ACH3553 - Estatística I

Aulas 7 e 8: Probabilidade

Alexandre Ribeiro Leichsenring
alexandre.leichsenring@usp.br

Organização

1. Introdução
2. Algumas propriedades
3. Probabilidade condicional
4. Independência

Introdução

Na primeira parte da matéria:

- Análise de um conjunto de dados por técnicas numéricas e gráficas permite boa ideia da distribuição do conjunto
- Distribuição de frequência: instrumento importante
- A partir das frequências observadas: medidas de posição e variabilidade
- Medidas calculada a partir de dados: *estimativas* de quantidades desconhecidas, geralmente retiradas de amostras
  - Frequências (relativas) na amostra são estimativas de frequências relativas na população

Probabilidade

- Podemos criar modelo teórico que reproduza a distribuição das frequências
- Tais modelos são chamados *modelos probabilísticos*
- Serão objetos de estudo na segunda parte da matéria

Probabilidade

Exemplo

Queremos estudar as frequências de ocorrências das faces de um dado.

Possível procedimento:

- Lançar o dado certo número de vezes, n
- Contar número de ocorrências n_i de cada face i, $i = 1, 2, \ldots, 6$
- Proporções $\frac{n_i}{n}$ determinam distribuição de frequências.

Obs: Lançando outra vez os dados, teríamos outra distribuição de frequências (provavelmente com um padrão semelhante ao anterior)

Probabilidade

Modelo probabilístico para o lançamento dos dados

Ao invés do modelo empírico, podemos construir um modelo probabilístico a partir de algumas premissas...

1. Só podem ocorrer 6 faces
2. O dado é equilibrado (não favorece nenhuma face)

A partir dessas suposições:

- Cada face deve ocorrer o mesmo número de vezes
- A proporção de ocorrência de cada face deve ser $\frac{1}{6}$

Modelo teórico (probabilístico) para o lançamento de um dado

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência teórica	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Probabilidade

Exemplo

De um grupo de duas mulheres (M) e três homens (H), uma pessoa vai ser sorteada para presidir uma reunião. Queremos saber a probabilidade de que o presidente seja do sexo masculino ou feminino.

Observamos que:

i) Ou a pessoa é do sexo masculino ou é do sexo feminino

ii) Supomos que o sorteio seja "honesto"

Construa a distribuição de probabilidades que representa o modelo probabilístico desse sorteio.

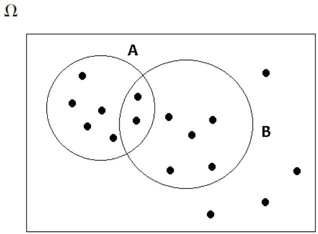
Probabilidade

No final das contas, todo experimento (ou fenômeno) aleatório (i.e., que envolve um elemento casual) tem seu modelo probabilístico especificado quando estabelecemos:

(a) Um *espaço amostral*, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots, \}$$

(b) Uma *probabilidade* , $\mathbf{P}(\omega)$, para cada ponto amostral, de maneira que seja possível encontrar $\mathbf{P}(A)$ para qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade do que chamaremos de *evento*.



Espaço amostral e eventos

Probabilidade

Exemplo

Uma população tem indivíduos favoráveis e contra um determinado projeto de lei. São selecionados ao acaso 3 indivíduos, e classificados como favoráveis (F) ou contra (C) o projeto.

O espaço amostral do experimento é:

$$\Omega = \{FFF, FFC, FCF, FCC, CFF, CFC, CCF, CCC\}$$

Se A designar o evento que consiste em obter dois indivíduos favoráveis, então:

$$A = \{FFC, FCF, CFF\}$$

Probabilidade

Exemplo

Considere o experimento que consiste em retirar uma lâmpada de um lote e medir seu “ tempo de vida” (em horas) antes de queimar. O espaço amostral pode ser descrito por:

$$\Omega = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\},$$

isto é, o conjunto dos números reais não negativos.

Obs: Este é um exemplo de um espaço amostral contínuo.

Probabilidade

Exercício

Defina o espaço amostral para cada um dos experimentos:

a) Numa pesquisa com famílias com três crianças, anota-se a configuração segundo o sexo.
b) Resultado do lançamento de duas moedas.
c) Resultado do lançamento de dois dados.
d) Lança-se dois dados e anota-se a soma dos resultados.

