Radiação de Dipolo Elétrico

Eq. Helmholtz: $\Box \varphi = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \varphi = \rho/\epsilon_0$

$$\Box \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Soluções "formais":

$$t_R = t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|$$

$$\varphi(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho(t' = t_R, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{e equiv. p/ } \vec{A}$$

Hoje vamos considerar fontes do tipo:

$$\left. \begin{aligned} \rho(t', \vec{r}') &= \rho_\omega(\vec{r}') \, e^{-i\omega t'} \\ \vec{J}(t', \vec{r}') &= \vec{J}_\omega(\vec{r}') \, e^{-i\omega t'} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t'} + \vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = 0 \;\Downarrow\; \vec{\nabla}' \cdot \vec{J}_\omega(\vec{r}') = i\omega \rho_\omega(\vec{r}')$$

Temos então, para $\vec{A}(t, \vec{r})$:

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{\vec{J}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, e^{-i\omega\left(t - \frac{1}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|\right)}$$

$$= e^{-i\omega t} \times \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}_\omega(\vec{r}')}_{A_\omega(\vec{r})}$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = A_\omega(\vec{r}) \, e^{-i\omega t}$$

tilibra

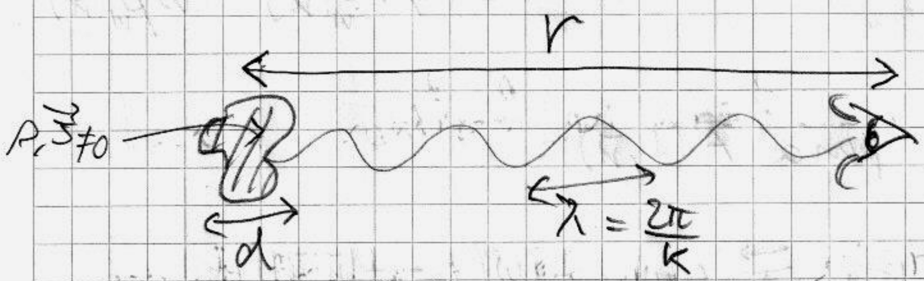
Note que agora temos uma integral que envolve

$$\frac{e^{ik\Delta r}}{\Delta r} \quad \text{com} \quad \begin{array}{l} k = \omega/c \\ \Delta r = |\vec{r} - \vec{r}'| \end{array}$$

É muito difícil integrar isso diretamente!

Vamos então usar algumas aproximações.

Para isso, vamos examinar um sistema físico típico:



Regimes: $d \ll r, \; r \ll \lambda$ — ZONA PRÓXIMA

$d \ll r, \; r \sim \lambda$ — ZONA INTERMEDIÁRIA

$d \ll r, \; \lambda \ll r$ — ZONA DE "RADIAÇÃO"

NA ZONA DE RADIAÇÃO, $\boxed{kr \gg 1}$

Nessa zona (de radiação), temos que

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \qquad r^2 = r^2$$

$$= r\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\hat{r}'\cdot\hat{r}} \qquad r' \lesssim d \ll r$$

$$\cong r\left(1 - \frac{r'}{r}\hat{r}'\cdot\hat{r} + \cancel{\frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2}} + \dots\right)$$

Portanto, temos que:

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) \xrightarrow{Z.R} \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{e^{ik(r-\vec{r}'\cdot\hat{r})}}{r-\vec{r}'\cdot\hat{r}}\vec{J}_\omega(\vec{r}') \qquad \boxed{\vec{k} \equiv k\cdot\hat{r}}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}e^{ikr}\int d^3r' \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}}{r-\hat{r}\cdot\vec{r}'}\vec{J}_\omega(\vec{r}')$$

Note que, na Zona de Radiação, a fase $e^{-i\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot r'}$ pode variar rapidamente; porém,

$$\frac{1}{r-\hat{r}\cdot\vec{r}'} \simeq \frac{1}{r} \quad \underline{\text{sempre}} \quad (r' \ll r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{A}_\omega(\vec{r}) &\simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} * \vec{J}_\omega(\vec{r}') \\ \varphi_\omega(\vec{r}) &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} * \rho_\omega(\vec{r}') \end{aligned}}$$

Ou seja, temos que, de modo geral,

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} * \tilde{\vec{J}}_\omega(\vec{x})$$

$$\varphi_\omega(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} * \tilde{\rho}_\omega(\vec{x})$$

com $\vec{k} = \left(\frac{\omega}{c}\right) \cdot \hat{k}$

OK, mas em muitos casos podemos fazer melhor do que isso.

