

ACH3553 - Estatística I

Aulas 10 e 11: Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

Alexandre Ribeiro Leichsenring
alexandre.leichsenring@usp.br

Organização

1 Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Distribuição Bernoulli
- Distribuição Binomial

Organização

1 Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Distribuição Bernoulli
- Distribuição Binomial

Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos.
- A construção de modelos probabilísticos para situações reais depende de um estudo pormenorizado dessas variáveis.
- Vamos estudar alguns modelos.

Organização

1 Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Distribuição Bernoulli
- Distribuição Binomial

Distribuição Bernoulli

Muitos experimentos são tais que a os resultados apresentam ou não uma determinada característica.

Exemplo

- Uma moeda é lançada: o resultado é cara, ou não;
- Um dado é lançado: ou ocorre 6 ou não;
- Uma peça é escolhida ao acaso de um lote com 500 peças: a peça é defeituosa ou não;
- Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma comunidade e verifica-se se ela é favorável ou não a um determinado projeto.

Em todos esses casos, estamos interessados na ocorrência de:

- *sucesso* (cara, face 6, etc.); ou
- *fracasso* (coroa, face diferente de 5, etc.).

Para cada experimento acima, podemos definir uma v.a. X , que assume apenas dois valores:

- 1, se ocorrer sucesso;
- 0, se ocorrer fracasso.

Distribuição Bernoulli

Suponha que um experimento pode resultar num *fracasso* ou num *sucesso*.

- $X = 1$ quando o resultado é um sucesso;
- $X = 0$ quando é fracasso.

Vamos supor que:

$$\begin{cases} X = 1, & \text{com probabilidade } p \\ X = 0, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

Dizemos que X tem distribuição *Bernoulli* com parâmetro p .

Representamos $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Exemplo

- a) Lançamento de uma moeda: o lançamento resulta em

$$\begin{cases} \textit{cara}, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \\ \textit{coroa}, & \text{com probabilidade } \frac{1}{2} \end{cases}$$

- b) No lançamento de uma dado a probabilidade de que saia um 6 é $\frac{1}{6}$, enquanto a probabilidade de que saia qualquer outro resultado é $\frac{5}{6}$.
- c) Seleccionamos uma pessoa ao acaso e verificamos se ela é favorável a um determinado projeto:

$$\begin{cases} \textit{favorável}, & \text{com probabilidade } p \\ \textit{contra}, & \text{com probabilidade } 1 - p \end{cases}$$

Distribuição da Bernoulli

Definição

Uma variável aleatória X tem distribuição Bernoulli se sua função de distribuição de probabilidades é dada por

X	1	0
$P(X = x)$	p	$1 - p$

Além disso, valem as seguintes propriedades:

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1 - p)$

Organização

1 Modelos para Variáveis Aleatórias Discretas

- Distribuição Bernoulli
- Distribuição Binomial

Distribuição Binomial

Suponha n ensaios de Bernoulli independentes, ou seja:

- Cada ensaio resulta em sucesso com probabilidade p e fracasso com probabilidade $1 - p$
- Ensaio independentes

Seja X o número de sucessos nos n ensaios. Dizemos que X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p . Representamos

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Exemplo

- Número de caras em 3 lançamentos de moeda;
- Número de homens entre duas pessoas selecionadas aleatoriamente;
- O número de 6's obtidos em 3 lançamentos de dado.

Distribuição Binomial

Se uma v.a. X tem distribuição Binomial com parâmetros n e p , então sua distribuição é dada por:

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

⇒ X corresponde ao número de *sucessos* em n ensaios independentes com probabilidade de sucesso p .

Exemplo

Jogamos um dado 4 vezes. Vamos calcular a distribuição do número de 6's obtidos nos 4 lançamentos.

Solução Seja X o número de 6's obtidos. Então $X \sim \text{Bin}\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-0} = 0,4822$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = 0,3858$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-2} = 0,1157$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = 0,0154$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-4} = 0,0008$$

Exemplo

Jogamos um dado 4 vezes. Vamos calcular a distribuição do número de 6's obtidos nos 4 lançamentos.

Solução Seja X o número de 6's obtidos. Então $X \sim \text{Bin}\left(4, \frac{1}{6}\right)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-0} = 0,4822$$

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = 0,3858$$

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-2} = 0,1157$$

$$P(X = 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = 0,0154$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-4} = 0,0008$$

Exemplo

Uma companhia produz comprimidos vendidos em caixas de 10. Se cada comprimido está fora da especificação com probabilidade 0,01 independentemente dos demais, calcule a probabilidade de que haja pelo menos 1 comprimido fora da especificação numa caixa com 10.