Algumas definições

Espaço amostral

É o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. É sempre denominado por Ω.

Exemplo

$$\Omega = \{\ Cara,\ Coroa\ \}$$

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega = \{k = i + j : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega = \{t : 0 \leq t < \infty\}$$

Evento

- É qualquer subconjunto do espaço amostral Ω.
- Dizemos que um evento A ocorreu se o resultado do experimento é um elemento de A.
- Denotaremos os eventos por letras maiúsculas ($A,\ B,\ C\ldots$).

Exemplos

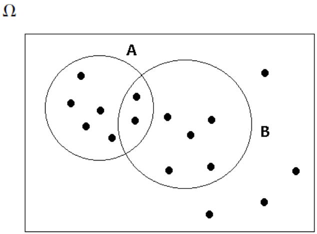
$A = \{\ Cara\ \}$
$B = \{\ Pelo\ menos\ uma\ face\ par\ no\ lançamento\ dos\ dois\ dados\ \}$
$C = \{\ A\ soma\ duas\ faces\ obtidas\ ser\ igual\ a\ 7\ \}$
$D = \{\ Passar\ menos\ de\ 1\ hora\ na\ fila\ \}$

Recordemos que todo experimento (ou fenômeno) aleatório (i.e., que envolve um elemento casual) tem seu modelo probabilístico especificado quando estabelecemos:

(a) Um *espaço amostral*, Ω, que consiste, no caso discreto, da enumeração de todos os resultados possíveis do experimento:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots, \}$$

(b) Uma *probabilidade* , $\mathbf{P}(\omega)$, para cada ponto amostral, de maneira que seja possível encontrar $\mathbf{P}(A)$ para qualquer subconjunto A de Ω, isto é, a probabilidade do que chamaremos de *evento*.



Espaço amostral e eventos

Exemplo

Lançamos uma moeda duas vezes. Se C indicar cara e R indicar coroa, então temos:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \{C, C\} \\ \omega_2 &= \{C, R\} \\ \omega_3 &= \{R, C\} \\ \omega_4 &= \{R, R\} \end{aligned}$$

É razoável supor que $\mathbf{P}(\omega_i) = \frac{1}{4}$.

Se A é o evento: *faces iguais nos dois lançamentos*, então:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{\omega_1, \omega_2\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

De modo geral, se A é um evento de Ω,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_i \mathbf{P}(\omega_i)$$

onde a soma é sobre todos os elementos $\omega_i \in A$

Organização

1 Introdução

2 Algumas propriedades

3 Probabilidade condicional

4 Independência

Algumas propriedades das probabilidades

(1) Para qualquer evento A, $0 \leq \mathbf{P}(A) \leq 1$.

(2) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$

Observação

- O modelo probabilístico é um modelo teórico para as frequências relativas;
- A probabilidade é uma função $\mathbf{P}(.)$ associada a cada evento A de Ω.

Exemplo

Considere os seguintes dados referentes a alunos matriculados em 4 cursos num dado ano.

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total
Matemática Pura (*M*)	70	40	110
Matemática Aplicada (*A*)	15	15	30
Estatística (*E*)	10	20	30
Computação (*C*)	20	10	30
Total	115	85	200

Escolhemos aleatoriamente um aluno desses 4 cursos. Considere o seguinte evento:

- M: o aluno é da Matemática Pura
- E sejam A, E, C, H, M os eventos análogos

Logo:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{30}{200}$$

$$\mathbf{P}(H) = \frac{115}{200}$$

União e intersecção

Dados os eventos A e H, podemos definir dois novos eventos:

$A \cup H$: **união** dos dois eventos (pelo menos um dos dois ocorre)

$A \cap H$: **intersecção** dos dois eventos (os dois ocorrem simultaneamente)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap H) &= \frac{15}{200} \\ \mathbf{P}(A \cup H) &= \ ? \end{aligned}$$

$$\mathbf{P}(A \cup H) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(H) - \mathbf{P}(A \cap H)$$

Logo,

$$\mathbf{P}(A \cup H) = \frac{30}{200} + \frac{115}{200} - \frac{15}{200} = \frac{130}{200}$$

Outras propriedades da Probabilidade

Considere A e B conjuntos de Ω. Então,

i) Se $A \subset B$, então $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

ii) $\mathbf{P}(A^c) = 1 - P(A)$.

iii) $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Para dois conjuntos A e B, mostre que

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Espaços amostrais com resultados equiprováveis

Considere a seguinte situação:

- Temos um espaço amostral finito, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$
- Todos os pontos têm a mesma probabilidade $\frac{1}{n}$

Então, para qualquer evento A:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{\text{número de elementos em } A}{\text{número de elementos em } \Omega}.$$

Exemplo

Se A for um evento contendo m pontos amostrais, então

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}$$

Exemplo

Dois dados são lançados, qual a probabilidade de que a soma das faces obtidas seja igual a 7?