Vamos supor que $\vec{k} \cdot \vec{x}'$ é sempre uma fase pequena, ou seja, que $\frac{\omega}{c} * d' \ll 1$

$$\Rightarrow e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}'} \simeq 1 - i\vec{k}\cdot\vec{x}' + \mathcal{O}\left(\frac{\omega^2 d'^2}{c^2}\right)$$

c GRANDE!

Assim, temos:

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \left(1 - i\vec{k}\cdot\vec{x}'\right) \vec{J}_\omega(\vec{x}')$$

$$\varphi_\omega(\vec{x}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \left(1 - i\vec{k}\cdot\vec{x}'\right) \rho_\omega(\vec{x}')$$

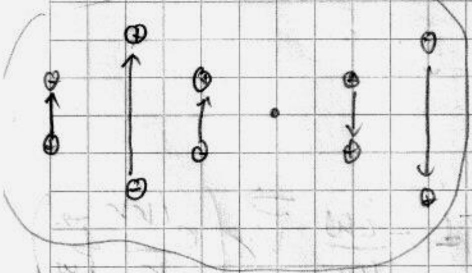
Agora temos:

1) $\int d^3r' \rho_\omega(\vec{r}') = Q$! $\Longrightarrow$ Só $Q = Q_0 = \text{const.}$, $\omega = 0$, $k = 0$, $\lambda \to \infty$ $\to$ Eletrostática

2) $$\int d^3r' \vec{J}_\omega(\vec{r}')_{(j)} = \int d^3r' \left[\vec{\nabla}'_{(i)} \cdot \left(\vec{r}'_{(j)} \vec{J}_\omega(\vec{r}')_{(i)} \right) - \vec{r}'_{(j)} \left(\vec{\nabla}'_{(i)} \cdot \vec{J}_\omega(\vec{r}')_{(i)} \right) \right]$$

$$= \cancelto{0}{\oint d\vec{S}' \cdot (\vec{r}' \cdot \vec{J}_\omega)} - \int d^3r' \, \vec{r}'_{(j)} \left(i\omega \rho_\omega(\vec{r}') \right)$$

Dipolo Oscilante, freq. $\omega = \frac{2\pi}{T}$



$$-i\omega \vec{p}_{\omega(j)}$$

$$= -i\omega \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}' \rho_\omega(\vec{r}')}_{\vec{p}_\omega}$$ Dipolo elétrico!

$$= -i\omega \vec{p}_\omega$$

3) $$\int d^3r' \left(-i\vec{k} \cdot \vec{r}' \right) \rho_\omega(\vec{r}') = -i\left(\frac{\omega}{c} \hat{n} \right) \cdot \int d^3r' \, \vec{r}' \rho_\omega(\vec{r}')$$

$$= -i\omega \vec{p}_\omega \cdot \left(\frac{\hat{n}}{c} \right)$$ Dipolo Elétrico!

4) $\int d^3r' \left(-i\vec{k} \cdot \vec{r}' \right) \vec{J}_\omega(\vec{r}')$ $\longleftarrow$ Dipolo Magnético

/ /

Campos Eletromagnéticos

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

"Impedância do vácuo" $= \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

$$\vec{E}_\omega = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\, \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{i}{k} Z_0\, \vec{\nabla} \times \vec{H}$$

1) Campos do monopolo: $\vec{E}_\omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$, $\vec{B} = 0$!

