MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Prof. Dr. Luis Carlos de Castro Santos

lsantos@ime.usp.br

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução
(Versão Preliminar)

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
http://www.mat.ufmg.br/~regi

Julho 2011

Séries de Fourier

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua em $[a,b]$ exceto possivelmente em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. De forma análoga uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** ou **contínua por partes** se $f(t)$ é contínua por partes em todo intervalo $[a,b]$. Consideramos duas funções contínuas por partes iguais se elas diferem possivelmente apenas nos pontos de descontinuidade.

Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes a **série de Fourier** da função f é definida por

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \tag{2.1}$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 0,1,2,\ldots \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1,2,\ldots \tag{2.3}$$

2.1 Teorema de Fourier

Teorema 2.1 (Fourier). *Seja L um número real maior que zero. Para toda função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L},$$

em que

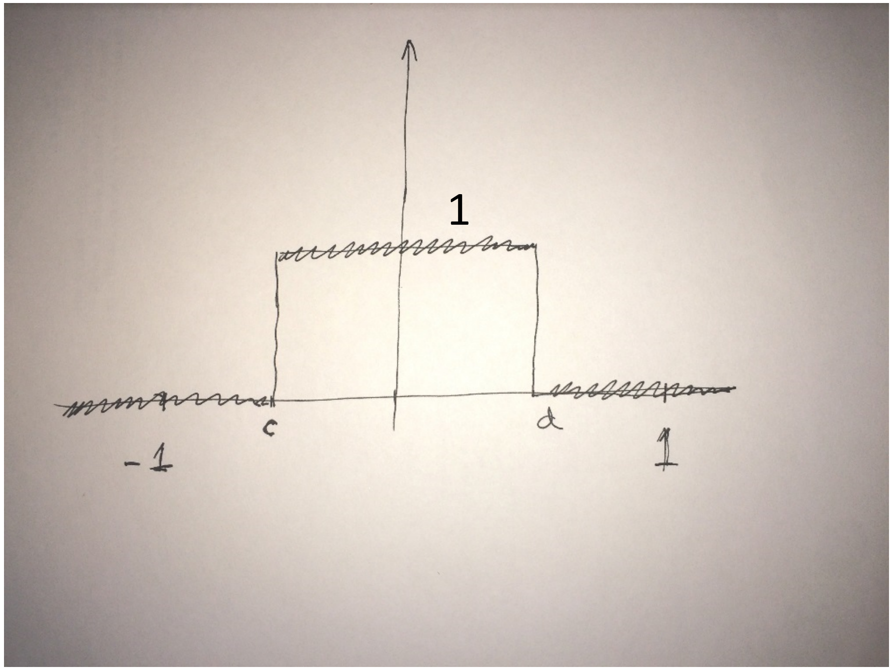
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos de $(-L, L)$ em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in (-L, L) \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.1. Seja L um número real maior que zero. Considere a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = f_{c,d}^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$ para c e d fixos satisfazendo $-1 \leq c < d \leq 1$.



$$s = \frac{n\pi t}{L} \qquad t = L \quad s = n\pi \qquad t = -L \quad s = -n\pi$$

$$ds = \frac{n\pi}{L}\,dt \qquad dt = \frac{L}{n\pi}\,ds$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f_{c,d}^{(0)}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{n\pi t}{L}$ obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} dt = d - c,\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen} s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1,2,\ldots\\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}, \quad \text{para } n = 1,2,\ldots
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\\
&= \frac{d-c}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi d - \operatorname{sen} n\pi c}{n}\cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi c - \cos n\pi d}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

As funções $\cos\frac{n\pi t}{L}$ e $\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}$ são periódicas com período (fundamental=menor período) igual a $\frac{2L}{n}$, para $n = 1, 2, 3\ldots$ Assim $2L$ é período comum a todas elas. Logo a série de Fourier de uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é periódica de período $T = 2L$. O termo constante

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

representa a média da função f no intervalo $[-L, L]$ e está escrito desta forma ($\dfrac{a_0}{2}$ e não simplesmente a_0) somente para que a fórmula que vale para os coeficientes dos cossenos da série de Fourier fique valendo também para o termo constante ($n = 0$).