Solução

Assumimos que os 36 possíveis resultados são equiprováveis. O evento de interesse contém 6 resultados:

$$(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Assim, a probabilidade deste evento é $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Exemplo

Se n pessoas estão presentes numa sala, qual a probabilidade de que ninguém faça aniversário na mesma data?

Solução Seja N o evento "nenhum aniversário no mesmo dia".

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N) &= \frac{(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)}{(365)^n} \\ &= \frac{365!}{(365)^n(365-n)!}. \end{aligned}$$

Exemplo

Se n pessoas estão presentes numa sala, qual a probabilidade de que ninguém faça aniversário na mesma data?

Solução Seja N o evento "nenhum aniversário no mesmo dia".

$$\mathbf{P}(N) = \frac{(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)}{(365)^n} = \frac{365!}{(365)^n(365-n)!}.$$

Exercício

Num clube, 40% dos sócios praticam futebol e 15% praticam vôlei. Os que praticam futebol e vôlei são 10%. Escolhido um sócio ao acaso, qual a probabilidade de que ele não jogue nem futebol nem vôlei?

Organização

1 Introdução

2 Algumas propriedades

3 Probabilidade condicional

4 Independência

Probabilidade condicional

Voltemos aos dados dos alunos.

Curso \ Sexo	Homens (H)	Mulheres (F)	Total
Matemática Pura (M)	70	40	110
Matemática Aplicada (A)	15	15	30
Estatística (E)	10	20	30
Computação (C)	20	10	30
Total	115	85	200

Dado que um estudante, escolhido ao acaso, esteja no curso de estatística, a probabilidade de que seja mulher é $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. Escrevemos:

$$\mathbf{P}(\text{Mulher} \mid \text{Estatística}) = \frac{2}{3}$$

Probabilidade condicional

Para dois eventos A e B, a *probabilidade condicional de A dado B*, $\mathbf{P}(A|B)$, é definida por:

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \tag{1}$$

para os eventos B tais que $\mathbf{P}(B) > 0$.

Para o exemplo anterior, se:

A = Estudante é mulher

B = Estudante está matriculad@ em estatística

Então,

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{20}{200}$$
$$\mathbf{P}(B) = \frac{30}{200}$$

Logo,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\frac{20}{200}}{\frac{30}{200}} = \frac{2}{3}$$

Regra do produto da probabilidade

Da relação (1), obtemos a seguinte expressão:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) \qquad (2)$$

Exemplo

Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). São sortedas duas bolas ao acaso, *sem reposição*. Calcule a probabilidade de que a 2^a bola seja branca.

Solução

O diagrama abaixo ilustra as possibilidades (para as segundas bolas, as probabilidades são condicionais).

$$\mathbf{P}(2^a \text{ bola branca}) = \mathbf{P}(BB) + \mathbf{P}(VB)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(BB) &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \\ \mathbf{P}(VB) &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Logo

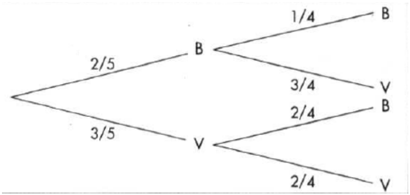
$$\mathbf{P}(2^a \text{bola branca}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Exemplo

Uma urna contém duas bolas brancas (B) e três bolas vermelhas (V). São sortedas duas bolas ao acaso, *sem reposição*. Calcule a probabilidade de que a 2^a bola seja branca.

Solução

O diagrama abaixo ilustra as possibilidades (para as segundas bolas, as probabilidades são condicionais).



$$\mathbf{P}(2^a \text{ bola branca}) = \mathbf{P}(BB) + \mathbf{P}(VB)$$

$$\mathbf{P}(BB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$\mathbf{P}(VB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

Logo

$$\mathbf{P}(2^a \text{bola branca}) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10}$$

Exemplo

Imagine, agora, que as duas extrações são feitas da mesma urna do exemplo anterior, mas que primeira a bola é *reposta* antes extração da segunda. Nessas condições, as extrações são independentes, pois o resultado da primeira extração não influencia o resultado da segunda extração.

