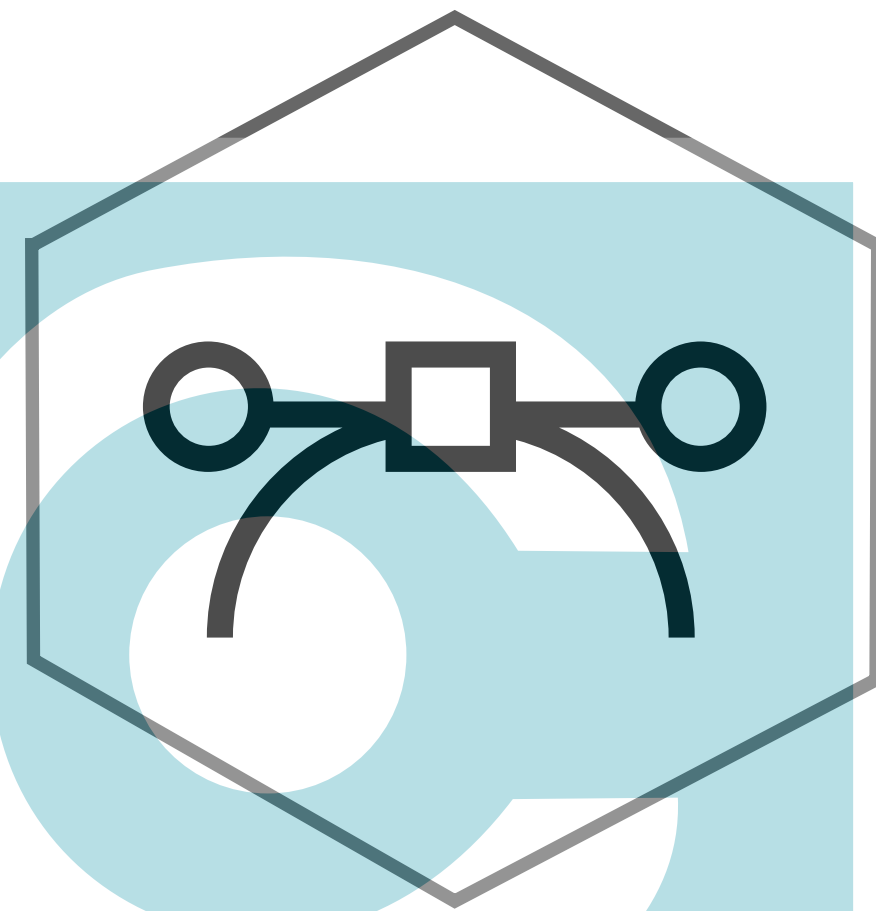
$(+\uparrow)$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_c (y - y_0);$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

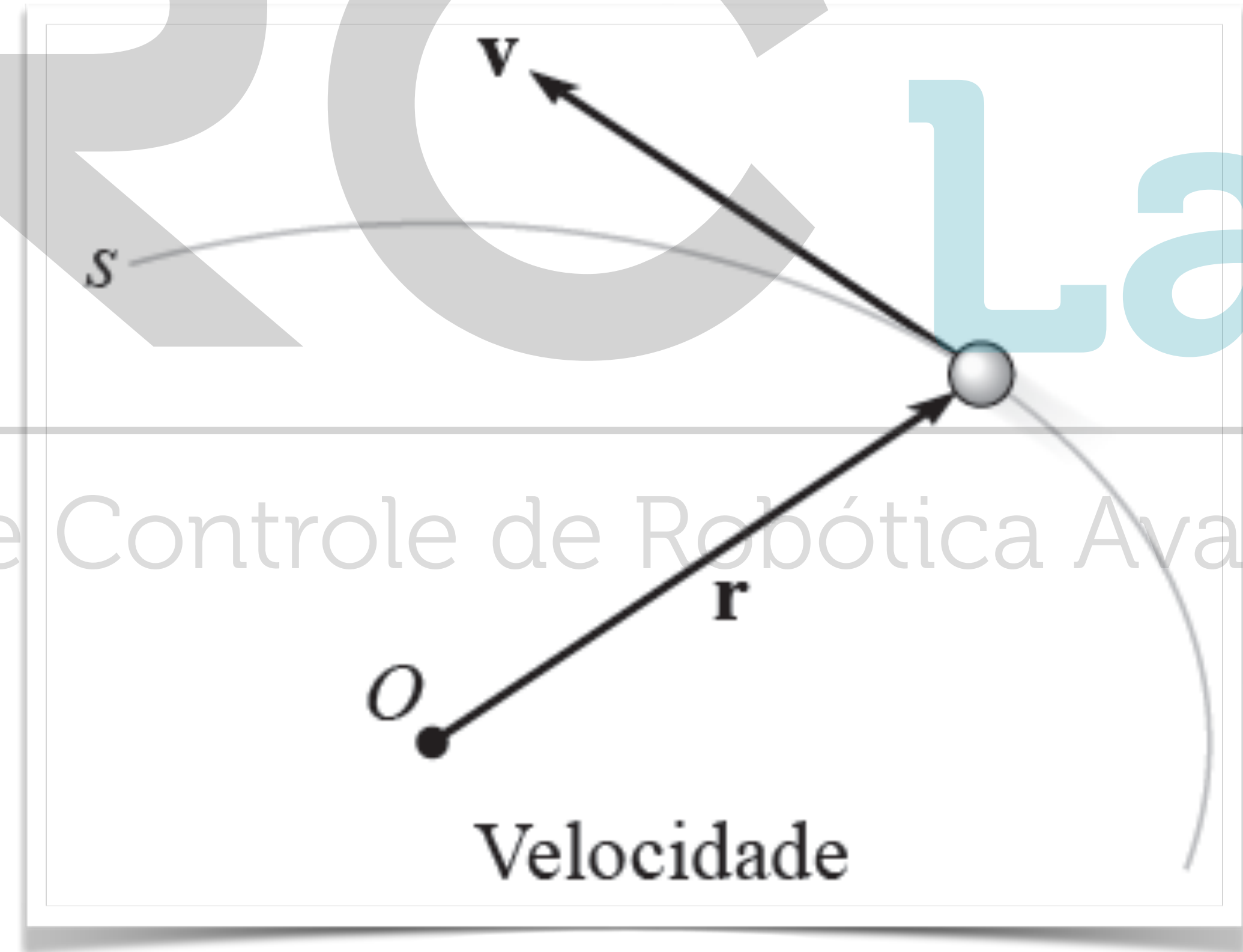
3 equações independentes

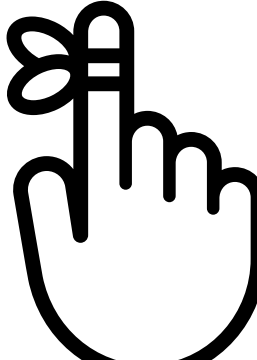
 aula passada...