Como a série de Fourier é periódica de período $2L$ ela pode ser entendida como a série de Fourier da extensão periódica de f, $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que é definida por

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad \text{se } t \in [-L, L] \quad \text{e é tal que} \quad \tilde{f}(t + 2L) = \tilde{f}(t).$$

Ou seja, a série de Fourier de f é a mesma série de Fourier de $\tilde{f}$ que é a função que é periódica de período $2L$ e que coincide com f no intervalo $[-L, L]$. Assim temos a versão do Teorema de Fourier para funções periódicas.

Teorema 2.2 (Fourier para Funções Periódicas). *Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período $2L$, contínua por partes tal que a sua derivada f' também seja contínua por partes, a série de Fourier de f*

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

em que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt, \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

converge para f nos pontos em que f é contínua. Ou seja, podemos representar f por sua série de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in \mathbb{R} \text{ em que } f \text{ é contínua.}$$

Exemplo 2.3. Vamos calcular a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \le t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \le t < \pi \end{cases}$$

Usando a notação do Exemplo 2.1, podemos escrever

$$f(t) = f^{(0)}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}(t), \quad \text{com } L = \pi.$$

Portanto usando os coeficientes que obtivemos para $f^{(0)}_{c,d}$ no Exemplo 2.1, com $c = -\dfrac{1}{4}$ e $d = \dfrac{1}{2}$ temos que

$$S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que f pode ser representada por sua série de Fourier

$$f(t) = S_f(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt,$$

para $t \neq -\dfrac{\pi}{4}$ e $t \neq \dfrac{\pi}{2}$.

