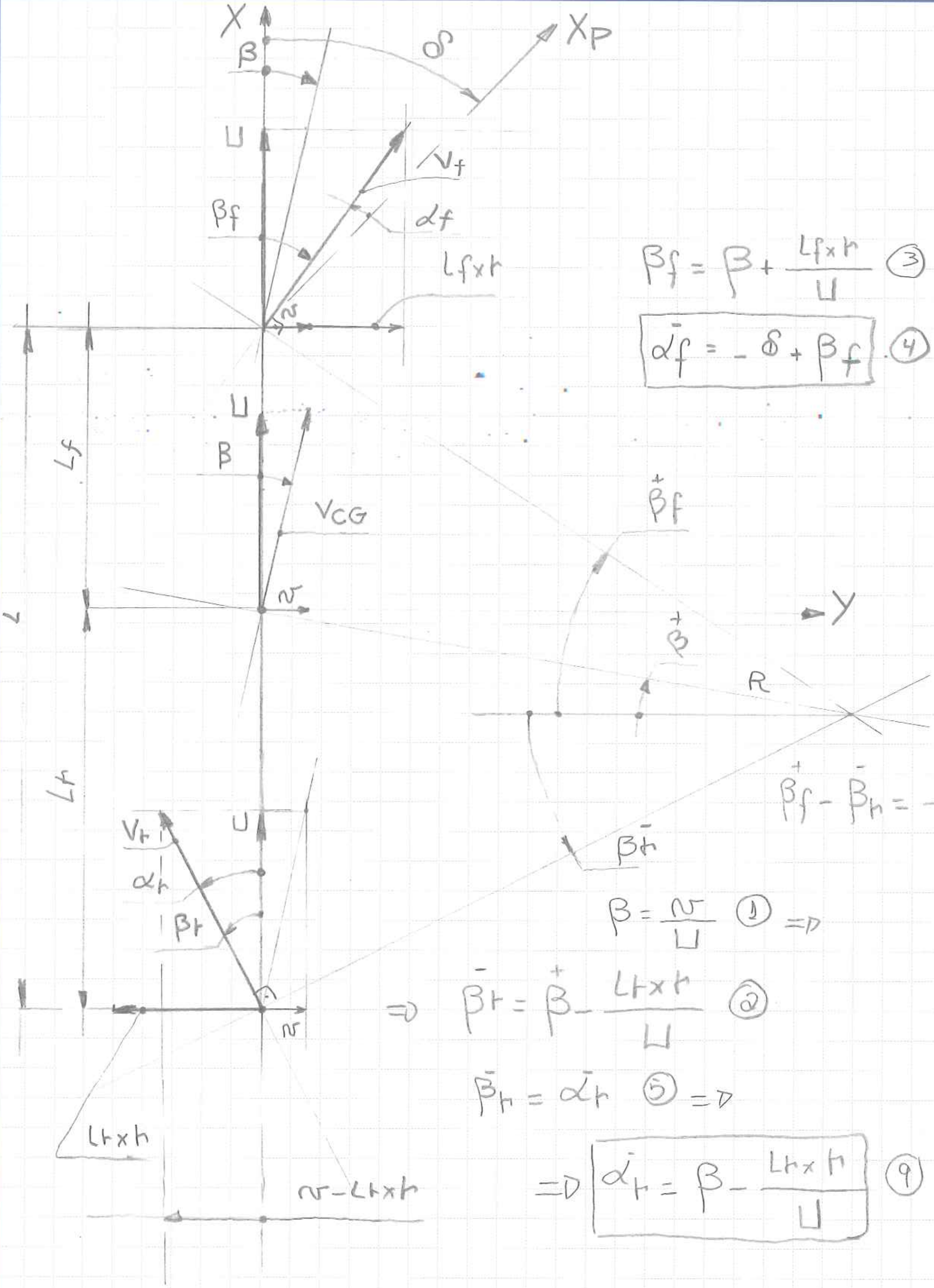


$$\beta_f = \beta + \frac{L_f \times r}{U} \quad (3)$$

$$\boxed{\bar{\alpha}_f = -\delta + \beta_f} \quad (4)$$

$$\overset{+}{\beta}_f - \bar{\beta}_r = \frac{L}{R} \quad (6)$$

$$\beta = \frac{v}{U} \quad (1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{\beta}_r = \overset{+}{\beta} - \frac{L_r \times r}{U} \quad (2)$$

$$\bar{\beta}_r = \bar{\alpha}_r \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\alpha}_r = \beta - \frac{L_r \times r}{U}} \quad (9)$$