Velocidade é
tangente à
trajetória e
aceleração à
hodógrafa

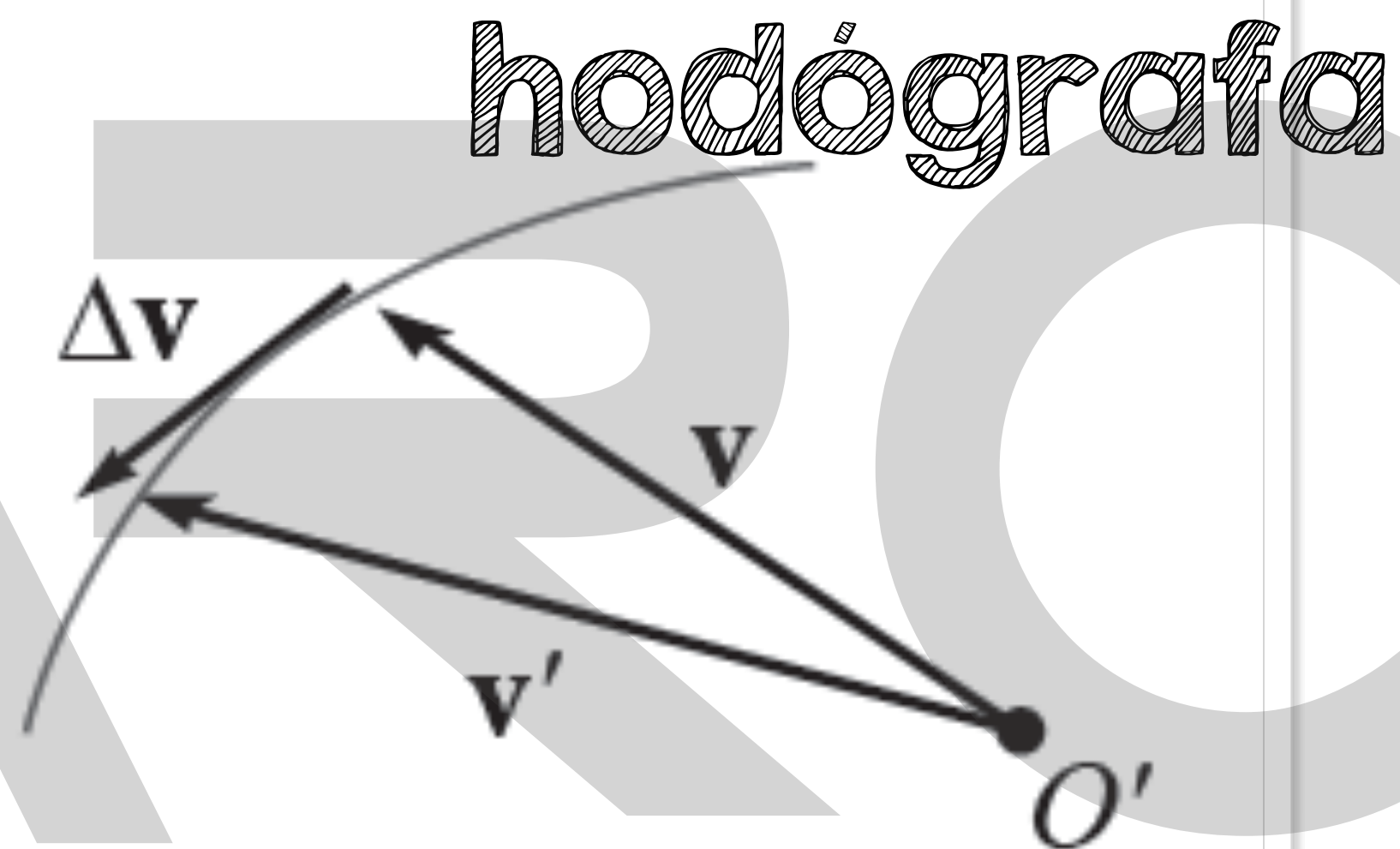
tangente à curva



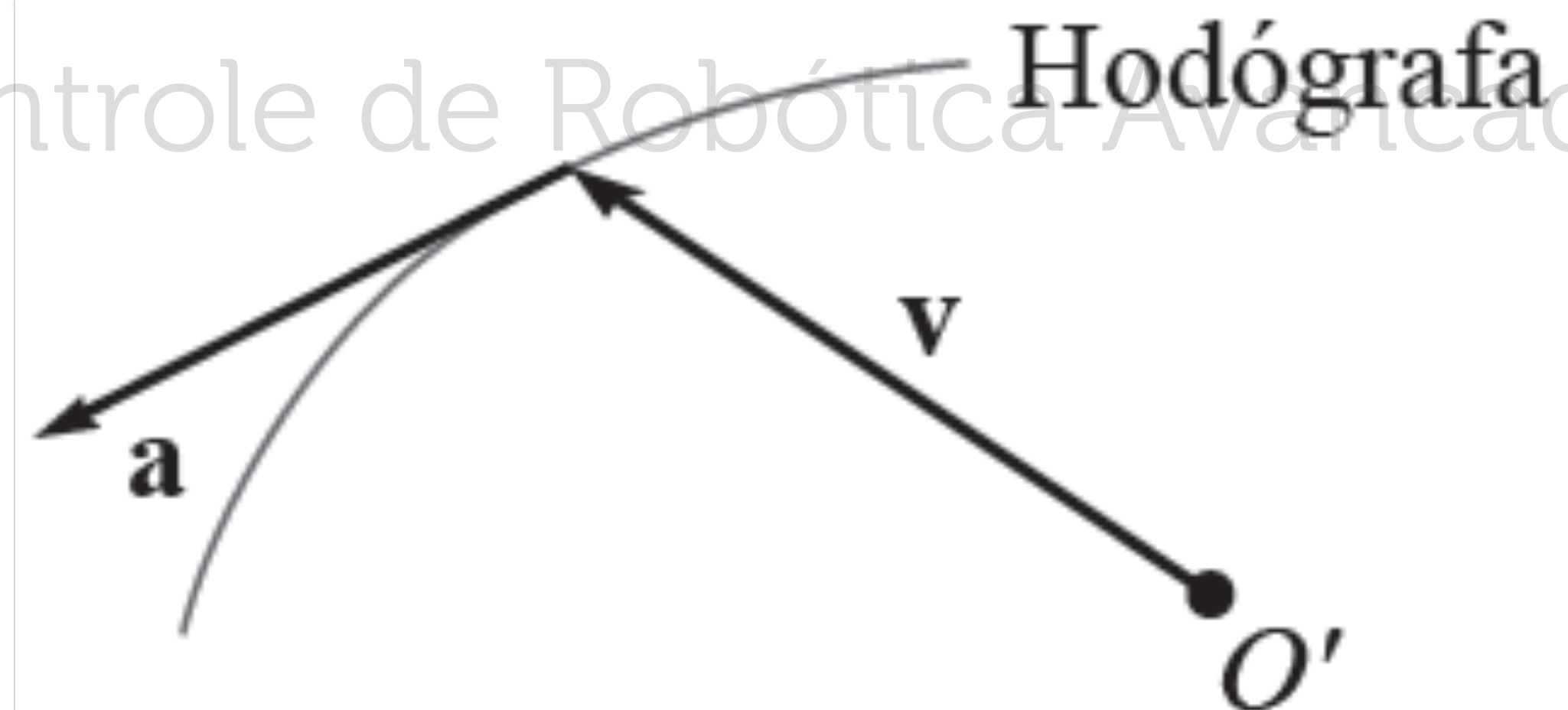
 aula passada...

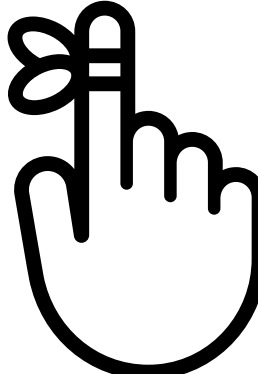


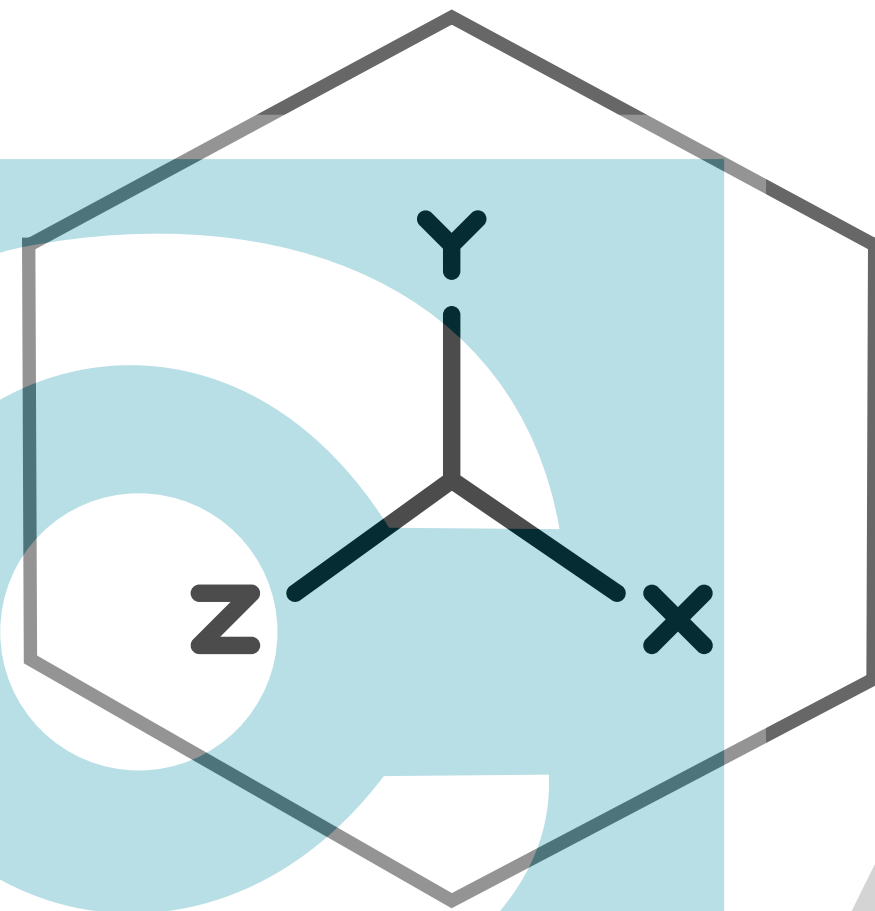
Velocidade é
**tangente à
trajetória** e
aceleração à
hodógrafa



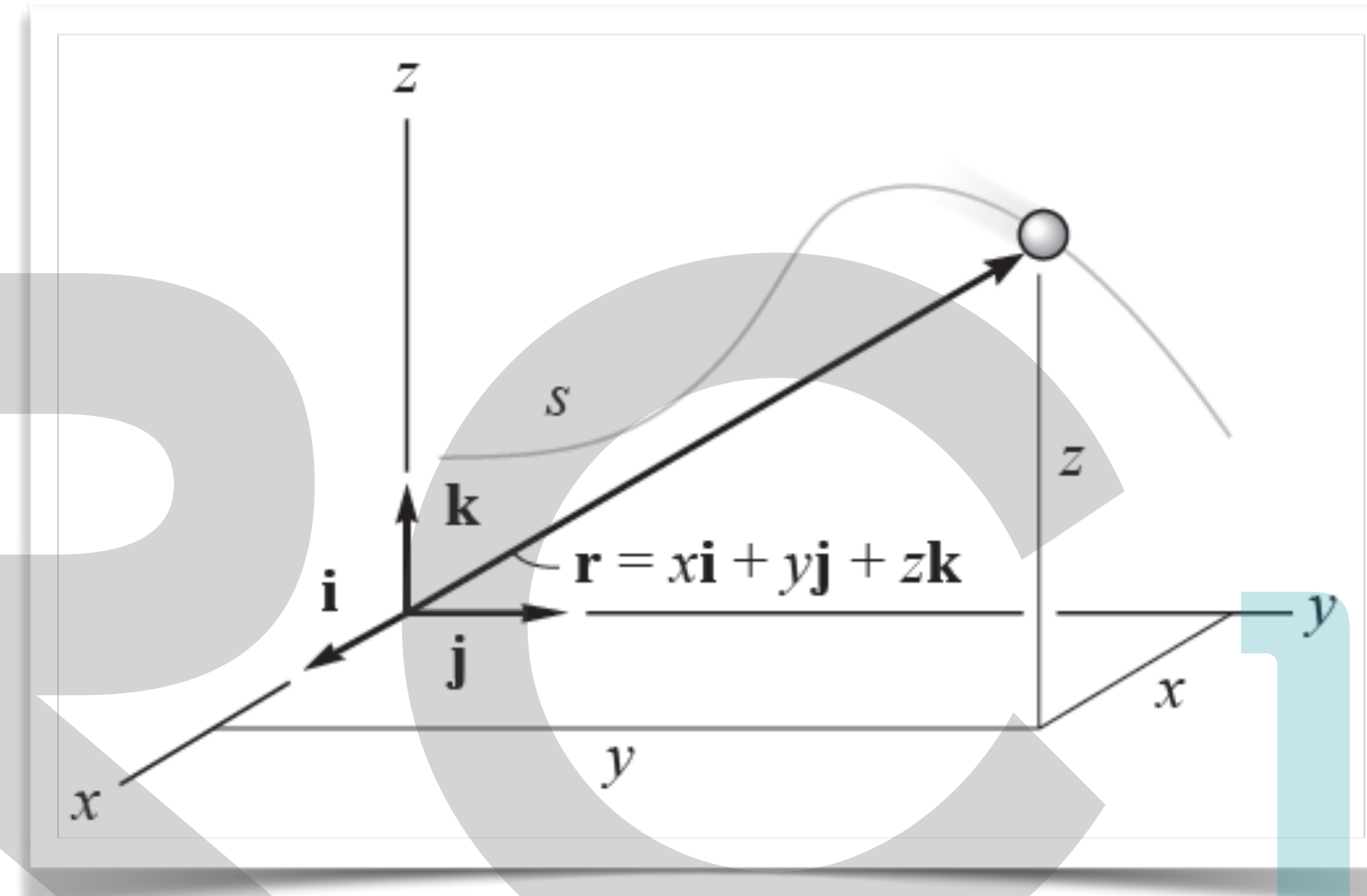
**tangente à
hodógrafa**



 aula passada...



Movimento **curvilíneo**
pode ser decomposto
em movimento
retilíneo ao longo
dos eixos **x, y, z**



$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

Conteúdo

- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- Exemplo

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

ARC Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Movimento curvilíneo em prática

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



Lab

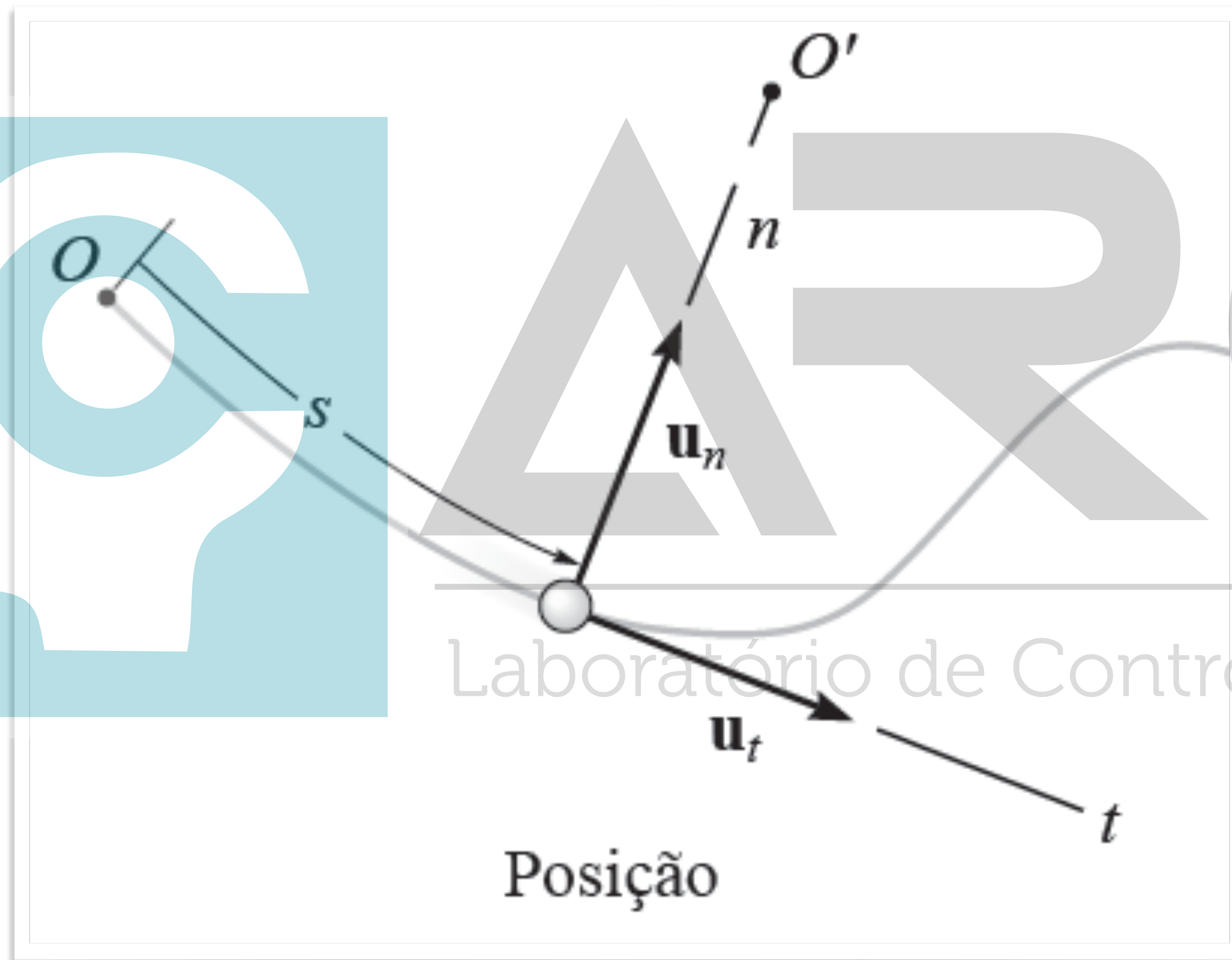
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Movimento plano