MAP2320

$$L = \pi, c = -{}^{1}/_{4}, d = {}^{1}/_{2}$$

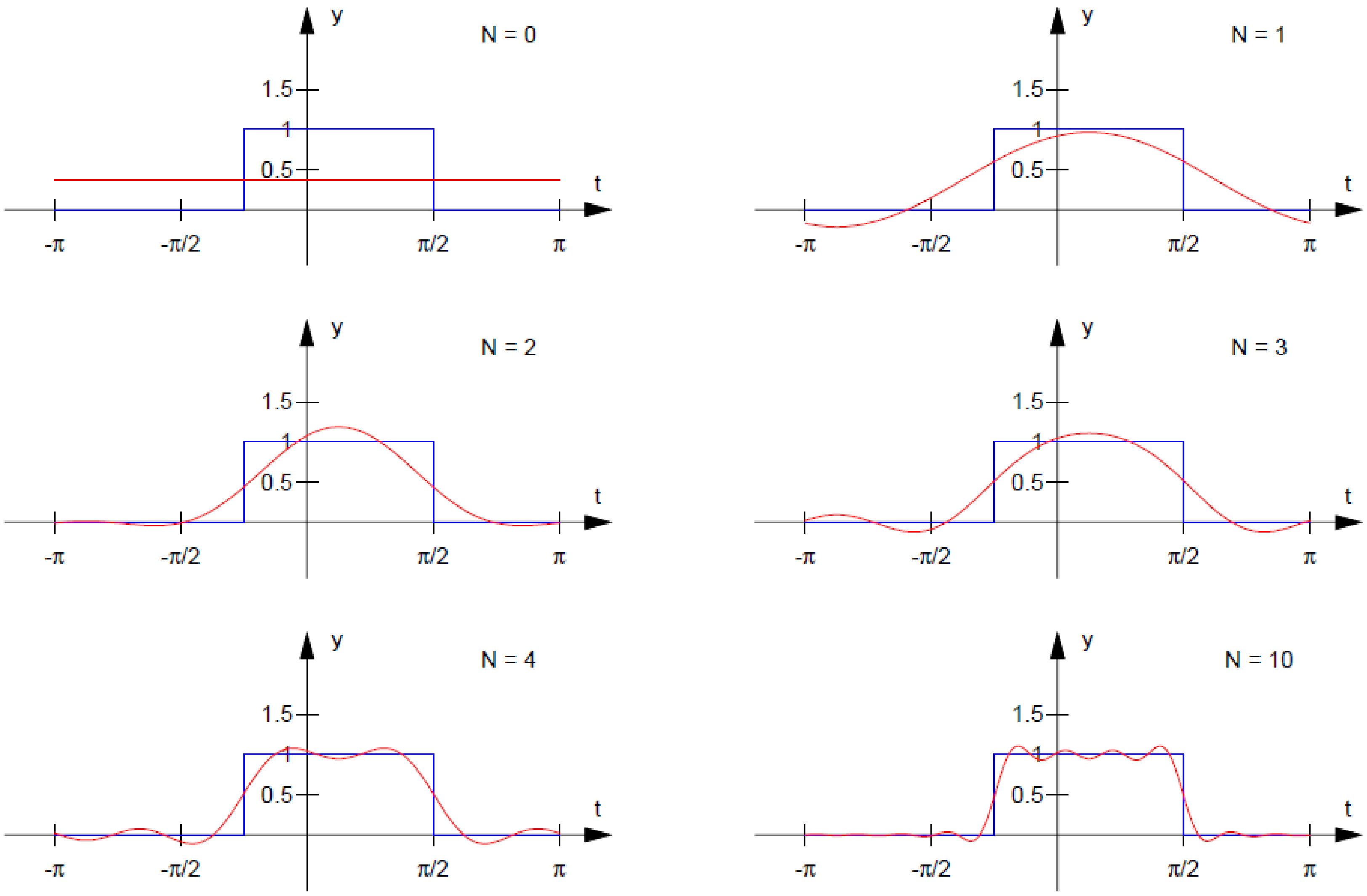


Figura 2.1 – Somas parciais da série de Fourier da função do Exemplo 2.1, para $N = 0, 1, 2, 3, 4, 10$

Exemplo 2.4. Vamos calcular a série de Fourier da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < -\pi/4 \\ 1, & \text{se } -\pi/4 \leq t < \pi/2 \\ 0, & \text{se } \pi/2 \leq t < \pi \end{cases} \quad \text{e tal que} \quad g(t+2\pi) = g(t)$$

Esta função é a extensão periódica da função $f = f^{(0)}_{-\frac{1}{4},\frac{1}{2}}$ com período igual a 2π. Logo a sua série de Fourier é a mesma da função do Exemplo anterior

$$S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt.$$

Pelo Teorema 2.1 (de Fourier) temos que g pode ser representada por sua série de Fourier

$$g(t) = S_g(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)\cos nt + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\operatorname{sen} nt,$$

para $t \neq -\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi$ e $t \neq \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

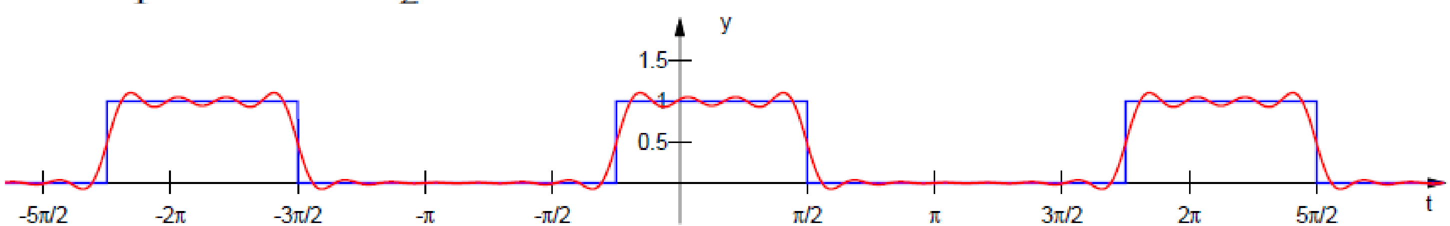


Figura 2.2 – Soma parcial da série de Fourier da função do Exemplo 2.4, com $N = 10$

TRIGONOMETRIC IDENTITIES

$$\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin(\theta) \\
\cos(-\theta) &= \cos(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B) \\
\cos(A+B) &= \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta) &= \frac{1-\cos(2\theta)}{2} \\
\cos^2(\theta) &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(A)\sin(B) &= \frac{\cos(A-B)-\cos(A+B)}{2} \\
\cos(A)\cos(B) &= \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(A)\cos(B) &= \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2} \\
\cos(A)\sin(B) &= \frac{\sin(A+B)-\sin(A-B)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(A)+\sin(B) &= 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos(A)+\cos(B) &= -2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(A)-\sin(B) &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
\cos(A)-\cos(B) &= -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2(A)-\sin^2(B) &= \sin(A+B)\sin(A-B) \\
\cos^2(A)-\cos^2(B) &= -\sin(A+B)\sin(A-B)
\end{aligned}$$

$$\cos^2(A)-\sin^2(B) = \cos(A+B)\cos(A-B)$$

Exemplo 2.5. Seja L um número real maior que zero. Seja m um inteiro positivo. Seja

$$u_m : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$u_m(t) = \cos\frac{m\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos msds = 0,$$