Testando (2) e (3) com (6), tem-se:

$$\bar{\beta}_f - \bar{\beta}_r = \frac{L}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\beta} + \frac{L_f \times r}{U} - \cancel{\beta} + \frac{L_r \times r}{U} = \frac{L}{R} \Rightarrow$$

$$\frac{(L_f + L_r) \times r}{U} = \frac{L}{R}$$. Como $\frac{r}{U} = \frac{1}{R}$, vem:

$$L \times \frac{1}{R} = \frac{L}{R}$$ c.q.d.

De (4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \delta = \beta_f - \bar{\alpha}_f \quad (7)$$. Substituindo (6) em (7) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{L}{R} + \bar{\alpha}_r - \bar{\alpha}_f} \quad (8)$$

Cálculo das forças laterais:

$$\bar{F}y_f = \bar{C\alpha}_f \cdot \bar{\alpha}_f \quad (9)$$ - equação válida na região linear de $Fy \times \alpha$

Substituindo (4) em (9) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow Fy_f = C\alpha_f \times \left(\beta + \frac{L_f \times r}{U} - \delta \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Fy_f = C\alpha_f \cdot \beta + C\alpha_f \cdot \frac{L_f \times r}{U} - C\alpha_f \cdot \delta} \quad (10)$$

$$Fy_r = C\alpha_r \cdot \alpha_r \quad (11)$$

Substituindo (9) em (11) tem-se:

$$Fy_r = C\alpha_r \cdot \left(\beta - \frac{L_r \times r}{U} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Fy_r = C\alpha_r \cdot \beta - C\alpha_r \cdot \frac{L_r \times r}{U}} \quad (12)$$

Somando (10) e (12) tem-se:

$$\boxed{Fy = C\alpha_f \cdot \beta + C\alpha_f \cdot \frac{L_f \times r}{U} - C\alpha_f \cdot \delta + C\alpha_r \cdot \beta - C\alpha_r \cdot \frac{L_r \times r}{U}} \quad (13)$$

Escrevendo:

$$F_y = \frac{\partial F_y}{\partial \beta}\cdot\beta + \frac{\partial F_y}{\partial r}\cdot r + \frac{\partial F_y}{\partial \delta}\cdot\delta \Rightarrow$$ na região linear $F_y \times \alpha$

$$\Rightarrow F_y = Y_\beta\cdot\beta + Y_r\cdot r + Y_\delta\cdot\delta \quad (14)$$

Substituindo (13) em (14) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{Y_\beta = C\alpha_f + C\alpha_r} \quad (15)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_r = \frac{1}{U}\left(C\alpha_f\cdot L_f - C\alpha_r\cdot L_r\right)} \quad (16)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_\delta = -C\alpha_f} \quad (17)$$

Cálculo dos torques laterais:

$$N_f = C\alpha_f\cdot\alpha_f\ L_f \quad (18)$$ na região linear $F_y \times \alpha$

$$N_r = C\alpha_r\cdot\alpha_r\cdot L_r \quad (19)$$

Somando os torques:

$$N = C\alpha_f\cdot\left(\beta + \frac{L_f \times r}{U} - \delta\right)\cdot L_f - C\alpha_r\left(\beta - \frac{L_r \times r}{U}\right)L_r \Rightarrow$$

$$\boxed{N = C\alpha_f\cdot\beta\cdot L_f + C\alpha_f\cdot\frac{L_f \times r}{U}\cdot L_f - C\alpha_f\cdot\delta\cdot L_f - C\alpha_r\,\beta\,L_r + C\alpha_r\cdot\frac{L_r \times r}{U}\cdot L_r} \quad (20)$$