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



trajetória
conhecida

origem na
partícula

Eixo normal

Comp. Normal e
Tangencial

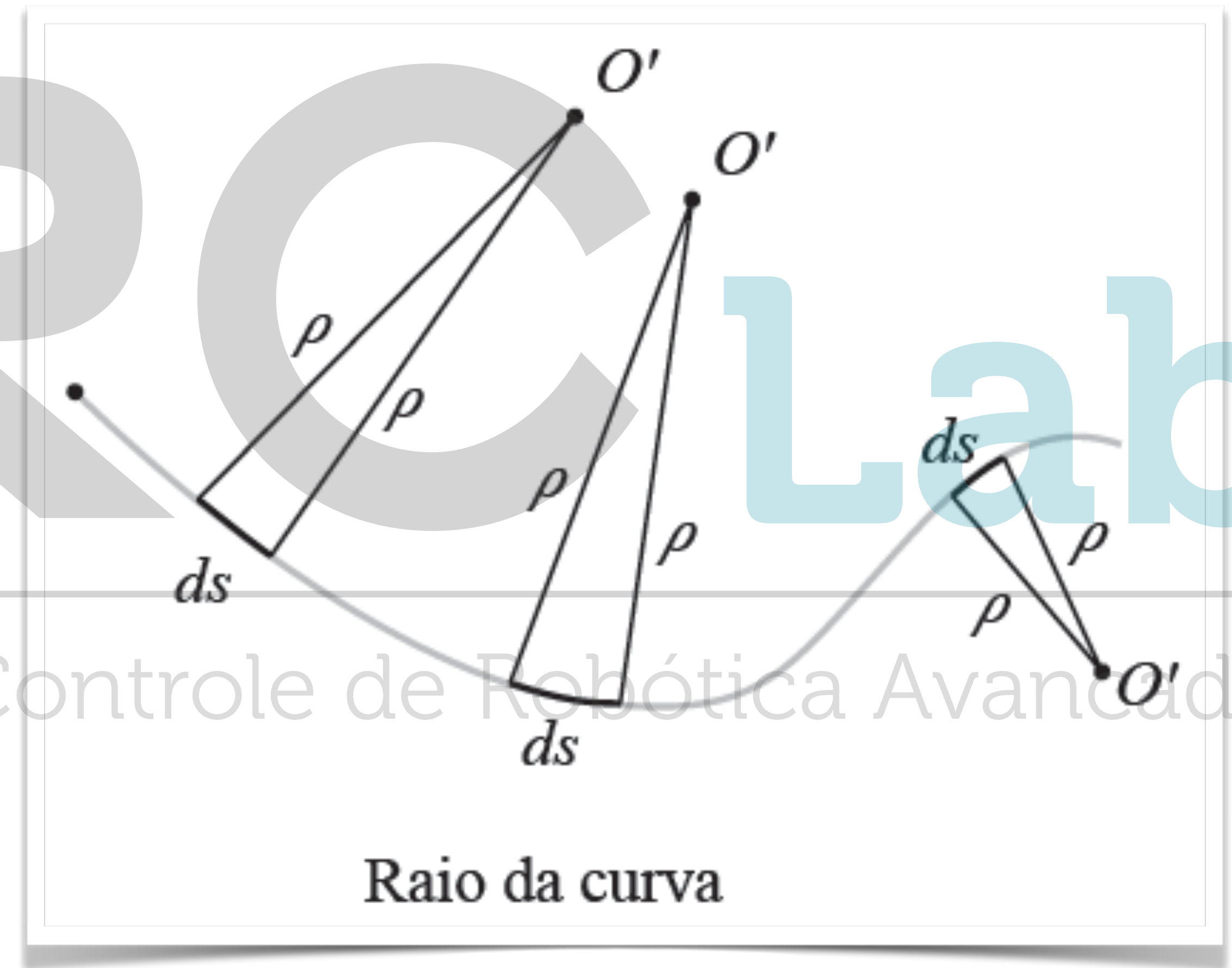
Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Raio de
curvatura ρ

Centro de
curvatura O'