Vamos calcular os coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2\ldots$ Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{\pi t}{L}$, para $n > 0$ e $n \neq m$ temos que,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \cos ns\, ds$$

Usando o fato de que $\cos ms \cos ns = \frac{1}{2}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$, temos então que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds \\ &= \frac{1}{2\pi(m+n)}\operatorname{sen}(m+n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi(m-n)}\operatorname{sen}(m-n)s\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

e para $n = m$,

$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos^2\frac{m\pi t}{L}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 ms\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 + \cos 2ms]ds = 1.$$

Aqui usamos o fato de que $\cos^2 ms = \frac{1}{2}[1 + \cos 2ms]$.

Vamos calcular os coeficientes b_n, para $n = 1, 2 \ldots$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ms \ \operatorname{sen} ns \, ds \end{aligned}$$

Usando o fato de $\cos ms \operatorname{sen} ns = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]$, temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0$$

Nestas integrais usamos relações que podem ser obtidas somando-se ou subtraindo-se duas das relações abaixo.

$$\begin{aligned} \cos(m+n)s &= \cos ms \cos ns - \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \cos(m-n)s &= \cos ms \cos ns + \operatorname{sen} ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m+n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns + \cos ms \operatorname{sen} ns \\ \operatorname{sen}(m-n)s &= \operatorname{sen} ms \cos ns - \cos ms \operatorname{sen} ns. \end{aligned}$$

Assim a série de Fourier de $u_m : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{u_m}(t) = \cos\frac{m\pi t}{L} = u_m(t), \text{ para } m = 1, 2 \ldots$$

Exemplo 2.6. Seja L um número real maior que zero. Seja m um inteiro positivo. Seja

$$v_m : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$v_m(t) = \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

Vamos calcular os coeficientes a_n, para $n = 0, 1, 2 \ldots$ Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{\pi t}{L}$,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms\, ds = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{\pi t}{L}$, temos que para $n = 1, 2, 3 \ldots$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms \, \cos nsds \end{aligned}$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen} ms \, \cos ns = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s]$ obtemos que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{sen}(m+n)s + \operatorname{sen}(m-n)s] ds = 0$$

Vamos calcular os coeficientes b_n, para $n = 1, 2 \ldots$ Para $n \neq m$ temos que

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ms \, \operatorname{sen} ns\, ds$$

Usando o fato de que $\operatorname{sen} ms \, \operatorname{sen} ns = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]$ temos que

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[-\cos(m+n)s + \cos(m-n)s]ds = 0$$

E para $n = m$,

$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}^2 \frac{m\pi t}{L} dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 ms \, ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - \cos 2ms]ds = 1$$

Aqui usamos o fato de que $\operatorname{sen}^2 ms = \frac{1}{2}[1 - \cos 2ms]$.

Assim a série de Fourier de $v_m : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$S_{v_m}(t) = \cancel{\cos}\ \operatorname{sen} \frac{m\pi t}{L} = v_m(t), \text{ para } m = 1, 2 \ldots$$

Com os coeficientes das funções destes exemplos podemos determinar os coeficientes das séries de Fourier de várias funções que são combinações lineares delas. Isto por que os coeficientes das séries dependem linearmente das funções, ou seja,

Proposição 2.3. *Sejam* $f, g : [-L, L] \to \mathbb{R}$. *Se*

$$a_n(f,L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \;\; b_n(f,L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt,$$

$$a_n(g,L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \;\; b_n(g,L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt,$$

então para quaisquer números α *e* β,

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha a_n(f,L) + \beta a_n(g,L) \quad e \quad b_n(\alpha f + \beta g, L) = \alpha b_n(f,L) + \beta b_n(g,L).$$

Demonstração.

$$a_n(\alpha f + \beta g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt + \beta\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha a_n(f,L) + \beta a_n(g,L).$$

$$b_n(\alpha f + \beta g, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt + \beta\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g(t)\,\text{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \alpha b_n(f,L) + \beta b_n(g,L).$$