Solução Se X é o número de comprimidos fora da especificação numa caixa, então $X \sim \text{Bin}(10; 0,01)$. Queremos $P(X \geq 1)$:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} (0,01)^0 (0,99)^{10} = 0,9044$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,9044 = 0,0956$$

Exemplo

Uma companhia produz comprimidos vendidos em caixas de 10. Se cada comprimido está fora da especificação com probabilidade 0,01 independentemente dos demais, calcule a probabilidade de que haja pelo menos 1 comprimido fora da especificação numa caixa com 10.

Solução Se X é o número de comprimidos fora da especificação numa caixa, então $X \sim \text{Bin}(10; 0,01)$. Queremos $\mathbf{P}(X \geq 1)$:

$$\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbf{P}(X < 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0)$$

$$\mathbf{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (0,01)^0 (0,99)^{10} = 0,9044$$

$$\mathbf{P}(X \geq 1) = 1 - 0,9044 = 0,0956$$

Exemplo do apostador

O apostador escolhe um número entre 1 e 6. Um dado é jogado 3 vezes, e se o número escolhido por ele sair i vezes, ele ganha i reais. Por outro lado, se não sair nenhuma vez ele perde 1 real. O jogo é justo?

Solução Pra saber se o jogo é justo ou não, devemos calcular a esperança do ganho.

Seja X o número de vezes que sai o número escolhido pelo apostador. Então $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{6}\right)$. Seja Y o do ganho do apostador em cada aposta, então:

$$P(Y = -1) = P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(Y = 2) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(Y = 3) = P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

A esperança do ganho é:

$$E(Y) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$$

Exemplo do apostador

O apostador escolhe um número entre 1 e 6. Um dado é jogado 3 vezes, e se o número escolhido por ele sair i vezes, ele ganha i reais. Por outro lado, se não sair nenhuma vez ele perde 1 real. O jogo é justo?

Solução Pra saber se o jogo é justo ou não, devemos calcular a esperança do ganho.

Seja X o número de vezes que sai o número escolhido pelo apostador. Então

$X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{6}\right)$. Seja Y o do ganho do apostador em cada aposta, então:

$$P(Y = -1) = P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(Y = 2) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}$$

$$P(Y = 3) = P(X = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

A esperança do ganho é:

$$E(Y) = -1 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{75}{216} + 2 \times \frac{15}{216} + 3 \times \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$$

Propriedades da Binomial

Esperança e Variância

- $E(X) = np$
- $Var(X) = np(1 - p)$

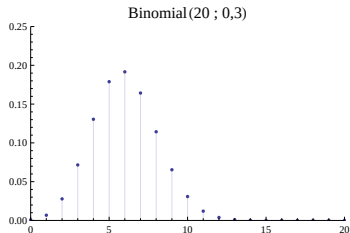
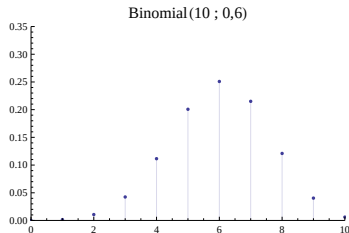


Gráfico da distribuição binomial.

Exercícios

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

- a) zero peças defeituosas;
- b) uma peça defeituosa;
- c) pelo menos 2 peças defeituosas.
- d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônibus desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido.

- a) O que você acha que é maior, $E(X)$ ou $E(Y)$?
- b) Calcule $E(X)$ e $E(Y)$.

Resolução

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Solução O sistema funciona se funcionam pelo menos 3 componentes. Seja X o número de componentes que funcionam. O que queremos é $P(X \geq 3)$:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Mas $X \sim \text{Bin}(5, \frac{5}{6})$. Então,

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 0,1607$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-4} \approx 0,4019$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-5} \approx 0,4019$$

Logo, $P(X \geq 3) = 0,1607 + 0,4019 + 0,4019 \approx 0,9645$.

Resolução

Exercício 1

Um sistema de comunicação tem 5 componentes e cada um funciona independentemente dos demais com probabilidade $\frac{5}{6}$. O sistema funciona se pelo menos metade dos componentes funcionam. Calcule a probabilidade de que o sistema funcione.