Sempre do lado côncavo da curva

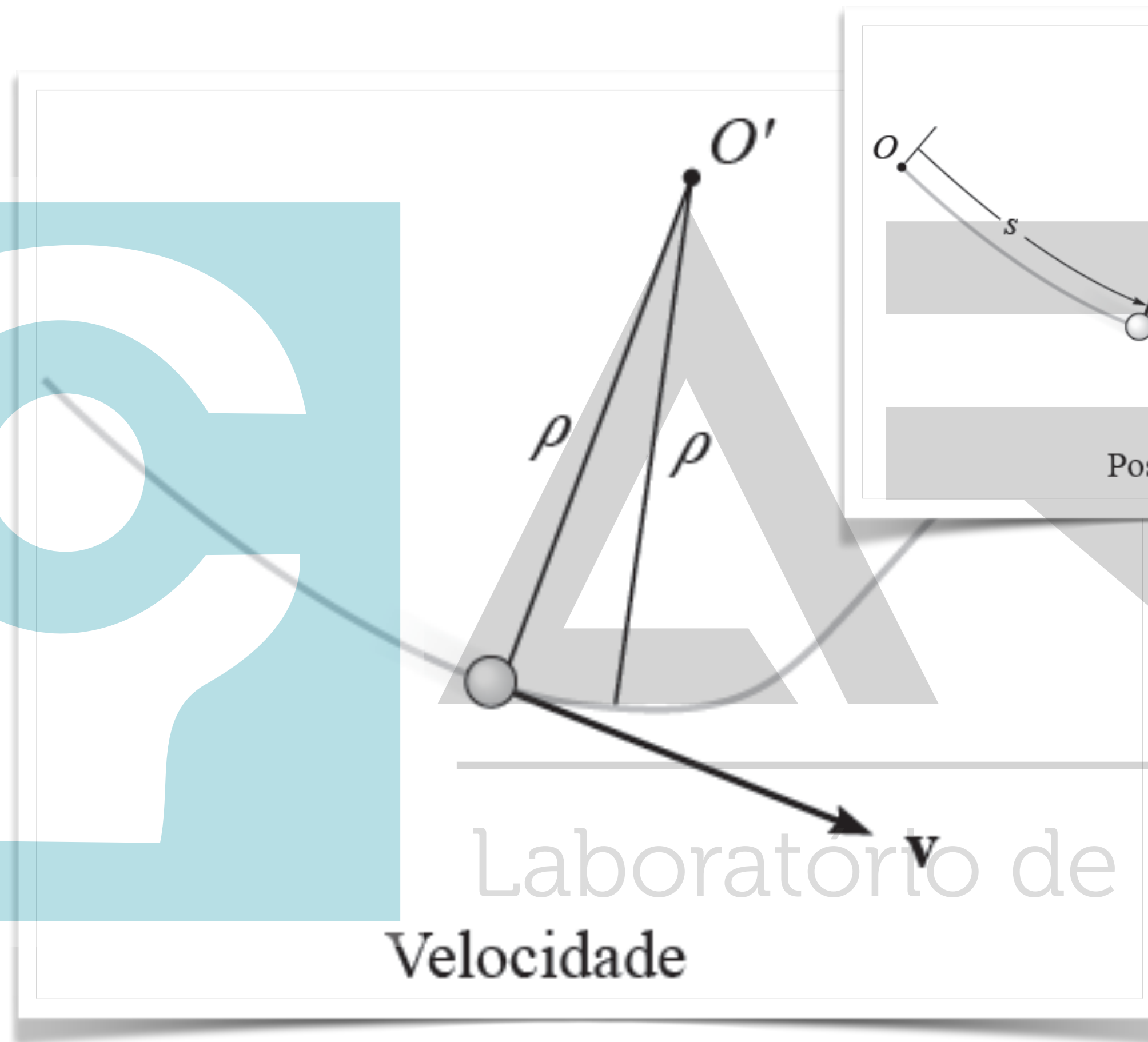


Velocidade

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

Direção sempre tangente à trajetória

Aceleração

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$$

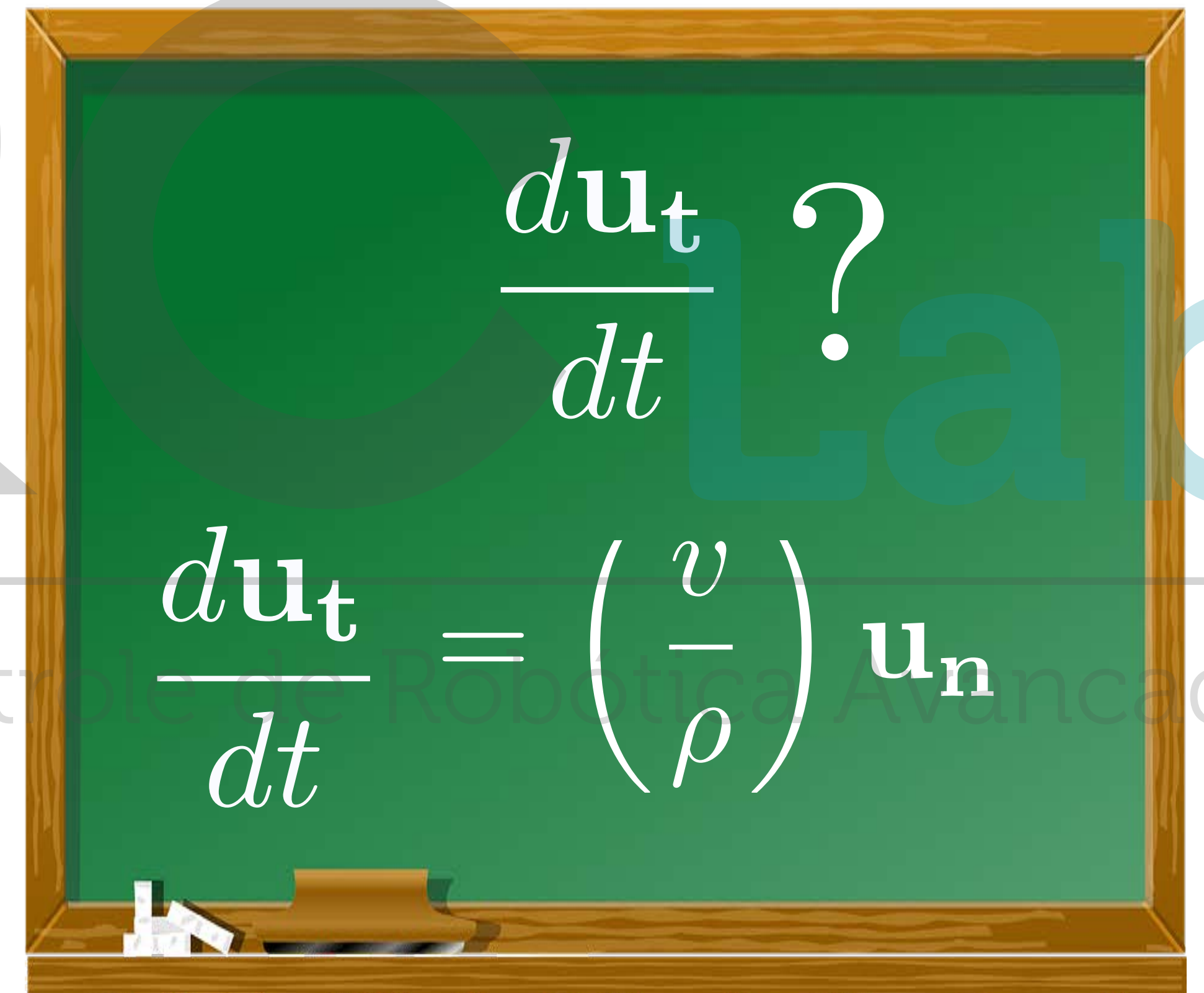
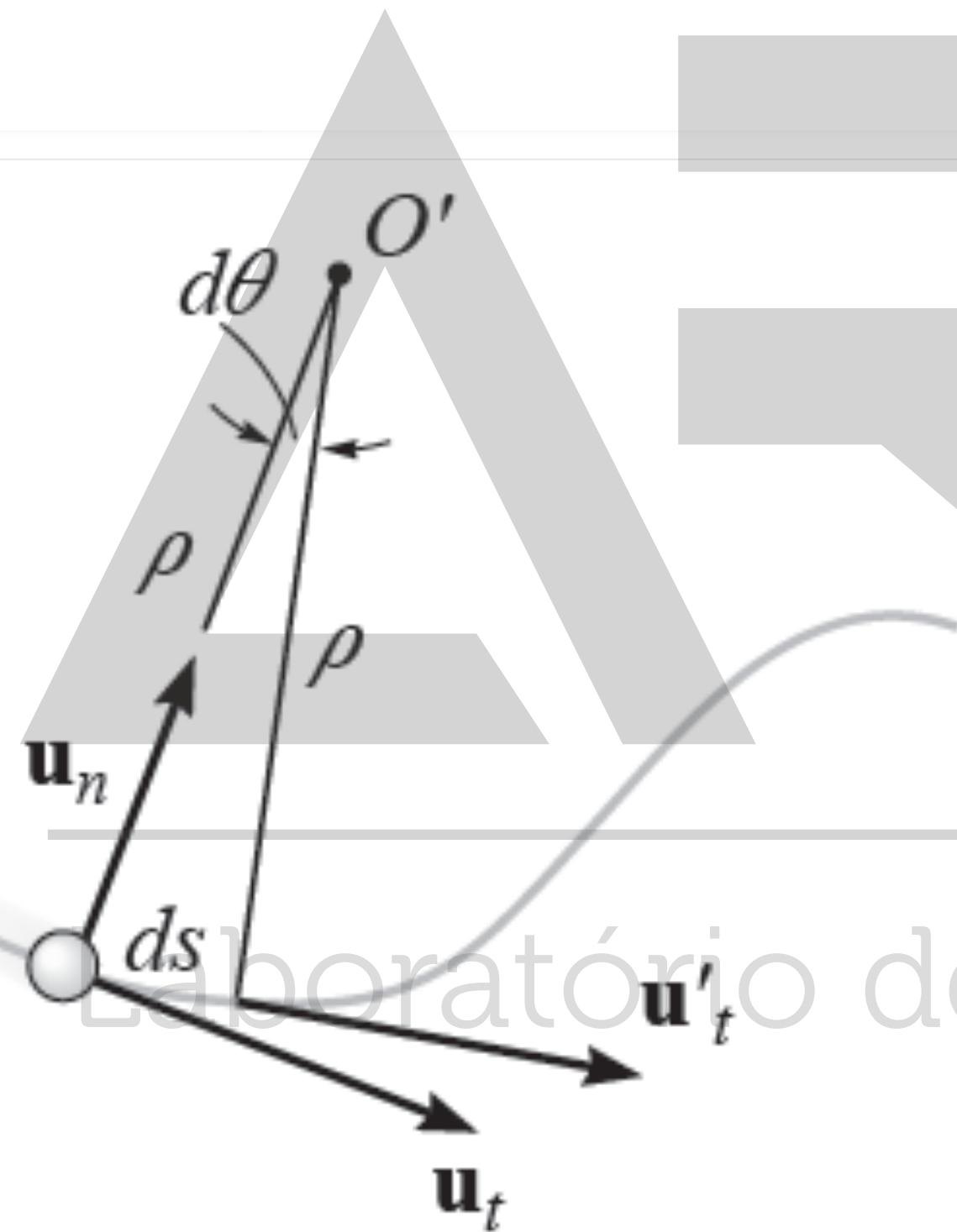
$$\mathbf{v} = v \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{u}_t + v \dot{\mathbf{u}}_t$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Aceleração

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$



Direção varia, magnitude constante

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Aceleração

Comp. Normal e
Tangencial

$$\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{u}_t + v \dot{\mathbf{u}}_t$$

$$d\mathbf{u}_t = \left(\frac{v}{\rho} \right) \mathbf{u}_n$$

Componentes
Cilíndricas

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

$$a \, ds = v \, dv$$

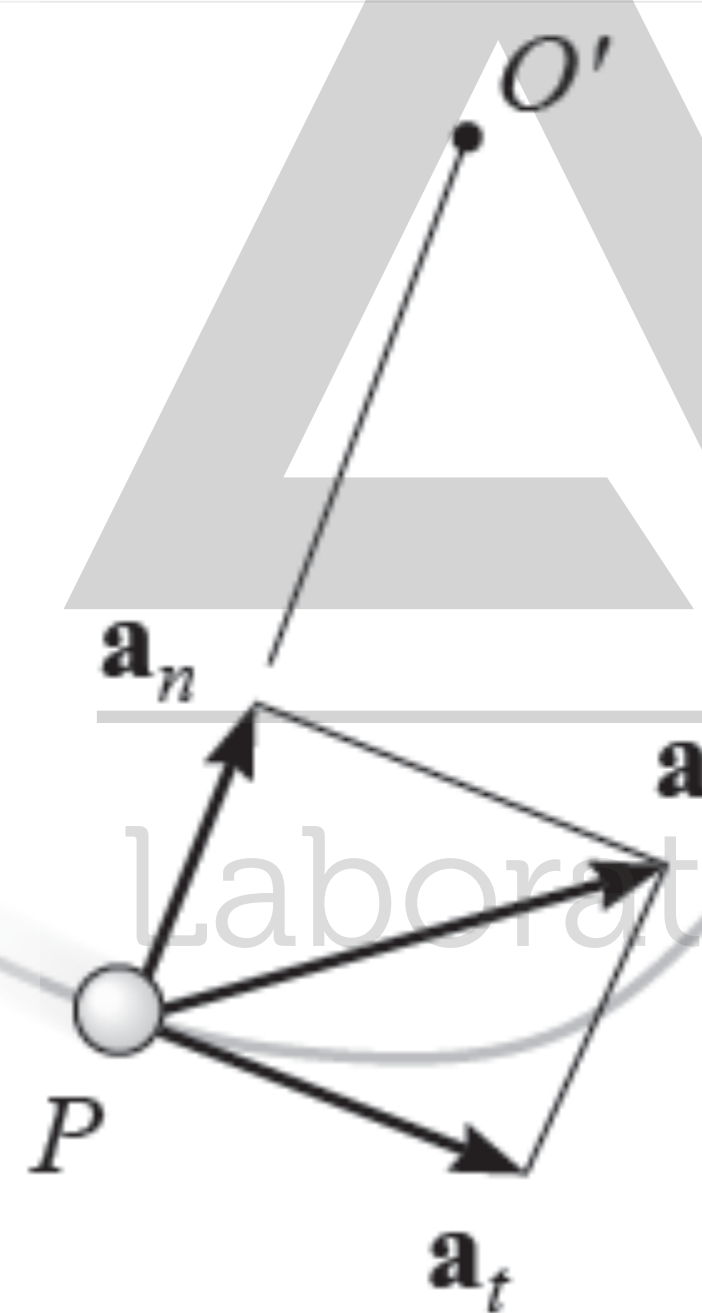
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Conclusão

Aceleração

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

Intensidade?



Aceleração

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Aceleração — Casos particulares

Comp. Normal e
Tangencial

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Componentes
Cilíndricas

Movimento retilíneo:

$$\rho = \infty \quad a = a_t = \dot{v}$$

Lab

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Componente **tangencial** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **intensidade** da velocidade

Conclusão

Aceleração — Casos particulares

Comp. Normal e Tangencial

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{u}_t + a_n \mathbf{u}_n$$

$$a_t = \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Velocidade escalar constante: $a = a_n = \frac{v^2}{\rho}$
 $\dot{v} = 0$

Componentes Cilíndricas

Componente **normal** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **direção** da velocidade