Exemplo 2.7. Seja L um número real maior que zero. Seja n um inteiro positivo. Seja

$$f : [-L, L] \to \mathbb{R} \quad \text{definida por}$$

$$f(t) = 3 - 2\cos\frac{15\pi t}{L} + 4\,\mathrm{sen}\,\frac{31\pi t}{L}, \quad \text{para } t \in [-L, L]$$

temos que a série de Fourier da função deste exemplo é ela própria:

$$S_f(t) = 3 - 2\cos\frac{15\pi t}{L} + 4\,\mathrm{sen}\,\frac{31\pi t}{L} = f(t).$$

Exemplo 2.8. Considere a função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = f_{c,d}^{(1)}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

Vamos calcular a série de Fourier de $f_{cd}^{(1)}$. Fazendo a mudança de variáveis $s = \dfrac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes obtemos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\,dt = \frac{L}{2}(d^2 - c^2) \\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\,ds \\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\ \mathrm{sen}\, s + \cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L}{n^2\pi^2}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\ \mathrm{sen}\, s\,ds \\
&= \frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
S_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L} \\
&= \frac{L(d^2 - c^2)}{4} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(s\ \mathrm{sen}\, s + \cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^2}\cos\frac{n\pi t}{L} + \frac{L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\, s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}.
\end{aligned}$$

MAP2320

Table of Integrals*

$$\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x \tag{93}$$

$$\int x\cos ax dx = \frac{1}{a^2}\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax \tag{94}$$

$$\int x^2\cos x dx = 2x\cos x + \left(x^2-2\right)\sin x \tag{95}$$

$$\int x^2\cos ax dx = \frac{2x\cos ax}{a^2} + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\sin ax \tag{96}$$

$$\int x^n cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1}\left[\Gamma(n+1,-ix)\right.$$
$$\left.+(-1)^n\Gamma(n+1,ix)\right] \tag{97}$$

$$\int x^n cos ax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n}\left[(-1)^n\Gamma(n+1,-iax)\right.$$
$$\left.-\Gamma(n+1,ixa)\right] \tag{98}$$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x \tag{99}$$

$$\int x\sin ax dx = -\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{100}$$

$$\int x^2\sin x dx = \left(2-x^2\right)\cos x + 2x\sin x \tag{101}$$

$$\int x^2\sin ax dx = \frac{2-a^2x^2}{a^3}\cos ax + \frac{2x\sin ax}{a^2} \tag{102}$$

$$\int x^n\sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n\left[\Gamma(n+1,-ix)-(-1)^n\Gamma(n+1,-ix)\right] \tag{103}$$

1.4. Determine a série de Fourier da função $f_{c,d}^{(2)} : [-L, L] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f_{c,d}^{(2)}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } cL < t \leq dL, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para } c \text{ e } d \text{ fixos satisfazendo } -1 \leq c < d \leq 1.$$

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L},$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \quad \textit{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad \textit{para } n = 1, 2, \ldots$$

+

$$s = \frac{n\pi t}{L} \qquad t = L \quad s = n\pi \qquad t = -L \quad s = -n\pi$$

$$ds = \frac{n\pi}{L} dt \qquad dt = \frac{L}{n\pi} ds$$

+ Tabelas de integrais

+ Relações trigonométricas

MAP2320

1.4. Fazendo a mudança de variáveis $s = \frac{n\pi t}{L}$ e integrando-se por partes duas vezes obtemos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,dt = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)\\
a_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\cos s\,ds\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(s^2\,\mathrm{sen}\,s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} - 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\,\mathrm{sen}\,s\right)\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(\left(s^2-2\right)\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{1}{L}\int_{cL}^{dL} t^2\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt = \frac{L^2}{n^3\pi^3}\int_{n\pi c}^{n\pi d} s^2\,\mathrm{sen}\,s\,ds\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(-s^2\cos s\Big|_{n\pi c}^{n\pi d} + 2\int_{n\pi c}^{n\pi d} s\cos s\right)\\
&= \frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2-s^2)\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{f_{c,d}^{(2)}}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\\
&= \frac{L^2}{6}(d^3-c^3) + \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((s^2-2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3}\cos\frac{n\pi t}{L}\\
&\quad + \frac{L^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2-s^2)\cos s\right)\Big|_{n\pi c}^{n\pi d}}{n^3}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}
\end{aligned}
$$

Os coeficientes obtidos a partir das soluções para funções básicas podem ser combinados para o cálculo de coeficientes de funções que são combinações lineares dessas funções básicas por trecho.