Solução

O diagrama abaixo ilustra as possibilidades para a extração *com reposição*.

Nesse caso,

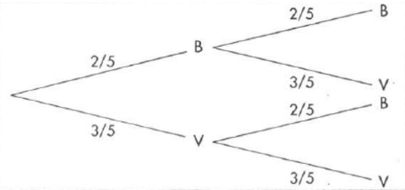
$$\mathbf{P}(2^a \text{ bola branca}) = \frac{2}{5}$$

Exemplo

Imagine, agora, que as duas extrações são feitas da mesma urna do exemplo anterior, mas que primeira a bola é *reposta* antes extração da segunda. Nessas condições, as extrações são independentes, pois o resultado da primeira extração não influencia o resultado da segunda extração.

Solução

O diagrama abaixo ilustra as possibilidades para a extração *com reposição*.



Nesse caso,

$$\mathbf{P}(2^a \text{ bola branca}) = \frac{2}{5}$$

Observe no exemplo anterior que

$$\mathbf{P}(\text{branca na } 2^a | \text{branca na } 1^a) = \frac{2}{5} = \mathbf{P}(\text{branca na } 2^a)$$

Ou seja, se indicarmos os seguintes eventos:

A : Bola branca na 2^a extração

B : Bola branca na 1^a extração

Então:

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A)$$

Nesse caso, dizemos que o evento A *independe* do evento B, e se usarmos a regra do produto (equação 2), obtemos:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$$

Organização

1 Introdução

2 Algumas propriedades

3 Probabilidade condicional

4 Independência

Independência

Independência (definição matemática)

Dizemos que os eventos A e B são *independentes* se a informação da ocorrência de B não altera a probabilidade atribuída ao evento A. Isto é,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A).$$

Outra forma

Outra forma equivalente de definir independência é dizer que A e B são independentes se

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Exemplo

Retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos:

- *A = a carta é um ás;*
- *B = a carta é de espadas.*

A e B são independentes?

Solução Sim, pois

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{52}\ , \quad \mathbf{P}(B) = \frac{13}{52}\ , \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Exemplo

Retiramos uma carta de um baralho de 52 cartas. Sejam os eventos:

- *A = a carta é um ás;*
- *B = a carta é de espadas.*

A e B são independentes?

Solução Sim, pois

$$\mathbf{P}(A) = \frac{4}{52}\ , \ \mathbf{P}(B) = \frac{13}{52}\ , \quad \text{e} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Observação

Independência é um conceito matemático.

Exemplo

Jogamos dois dados "honestos". Sejam:

- *A = o primeiro dado resulta em 4;*
- *B = a soma dos dados é 6.*

Os eventos A e B são independentes?

Exemplo

Agora seja

- *C = a soma dos dados é 7.*

A e C são independentes?

Observação

Independência é um conceito matemático.

Exemplo

Jogamos dois dados "honestos". Sejam:

- A = *o primeiro dado resulta em 4;*
- B = *a soma dos dados é 6.*

Os eventos A e B são independentes?

Exemplo

Agora seja

- C = *a soma dos dados é 7.*

A e C são independentes?

Observação

Independência é um conceito matemático.

Exemplo

Jogamos dois dados "honestos". Sejam:

- A = *o primeiro dado resulta em 4;*
- B = *a soma dos dados é 6.*

Os eventos A *e* B *são independentes?*

Exemplo

Agora seja

- C = *a soma dos dados é 7.*

A *e* C *são independentes?*

Podemos estender a definição de independência para 3 eventos:

Definição

Três eventos A, B e C são independentes se

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) \\
\mathbf{P}(A \cap B) &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \\
\mathbf{P}(A \cap C) &= \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(C) \\
\mathbf{P}(B \cap C) &= \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)
\end{aligned}$$

Exercício

Jogamos uma moeda duas vezes. Sejam os eventos:

- A = *cara no primeiro lançamento;*
- B = *cara no segundo lançamento;*
- C = *cara nos dois lançamentos.*

A*,* B *e* C *são independentes?*