aceleração centrípeta

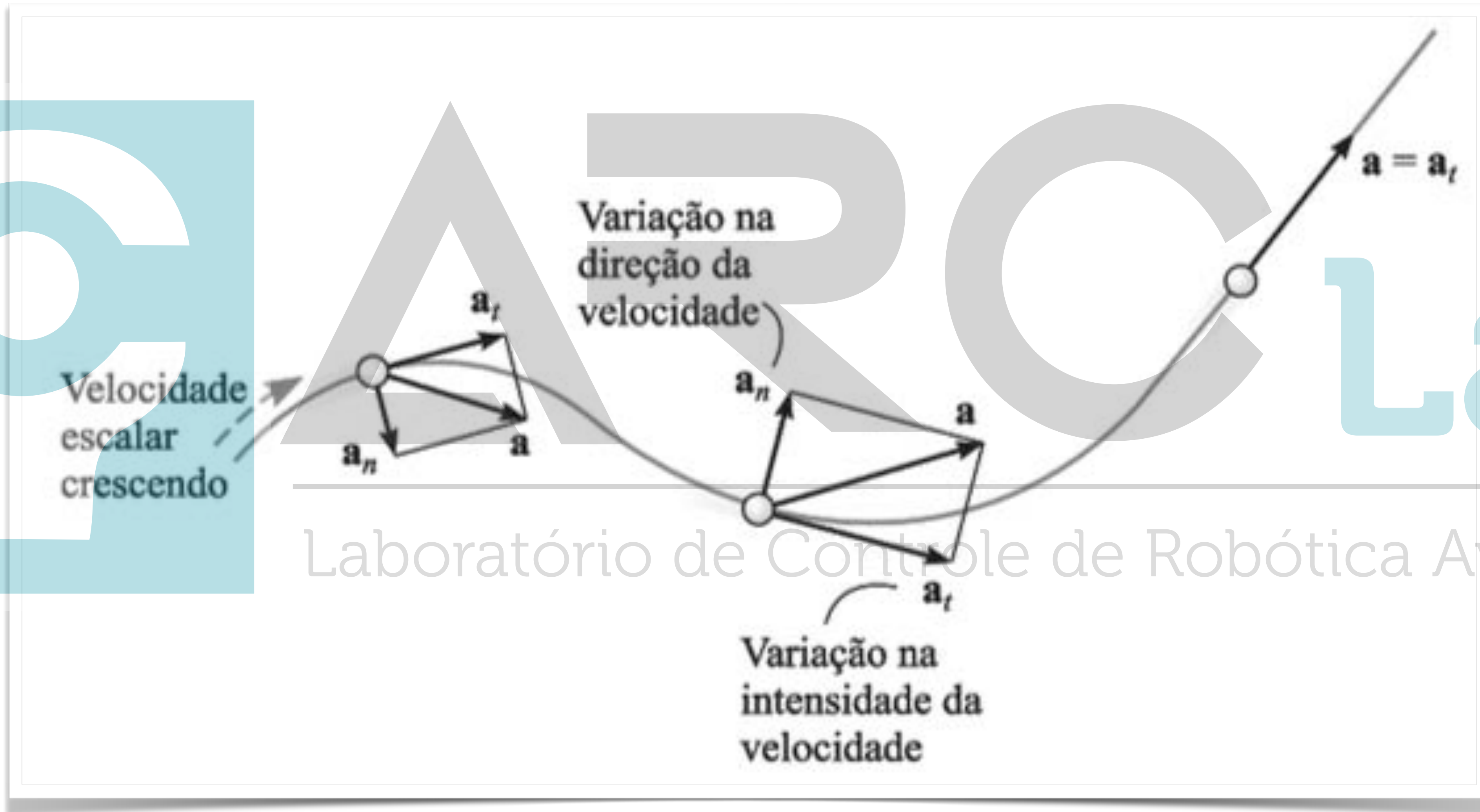
Conclusão

Aceleração

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avançada

Conteúdo

- Aula passada...
- Componentes normal e tangencial
- **Exemplo**

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

ARC Lab

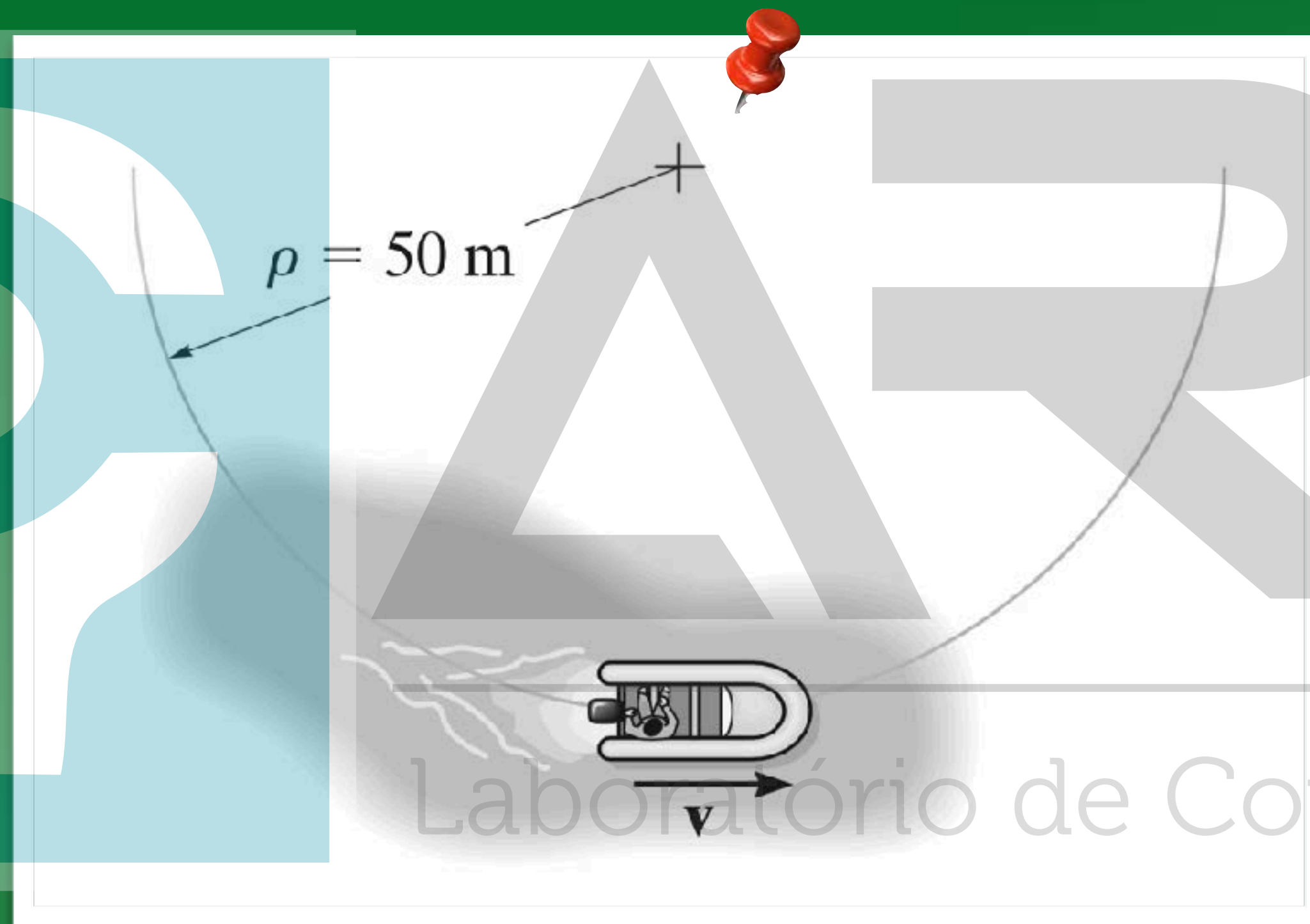
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

Problema 12.117

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



$$v = 0,8t$$

$$|\mathbf{v}| = ?$$

$$|\mathbf{a}| = ?$$

para $\Delta S = 20 \text{ m}$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial

- **Coordenadas polares**
- Coordenadas cilíndricas
- Exemplo

Componentes
Cilíndricas

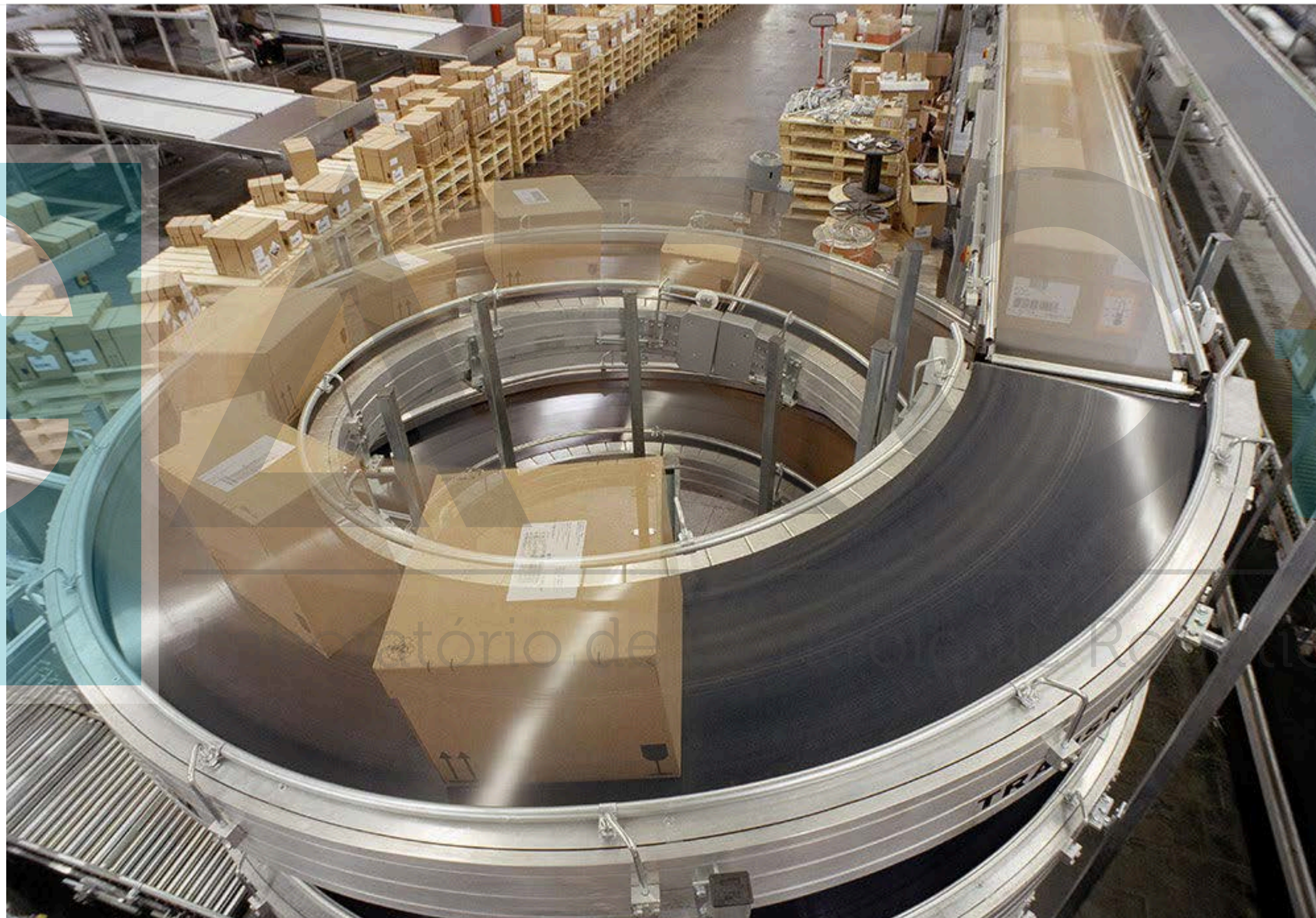
Conclusão

Coordenadas polares

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



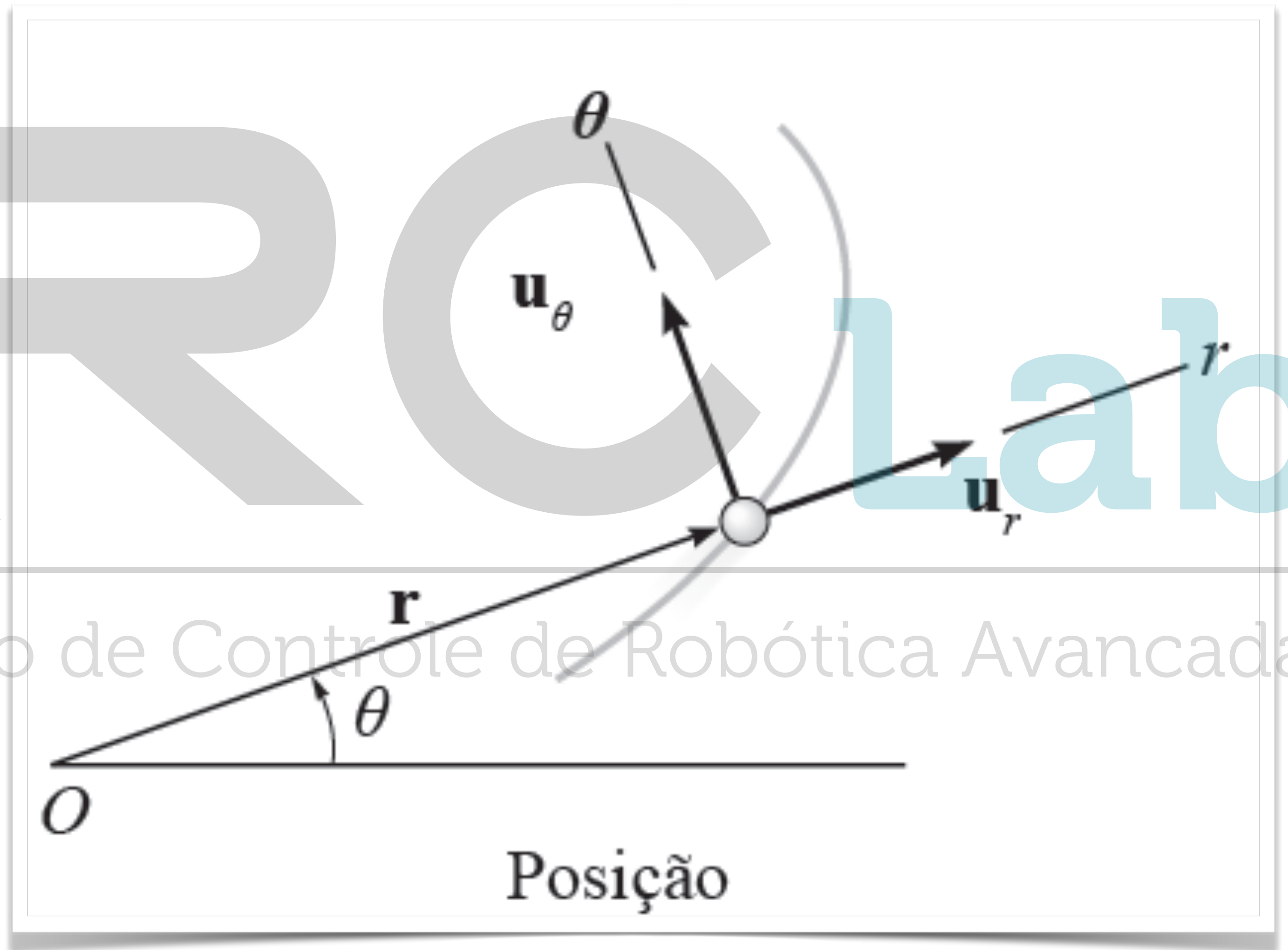
Posição

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$



Velocidade

Comp. Normal e
Tangencial

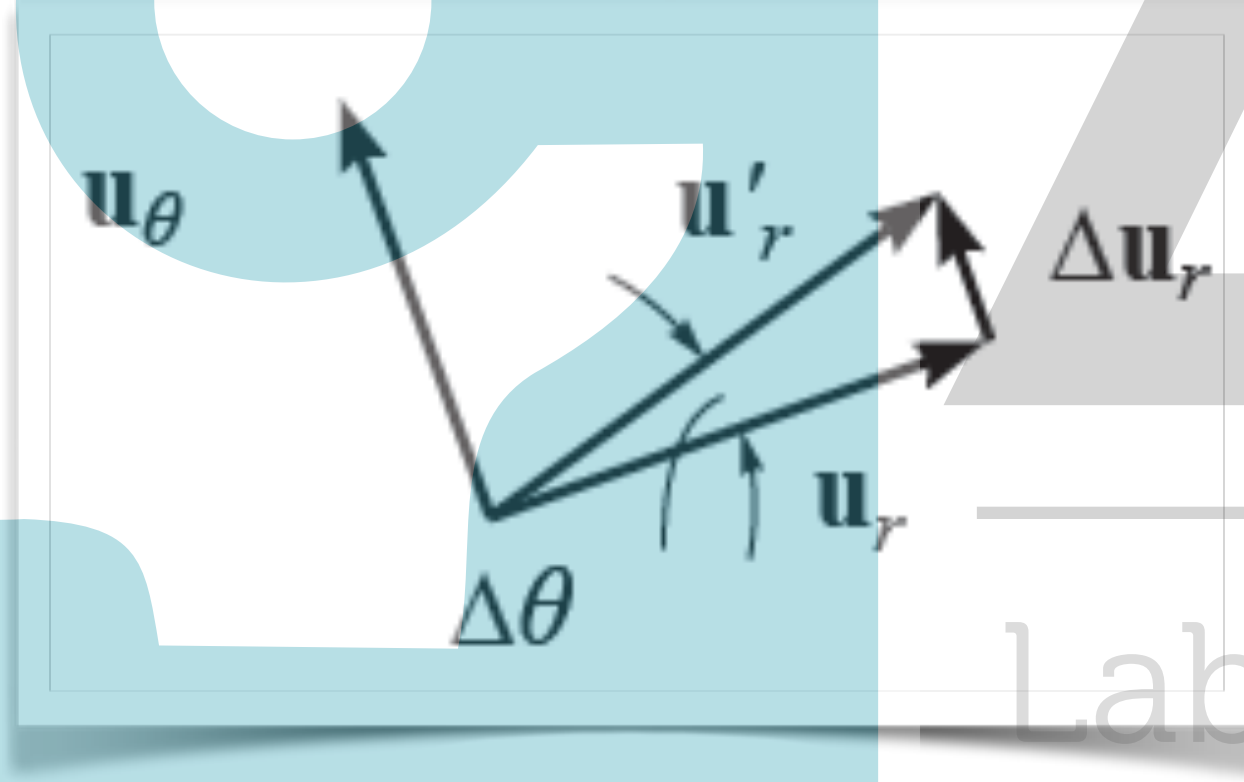
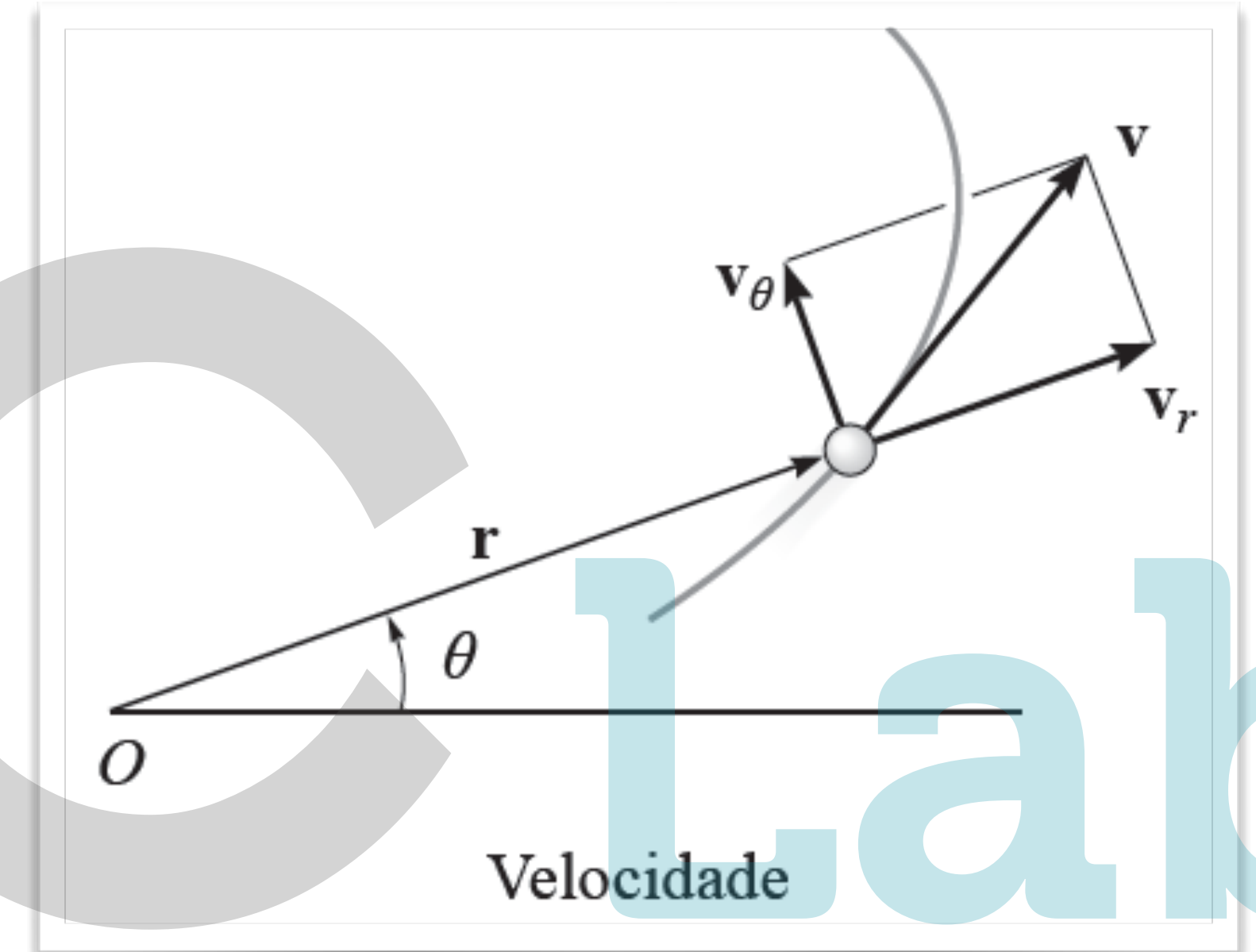
Componentes
Cilíndricas

Conclusão

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\mathbf{u}}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$



$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \end{cases}$$

Aceleração

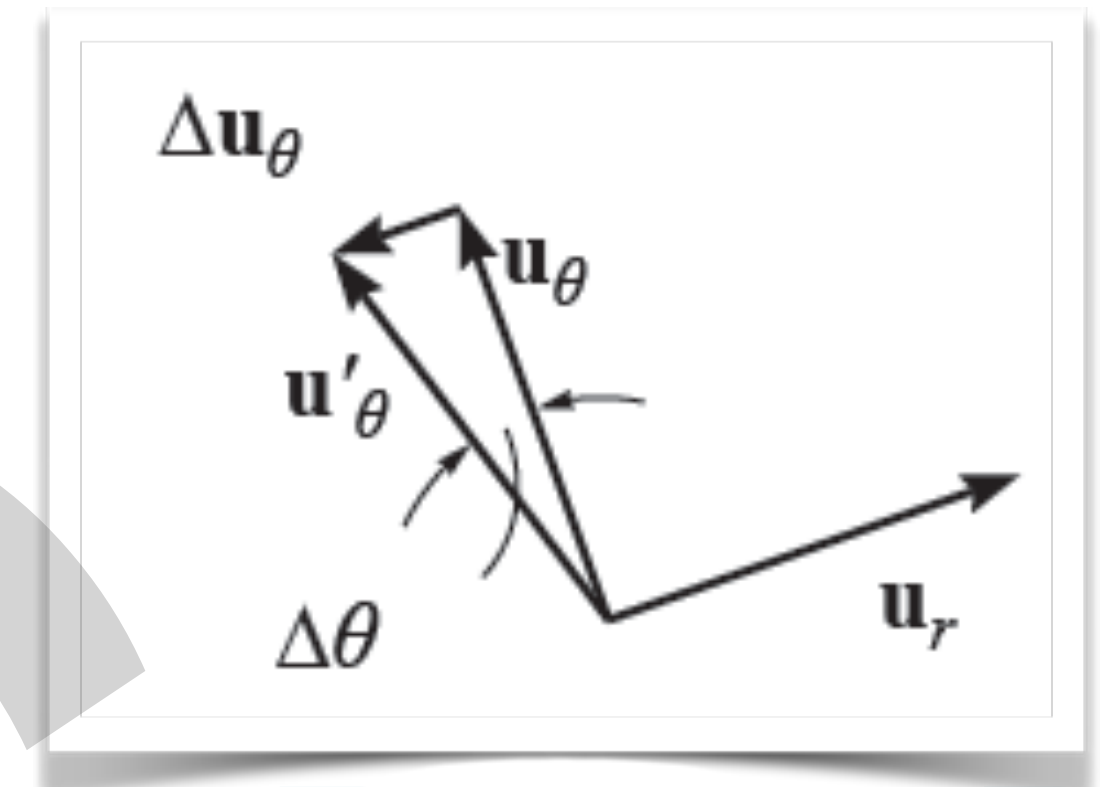
Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$$

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$



$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_r \mathbf{u}_r + v_r \dot{\mathbf{u}}_r + \dot{v}_\theta \mathbf{u}_\theta + v_\theta \dot{\mathbf{u}}_\theta$$

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta} \mathbf{u}_r$$

Laboratório de Controle de Robótica Avancada

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{array} \right.$$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial

- Coordenadas polares
- **Coordenadas cilíndricas**
- Exemplo

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Coordenadas cilíndricas

Nova coordenada: **z**

$$\dot{\mathbf{u}}_z = 0$$

(direção do vetor unitário em Z não muda!)