Escrevendo:

$$N = N_\beta\cdot\beta + N_r\cdot r + N_\delta\cdot\delta \quad (21)$$

De (20) e (21) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow N_\beta = \left(C\alpha_f\cdot L_f - C\alpha_r\cdot L_r\right) \quad (22)$$

$$\Rightarrow N_r = \frac{1}{U}\left(C\alpha_f\cdot L_f^2 + C\alpha_r\cdot L_r^2\right) \quad (23)$$

$$\Rightarrow N_\delta = -C\alpha_f\cdot L_f \quad (24)$$

Resumindo as derivadas de controle e estabilidade:

$$\boxed{Y_\beta = C_{\alpha_f} + C_{\alpha_r} \quad e \quad N_r = \frac{1}{U}\left(C_{\alpha_f} \cdot L_f^2 + C_{\alpha_r} \cdot L_r^2\right)}$$

derivadas de amortecimento

$$\boxed{Y_\delta = -C_{\alpha_f} \quad e \quad N_\delta = -C_{\alpha_f} \cdot L_f}$$

derivadas de controle

$$\boxed{Y_r = \frac{1}{U}\left(C_{\alpha_f} \cdot L_f - C_{\alpha_r} \cdot L_r\right) \quad e \quad N_\beta = \left(C_{\alpha_f} \cdot L_f - C_{\alpha_r} \cdot L_r\right)}$$

derivadas de união δ

Métrica de estabilidade direcional estática

De (8) $\longrightarrow \overset{+}{\delta} = \frac{L}{R} - \bar{\alpha}_f + \overset{+}{\alpha}_r \Rightarrow$

$$F_{y_f} = m_f \cdot \frac{V_{CG}^2}{R} \Rightarrow \frac{W_f}{g} \cdot \frac{V_{CG}^2}{R} \quad e \quad F_{y_f} = C_{\alpha_f} \, \alpha_f \text{ na região linear}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{\alpha}_f = \frac{W_f}{C_\alpha} \cdot \frac{V_{CG}^2}{Rg} \quad e \\ &\Rightarrow \bar{\alpha}_r = \frac{W_r}{C_{\alpha r}} \cdot \frac{V_{CG}^2}{Rg} \end{aligned}\right\} \overset{+}{\delta} = \frac{L}{R}\left(-\frac{W_f}{C_{\alpha f}} + \frac{W_r}{C_{\alpha r}}\right) \cdot \bar{a_y} \Rightarrow$$

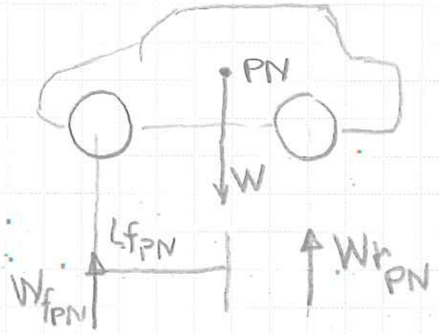
$$\delta = \frac{L}{R} + K \cdot \bar{a_y} \quad \text{onde} \quad \boxed{K = \left(\frac{W_r}{C_{\alpha r}} - \frac{W_f}{C_{\alpha f}}\right) \quad (25)}$$

Quando $K > 0 \Rightarrow \uparrow a_y, \uparrow V_{CG} \Rightarrow \delta \uparrow$

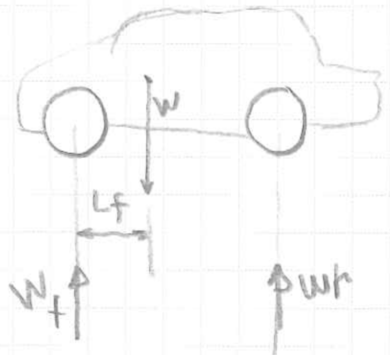
K é chamado de gradiente de esterçamento. É a métrica de estabilidade direcional estática.