Solução O sistema funciona se funcionam pelo menos 3 componentes. Seja X o número de componentes que funcionam. O que queremos é $P(X \geq 3)$:

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

Mas $X \sim \text{Bin}(5, \frac{5}{6})$. Então,

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-3} \approx 0,1607$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-4} \approx 0,4019$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^5 \left(1 - \frac{5}{6}\right)^{5-5} \approx 0,4019$$

$$\text{Logo, } P(X \geq 3) = 0,1607 + 0,4019 + 0,4019 \approx 0,9645.$$

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

- a) zero peças defeituosas;
- b) uma peça defeituosa;
- c) pelo menos 2 peças defeituosas;
- d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Solução Seja X o número de peças defeituosas num lote. Então $X \sim \text{Bin}(10; 0,1)$.

- a) $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (0,1)^0 (0,9)^{10} \approx 0,3487$
- b) $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{10}{1} (0,1)^1 (0,9)^9 \approx 0,3874$
- c) $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X < 2) = 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] = 1 - [0,3487 + 0,3874] \approx 0,2639$
- d) Defina Y = número de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Então $Y \sim \text{Bin}(100; 0,1)$. Logo,

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0,1 = 10$$

Exercício 2

Cada peça produzida por uma fábrica vem com defeito com probabilidade 0,1, independentemente das outras peças. Calcule a probabilidade de que num lote de 10 peças haja:

- a) zero peças defeituosas;
- b) uma peça defeituosa;
- c) pelo menos 2 peças defeituosas;
- d) Calcule também o número esperado de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Solução Seja X o número de peças defeituosas num lote. Então $X \sim \text{Bin}(10; 0, 1)$.

- a) $\mathbf{P}(X = 0) = \binom{10}{0} (0, 1)^0 (0, 9)^{10} \approx 0, 3487$
- b) $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{10}{1} (0, 1)^1 (0, 9)^9 \approx 0, 3874$
- c) $\mathbf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbf{P}(X < 2) = 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1)] = 1 - [0, 3487 + 0, 3874] \approx 0, 2639$
- d) Defina Y = número de peças defeituosas num lote de 100 peças.

Então $Y \sim \text{Bin}(100; 0, 1)$. Logo,

$$\mathbf{E}(Y) = n \cdot p = 100 \cdot 0, 1 = 10$$

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônibus desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido. Calcule $E(X)$ e $E(Y)$.

Solução Para calcular $E(X)$ precisamos da distribuição de X .

$X \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$P(X = 40) = \frac{40}{148}; \quad P(X = 33) = \frac{33}{148}; \quad P(X = 25) = \frac{25}{148}; \quad P(X = 50) = \frac{50}{148}.$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 25 \cdot P(X = 25) + 33 \cdot P(X = 33) + 40 \cdot P(X = 40) + 50 \cdot P(X = 50) \\ &= 25 \cdot \frac{25}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 40 \cdot \frac{40}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \\ &\approx 39,28 \end{aligned}$$

Exercício 3

Um total de 4 ônibus carregam 148 torcedores indo para o estádio. Os ônibus carregam respectivamente 40, 33, 25 e 50 torcedores. Um torcedor é escolhido ao acaso entre os 148. Seja X o número de torcedores no ônibus desse torcedor escolhido. Um dos motoristas dos 4 ônibus também é aleatoriamente escolhido. Seja Y o número de torcedores do ônibus desse motorista escolhido. Calcule $E(X)$ e $E(Y)$.

Solução Para calcular $E(X)$ precisamos da distribuição de X .

$X \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$P(X = 40) = \frac{40}{148}; \quad P(X = 33) = \frac{33}{148}; \quad P(X = 25) = \frac{25}{148}; \quad P(X = 50) = \frac{50}{148}.$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_x x P(X = x) \\ &= 25 \cdot P(X = 25) + 33 \cdot P(X = 33) + 40 \cdot P(X = 40) + 50 \cdot P(X = 50) \\ &= 25 \cdot \frac{25}{148} + 33 \cdot \frac{33}{148} + 40 \cdot \frac{40}{148} + 50 \cdot \frac{50}{148} \\ &\approx 39,28 \end{aligned}$$

Continuação...

Para calcular $E(Y)$ precisamos da distribuição de Y .

$Y \in \{40, 33, 25, 50\}$:

$$P(X = 40) = P(X = 33) = P(X = 25) = P(X = 50) = \frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y P(Y = y) \\ &= 25 \cdot P(Y = 25) + 33 \cdot P(Y = 33) + 40 \cdot P(Y = 40) + 50 \cdot P(Y = 50) \\ &= 25 \cdot \frac{1}{4} + 33 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} + 50 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 37 \end{aligned}$$