

MAT-2454 – CÁLCULO II

AULA 03: FUNÇÕES DE \mathbb{R}^2 EM \mathbb{R}

Alexandre Lyberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

- Domínio: um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$;
- Contradomínio: a reta real \mathbb{R} ;
- Imagem: $\text{Im } f = \{z \in \mathbb{R} : z = f(x, y), \text{ com } (x, y) \in A\}$.

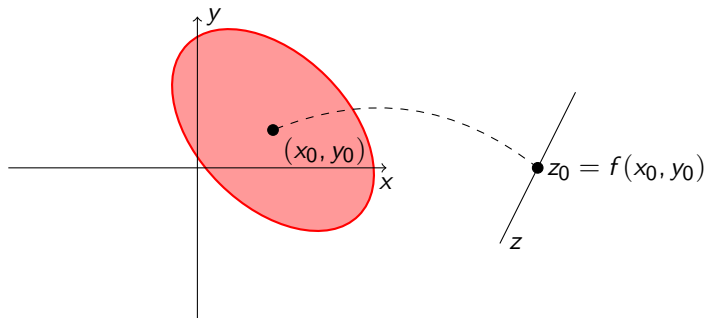


FIGURE: Domínio e Contradomínio de uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

GRÁFICO DE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- Gráfico: $\text{Gr } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: (x, y) \in A \text{ e } z = f(x, y)\}$;
- É um caso particular de superfície em \mathbb{R}^3 ;

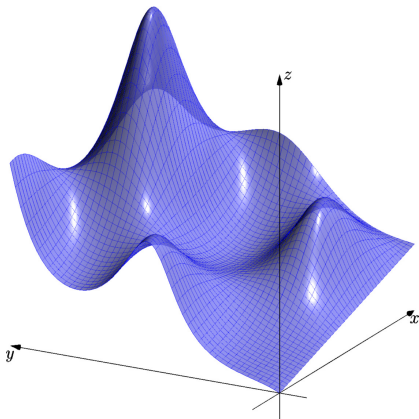


FIGURE: Gráfico de $f(x, y) = \frac{x + y}{2 + \cos(x) \sin(y)}$.

CURVAS DE NÍVEL

- Sejam $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $c \in \mathbb{R}$;
- A curva de nível c de f é o conjunto $f^{-1}(c) = \{(x, y) \in A: f(x, y) = c\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Tipicamente é uma curva, mas pode ser o conjunto vazio.

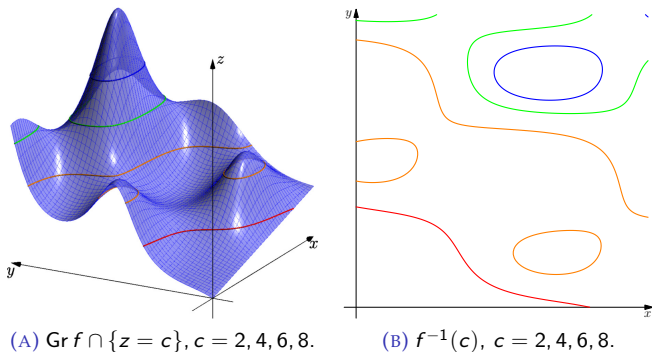


FIGURE: Um gráfico e suas curvas de nível

- Determinemos as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$:
- Para cada $c \in \mathbb{R}$, procuramos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f(x, y) = c$, ou seja $x^2 + y^2 = c$;
- Se $c < 0$ então $f^{-1}(c) = \emptyset$;
- $f^{-1}(0) = \{(0, 0)\}$ e
- se $c > 0$ então $x^2 + y^2 = c$ descreve circunferências concêntricas, centradas na origem, de raio \sqrt{c} .
- Conclusão: $\text{Gr } f$ é uma “pilha” de círculos de raio crescente. Tente esboçar...
- Tente, com essa mesma ideia, enxergar o gráfico de $f(x, y) = y^2 - x^2$.

ATIVIDADES

- Ex. 1.9, itens a, b e c (esboçar o domínio);
- Ex. 1.10, itens a e c;
- Ex. 1.11, item b;
- Desafios: 1.13 e 1.14.

- Aula presencial;
- H. L. Guidorizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 8.1 e 8.2;**
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seções 14.1.**

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br