Esta métrica pode ser vista de uma forma diferente, a margem de estabilidade direcional estática SM.

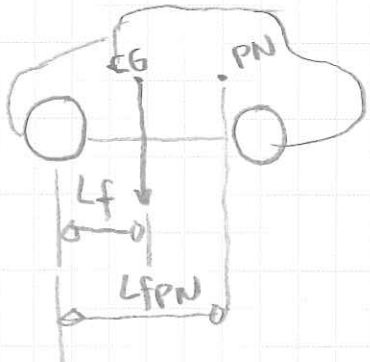
Existe um ponto na direção x do veículo que se o centro de massa do veículo estiver sobre de, $K=0$. Este ponto recebe o nome de "ponto neutro de manobra". Sua posição será determinada tendo o eixo dianteiro como referência:



Com o centro de gravidade do veículo em outra posição tem-se:



A margem de estabilidade direcional estática é definida como:



$$\boxed{SM = \frac{L_{f_{PN}} - L_f}{L} \times 100} \qquad (26)$$

Da equação (25),

$$K = \left(\frac{W_{r_{PN}}}{C_{\alpha r}} - \frac{W_{f_{PN}}}{C_{\alpha f}} \right) = 0 \quad (27)$$

$\rightarrow$ definição de ponto neutro de manobra

$\Rightarrow$

$$\frac{W_{fPN}}{-C_{\alpha f}} + \frac{W_{rPN}}{C_{\alpha r}} = 0 \quad (28)$$

sendo $Y_\delta = -C_{\alpha f}$ e

$$Y_\beta = C_{\alpha f} + C_{\alpha r} \Rightarrow C_{\alpha r} = Y_\beta - C_{\alpha f} \Rightarrow$$

$$C_{\alpha r} = Y_\beta + Y_\delta \quad (29)$$

De (28) e (29) tem-se:

$$\frac{W_{fPN}}{Y_\delta} + \frac{W_{rPN}}{Y_\delta + Y_\beta} = 0 \quad (30)$$, sendo $W_{f_{PN}} = \frac{W}{L} \cdot L_{r_{PN}}$ e $W_{r_{PN}} = \frac{W}{L} L_{f_{PN}}$

$$\Rightarrow \frac{W}{L}\left(\frac{L_{rPN}}{Y_\delta} + \frac{L_{fPN}}{Y_\delta + Y_\beta}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{L_{fPN}}{Y_\delta + Y_\beta} + \frac{L - L_{fPN}}{Y_\delta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_{fPN}}{Y_\delta + Y_\beta} + \frac{L}{Y_\delta} - \frac{L_{fPN}}{Y_\delta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{f_{PN}}\left(\frac{1}{Y_\delta + Y_\beta} - \frac{1}{Y_\delta}\right) + \frac{L}{Y_\delta} = 0$$

$$L_{f_{PN}}\left(\frac{Y_\delta - (Y_\delta + Y_\beta)}{Y_\delta (Y_\delta + Y_\beta)}\right) + \frac{L}{Y_\delta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{f_{PN}} \cdot \left(\frac{-Y_\beta}{Y_\delta (Y_\delta + Y_\beta)}\right) = -\frac{L}{Y_\delta} \Rightarrow$$

$$L_{f_{PN}} = \left(-\frac{L}{Y_\delta}\right) \cdot \frac{Y_\delta (Y_\delta + Y_\beta)}{(-Y_\beta)} = \boxed{L_{f_{PN}} = L \times \left(\frac{Y_\delta + Y_\beta}{Y_\beta}\right)} \quad (31) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SM = \frac{-L_f + L_{fPN}}{L} \times 100 \Rightarrow \boxed{SM = \frac{-L_f + L\left(\frac{Y_\delta + Y_\beta}{Y_\beta}\right)}{L} \times 100 \quad (32)} \Rightarrow$$