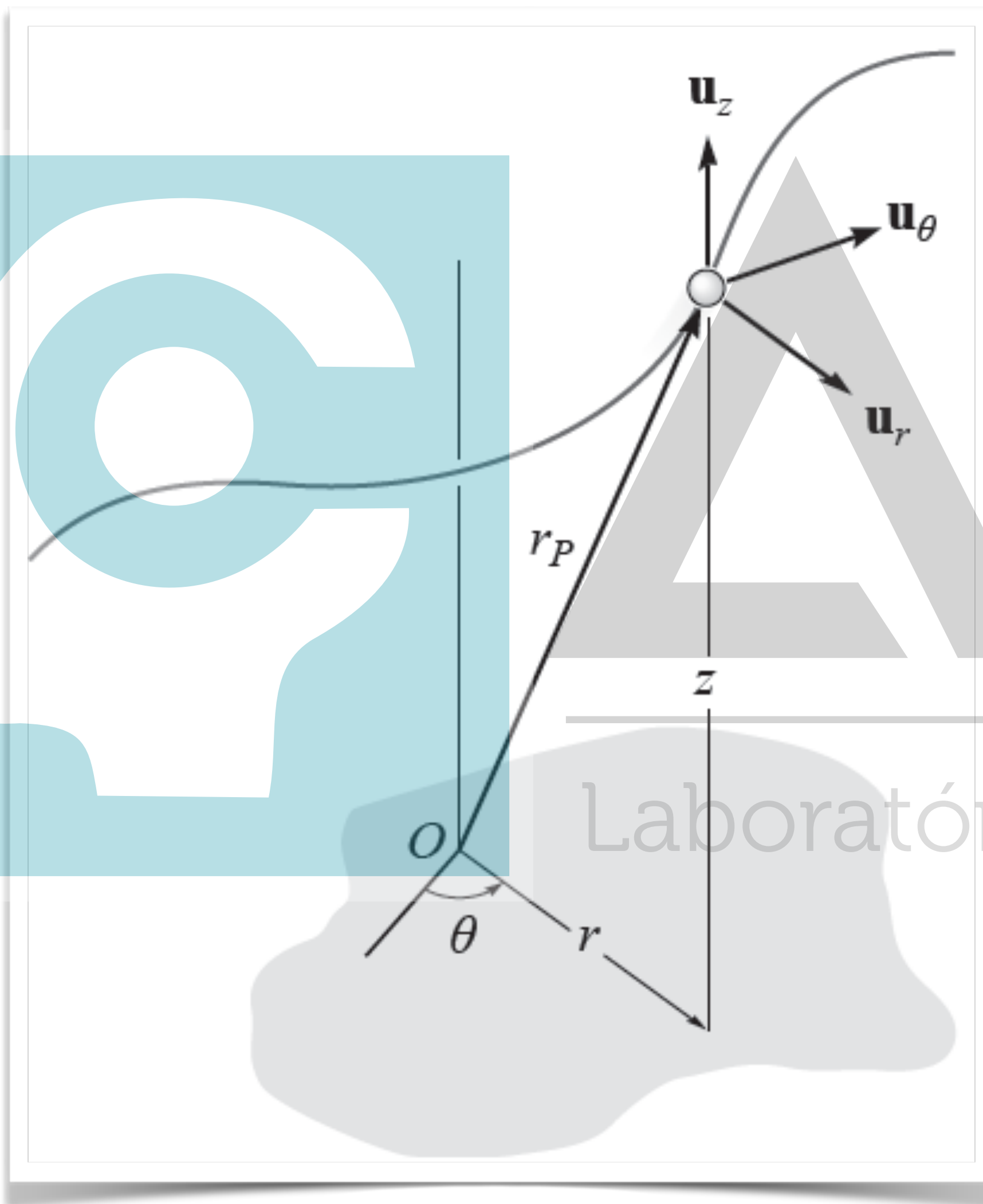
$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z \quad \mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$



Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial

- Coordenadas polares
- Coordenadas cilíndricas
- **Exemplo**

Componentes
Cilíndricas

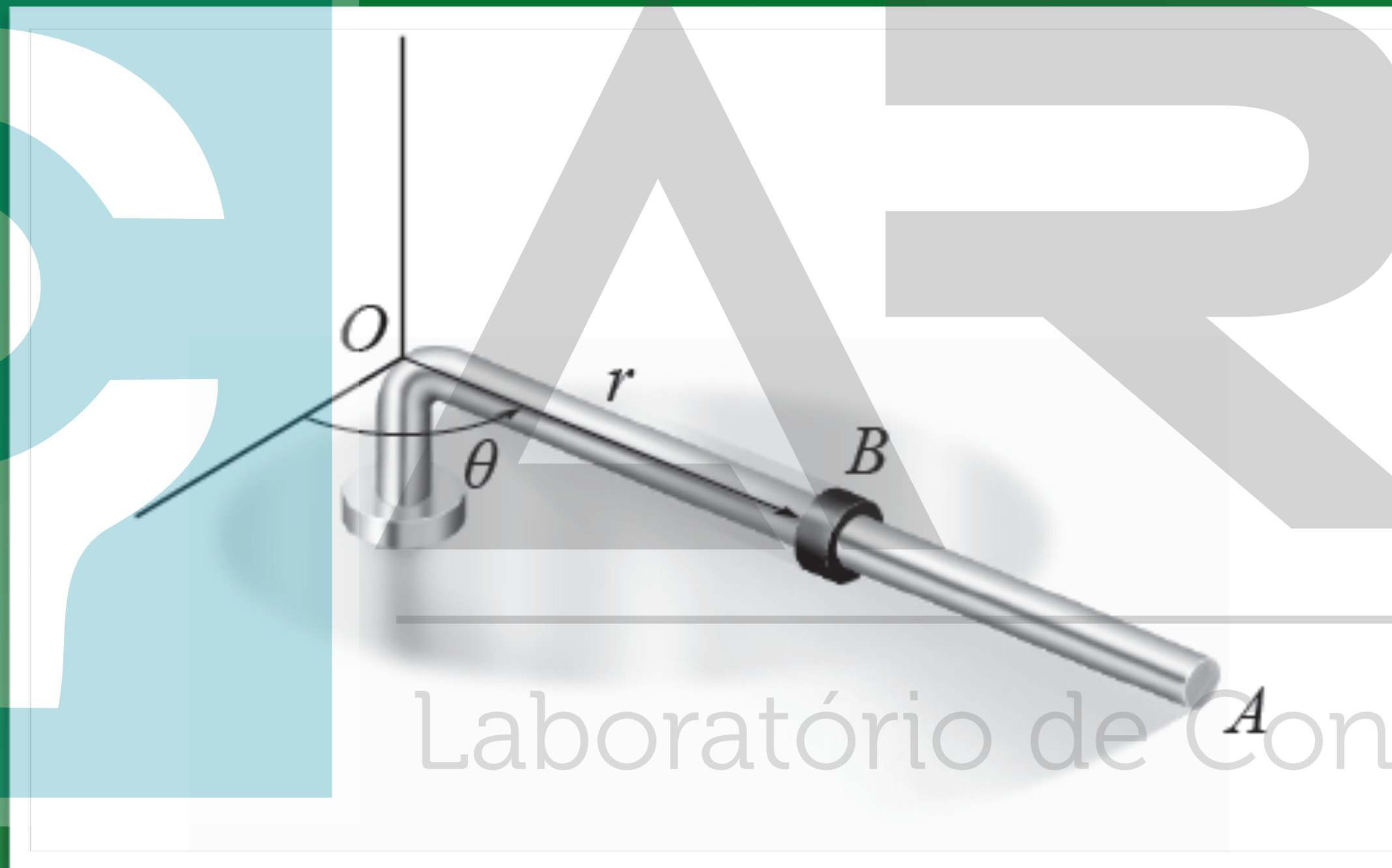
Conclusão

Exemplo 12.18

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



$$\theta = t^3$$

$$r = 100t^2 \text{ mm}$$

\mathbf{v}, \mathbf{a} para $t = 1 \text{ s}$

Conteúdo

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

ARC Lab

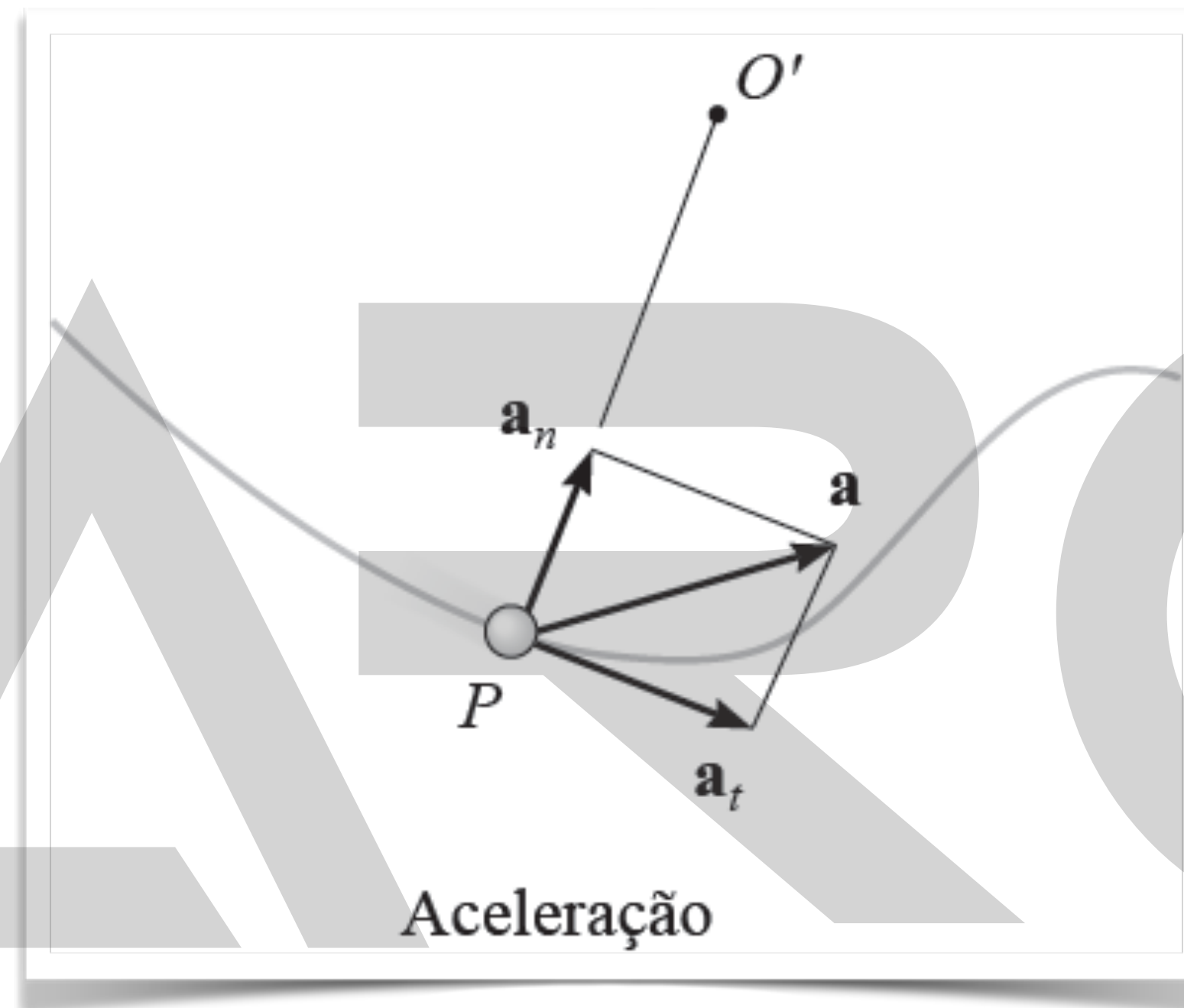
Laboratório de Controle de Robótica Avancada



- “Take-home messages”
- Próxima aula...