2) Campos gerado por um dipolo elétrico:

$$\vec{A}_\omega^{(dip)}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} * (-i\omega \vec{p}_\omega)$$

$$\vec{H}_\omega = \frac{1}{\cancel{\mu_0}} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\mu_0(-i\omega)}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} * \vec{p}_\omega \right) = -\frac{i\omega}{4\pi} \vec{\nabla} \times \left(\frac{e^{ikr}}{r} \vec{p}_\omega \right)$$

Mas $\vec{\nabla} \times (f(\vec{r}) . \vec{A}) = (\vec{\nabla} f) \times \vec{A}$ ← Mostre!

$$\Rightarrow \vec{H}_\omega^{(dip)} = \frac{k^2 c}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 + \frac{i}{kr}\right) \hat{r} \times \vec{p}_\omega$$

Além disso, temos que

$$\vec{E}_\omega^{(dip)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left\{ \left[3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}_\omega) - \vec{p}_\omega \right] \frac{1 - ikr}{r^2} - k^2 \hat{r} \times (\hat{r} \times \vec{p}_\omega) \right\}$$

tilibra

Ou seja, quando estamos muito longe da fonte, $r \gg \lambda$ $(kr \gg 1)$ temos:

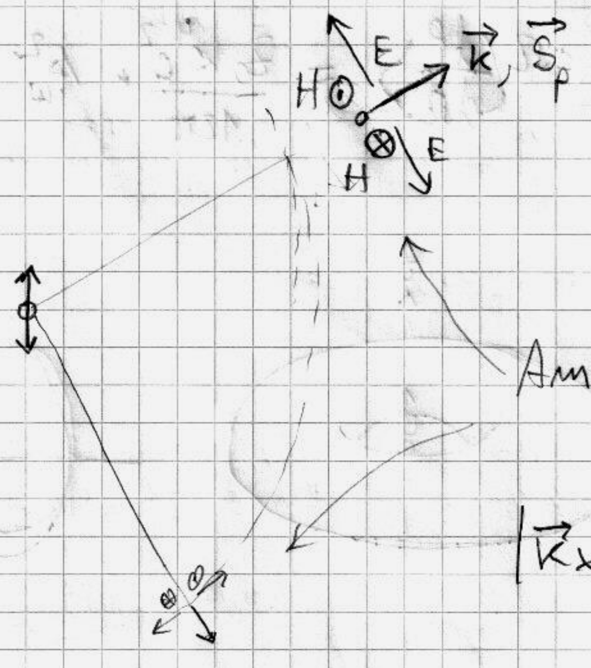
$$\vec{E}^{dip}_{\omega}(\vec{n}) \cong -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{k}\times(\vec{k}\times\vec{p}_{\omega}) \qquad \vec{k} = k\hat{n} = \frac{\omega}{c}\hat{x}$$

$$\vec{H}^{dip}_{\omega}(\vec{n}) \cong \frac{kc}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{k}\times\vec{p}_{\omega}$$

Ou seja, $\vec{E}^{dip}_{\omega} = \frac{Z_0}{k}\vec{H}^{dip}_{\omega}\times\vec{k}$ $\quad \left[Z_0 = \frac{c}{\epsilon_0}\right]$

Portanto,

$$\vec{S}_{p,\omega} = \vec{E}_{\omega}\times\vec{H}_{\omega} = \frac{Z_0}{k}|\vec{H}_{\omega}|^2\vec{k} \quad !$$



Amplitude de $\vec{H}$ e $\vec{E}$ $\sim$ senθ!

$|\vec{k}\times\vec{p}_{\omega}| = k\,p_{\omega}\cdot$sen$\theta$

Potência irradiada

$$P = -\oint d\vec{S} \cdot \vec{S}_p \qquad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Numa esfera de raio r, $d\vec{S} = r^2 d\Omega \, \hat{r}$

Mostre que:

$$* \quad \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t = \frac{Z_0 k^4 c^2}{32\pi^2} \underbrace{\left| \hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{p}_\omega) \right|^2}_{p_\omega^2 * \sin^2\theta}$$

$$* \quad \langle P \rangle_t = \int d\Omega \left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle_t = \frac{Z_0 k^4 c^2}{12\pi} * p_\omega^2$$