A tabela a seguir resume essas soluções e será utilizada intensamente no curso para a solução das equações diferenciais parciais de interesse (parabólica, elíptica e hiperbólica)

2.1.4 Tabela de Coeficientes de Séries de Fourier

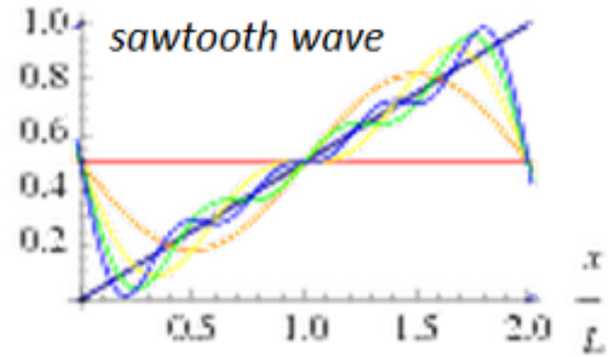
Coeficientes das Séries de Fourier de Funções Elementares		
$f : [-L, L] \to \mathbb{R},\ -1 \le c < d \le 1$	$a_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt$	$b_n(f, L) = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt$
$f^{(0)}_{c,d}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(0)}_{c,d}, L) = d - c$ $a_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = \frac{1}{n\pi}\,\mathrm{sen}\,s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(0)}_{c,d}, L) = -\frac{1}{n\pi}\cos s\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(1)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(1)}_{c,d}, L) = \frac{L}{2}(d^2 - c^2)$ $a_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(s\,\mathrm{sen}\,s + \cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(1)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L}{n^2\pi^2}\left(-s\cos s + \mathrm{sen}\,s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$
$f^{(2)}_{c,d}(t) = \begin{cases} t^2, & \text{se } t \in [cL, dL] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$	$a_0(f^{(2)}_{c,d}, L) = \frac{L^2}{3}(d^3 - c^3)$ $a_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left((s^2 - 2)\,\mathrm{sen}\,s + 2s\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$	$b_n(f^{(2)}_{c,d}, L) =$ $\frac{L^2}{n^3\pi^3}\left(2s\,\mathrm{sen}\,s + (2 - s^2)\cos s\right)\Big\vert_{n\pi c}^{n\pi d}$

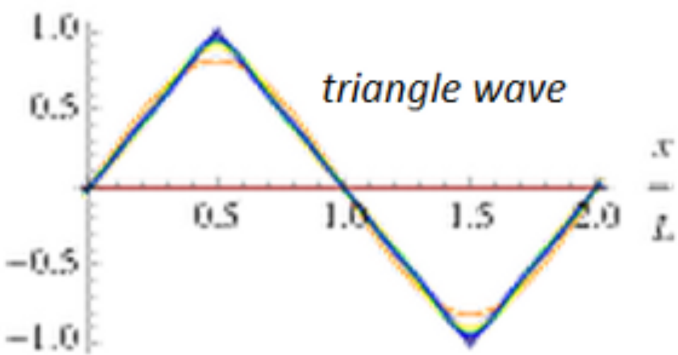
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

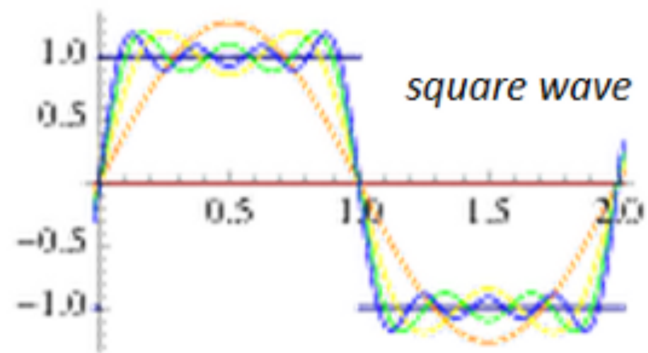
$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$







MAP 2320 – MÉTODOS NUMÉRICOS EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS II

2º Semestre - 2019

Roteiro do curso

- Introdução
- Séries de Fourier
- Método de Diferenças Finitas
- Equação do calor transiente (parabólica)
- Equação de Poisson (elíptica)
- Equação da onda (hiperbólica)