Conclusão

“Take-home messages”



Componente **tangencial** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **intensidade** da velocidade

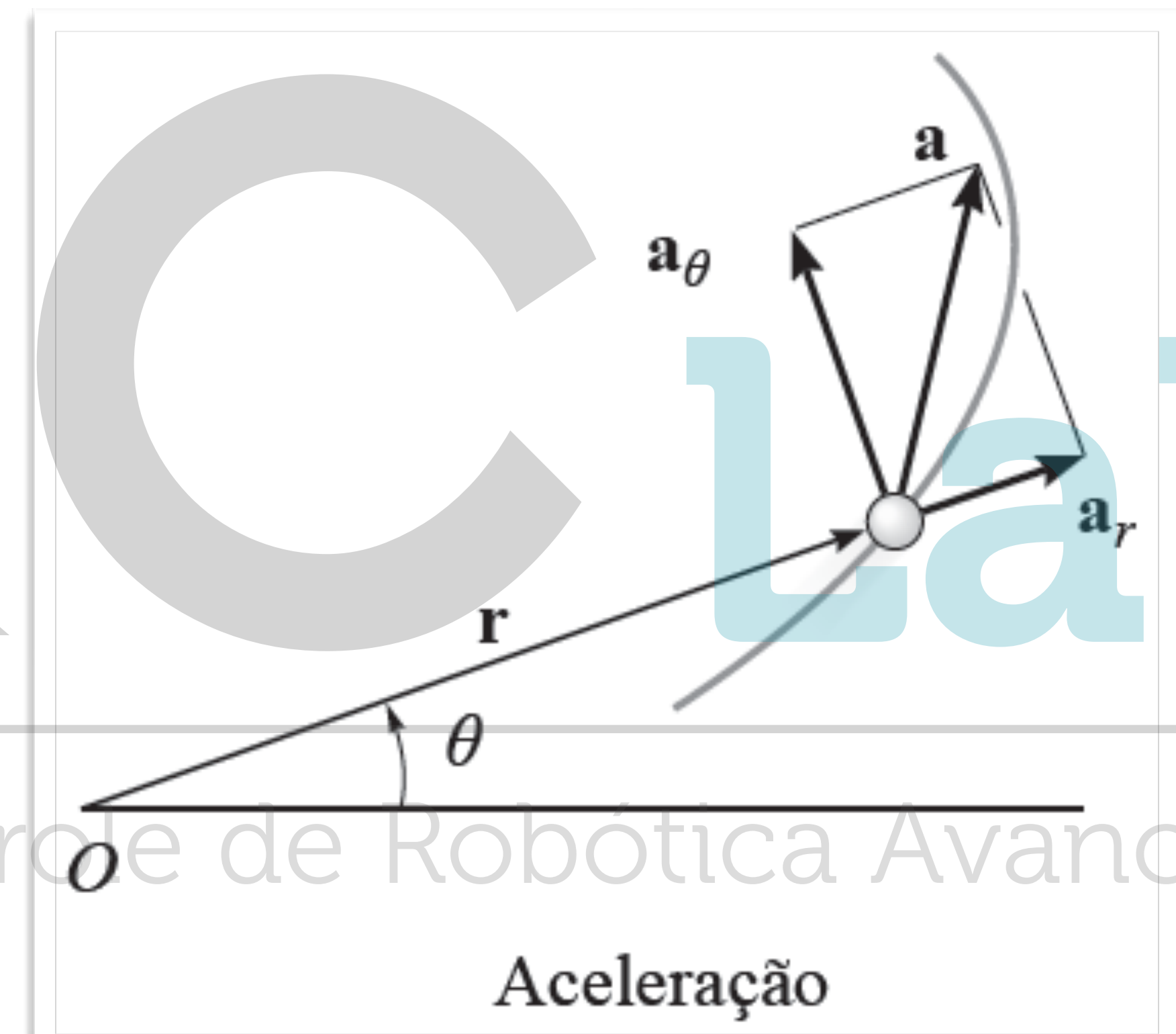
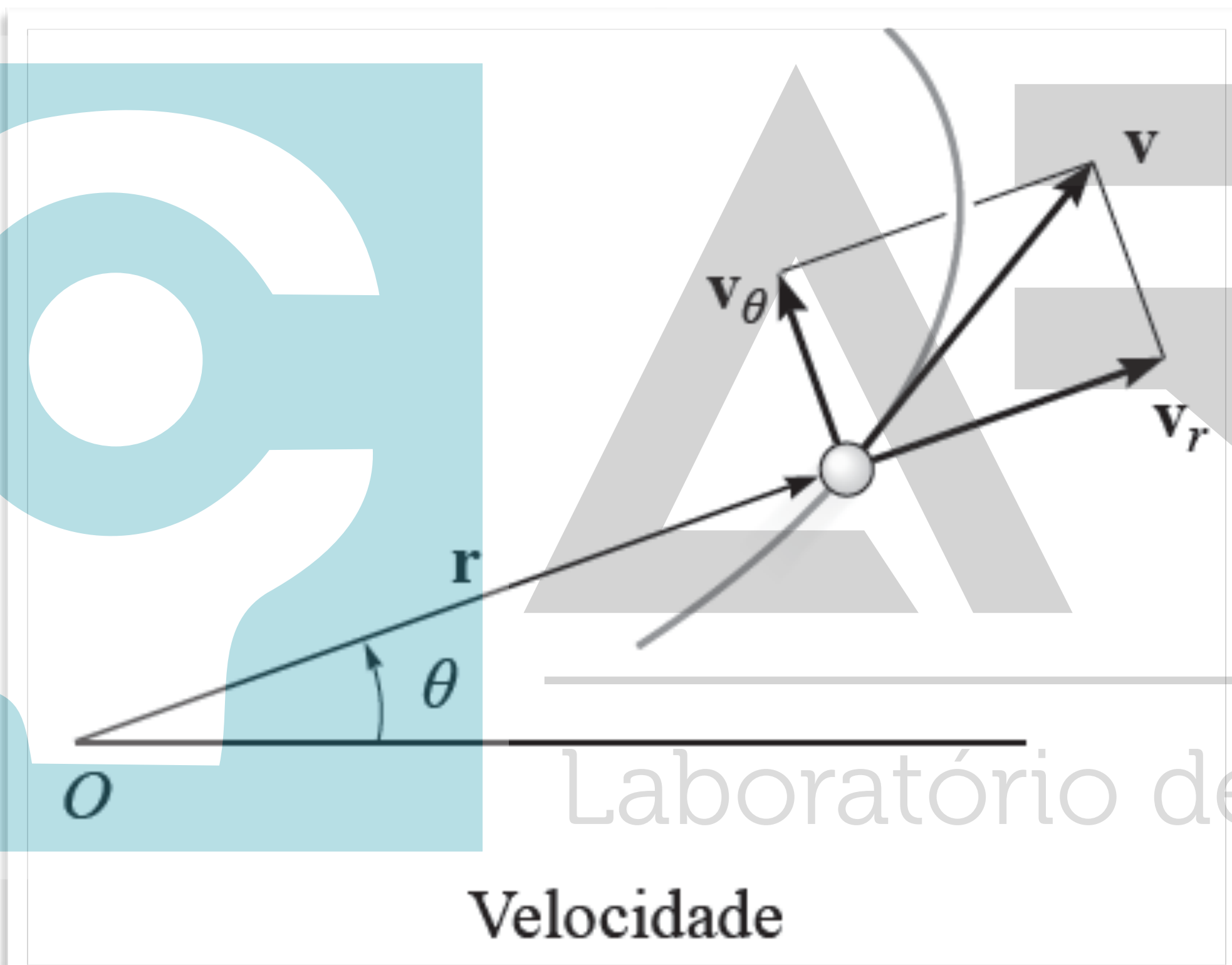
Componente **normal** da aceleração representa a taxa de variação temporal na **direção** da velocidade

“Take-home messages”

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão

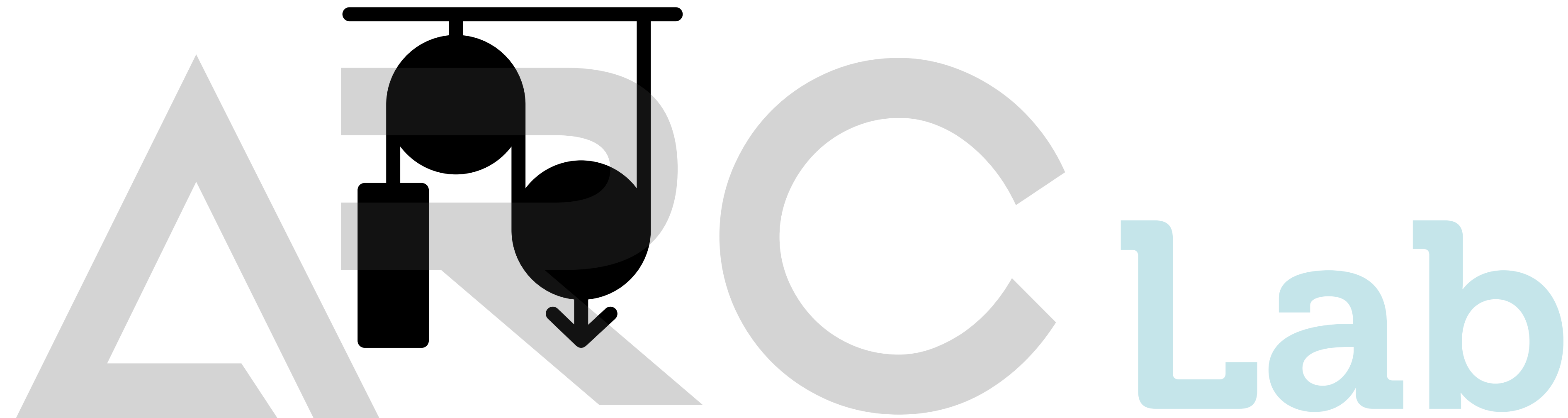


Próxima aula...

Comp. Normal e
Tangencial

Componentes
Cilíndricas

Conclusão



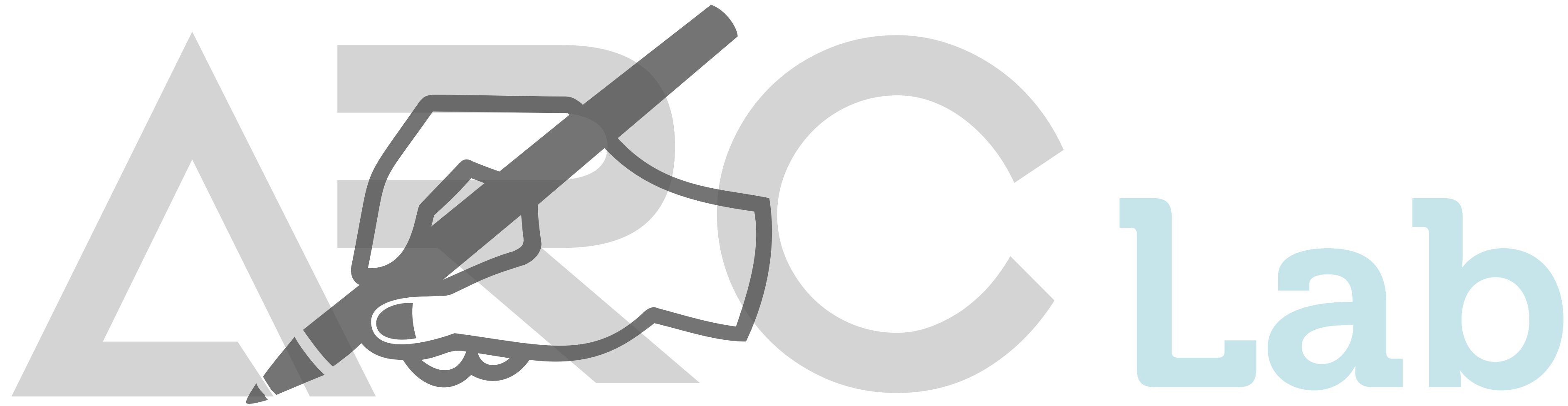
Movimento relativo:
cabos, roldanas, sistemas
em translação

Lista de exercícios para próxima aula...

Introdução

Movimento
Curvilíneo

Conclusão



Laboratório de Controle de Robótica Avancada

12.118, 12.140, 12.151, 12.157, 12.165, 12.173



That's all Folks!

Laboratório de Controle de Robótica Avançada