MAT-2454 – Cálculo II
Aula 02: Parametrização de curvas

Alexandre Lymberopoulos

Para Escola Politécnica – USP

IME–USP — Departamento de Matemática

- Parametrizar uma curva: determinar as coordenadas de cada ponto da curva através de um parâmetro.
- Este parâmetro tipicamente varia num intervalo de números reais.

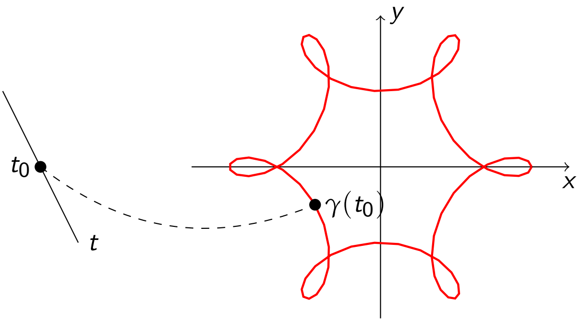


Figure: Domínio e Contradomínio de uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

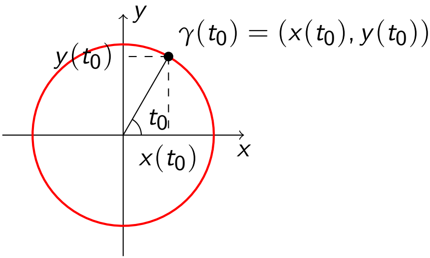
Exemplo Simples: uma reta

- Parametrize a reta que passa pelos pontos $(1,2)$ e $(3,4)$.
- Como esta curva é o gráfico de uma função real podemos escrever seus pontos na forma $(x, f(x))$, onde $f(x)$ é a função linear tal que $f(1) = 2$ e $f(3) = 4$, ou seja $f(x) = x + 1$.
- Assim, $\gamma_1(t) = (t, f(t)) = (t, t+1)$, $t \in \mathbb{R}$ é uma parametrização regular (vetor tangente definido e não nulo em todos os pontos) da reta em questão.
- Alternativa: a reta dada pode ser descrita em termos de um pontos e um vetor diretor, $(1,2)$ e $(2,2)$, respectivamente. Assim $\gamma_2(t) = (1,2) + t(2,2)$, $t \in \mathbb{R}$, também parametriza a curva em questão, com vetor velocidade $\gamma'(t) = (2,2)$.
- Alternativa 2: a mesma reta tambem pode ser descrita com o ponto $(1,2)$ e o vetor $(1,1)$: $\gamma_3(t) = (1,2) + t(1,1)$, $t \in \mathbb{R}$.
- Qual a diferença entre as duas parametrizações?

AINDA SIMPLES: UM SEGMENTO DE RETA

- Como parametrizar apenas o segmento entre os pontos $(1,2)$ e $(3,4)$?
- Uma possibilidade é $\eta_1(t) = (t, t+1)$, $t \in [1,3]$.
- Outra: $\eta_2(t) = (1,2) + t(1,1)$, $t \in [0,2]$.
- Você consegue achar uma terceira opção, com $t \in [0,1]$? Qual a diferença "física" entre elas?
- Analise o sentido se percurso da curva.
- Você consegue uma parametrização que percorra a curva no sentido contrário?

- Parametrizar uma círculo, centrado na origem e de raio $r > 0$: $x^2 + y^2 = r^2$.
- Procuramos funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfaçam a equação que define a curva.
- Neste caso o parâmetro t pode ser obtido da própria geometria:



Curvas que não são gráficos II

- É natural considerar então $x(t) = r\cos(t)$ e $y(t) = r\sin(t)$, que verifica $x^2(t) + y^2(t) = r^2$.
- Qual o sentido da curva assim parametrizada?
- O que acontece se trocarmos as coordenadas de lugar?
- E se multiplicamos t por uma constante $\omega \in \mathbb{R}$ (positiva ou negativa)?
- Você consegue uma mesma parametrização desta curva, mas percorrida em sentido contrário?
- Por que não podemos escrever algo como $\left(t, \pm\sqrt{r^2 - t^2}\right)$, $-r \leq t \leq r$?

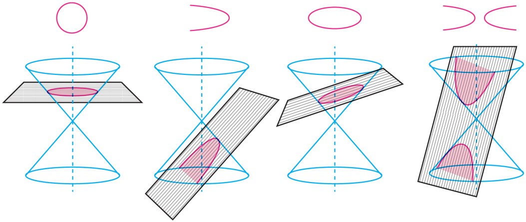
Atividades:

Trabalhe os seguintes exercícios da lista 1:

- 1.2-b;
- 1.6;
- 1.7 (veja a curva "em ação" aqui; do ex. 1.6 aqui);
- 1.8.

Cônicas

- Podem ser obtidas como cortes do cone por diferentes planos em $\mathbb{R}^3$:



- Como lugares geométricos no plano: para isso clique aqui.
- As equações reduzidas estão aqui.

- Exemplo: exercício 1.2-c, ou seja, $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{(x-1)^2}{4} = 1$, $y < 0$.
- Veja como uma diferença de quadrados: $\left(\frac{y}{3}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = 1$.
- Como $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ e $\cosh(t) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$-cosh(t) = \frac{y(t)}{3} \quad \text{e} \quad \sinh(t) = \frac{x(t)-1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

  e então

$$\gamma(t) = \big(1 + 2\sinh(t), -3\cosh(t)\big), \quad t \in \mathbb{R}$$

  parametriza este ramo da hipérbole, percorrido "da esquerda para a direita" (por que?);
- É possível parametrizar os dois ramos da hipérbole com uma única curva parametrizada?

Sua vez!

Trabalhe os demais itens do exercício 1.2 da lista 1.

REFERÊNCIAS

- Aula presencial;
- H. L. Guidorrizi, *Um curso de Cálculo*, vol. 2, 5ª. edição, LTC - São Paulo, 2001. **Seções 7.1 a 7.5**;
- J. Stewart, *Cálculo*, Vol. 2, 7ª. edição, Cengage-Learning - São Paulo, 2013. **Seções 10.1, 10.2 e 10.5**.

Até a próxima aula!

lymber@ime.usp.br