

No.

Date Laboratório de Matemática Aplicada (MAPO131)

André Salles de Carvalho - sala 287A

andre@ime.usp.br

informações do curso no moodle: edisciplinas.usp.br

• 2 provas + 1 sub

P₁: 09 de outubro

P₂: 27 de novembro (ou 25)

P_{sub}: 04 de dezembro

• listas de exercício valendo nota

• média: ?

• terá monitoria

Assuntos a serem discutidos

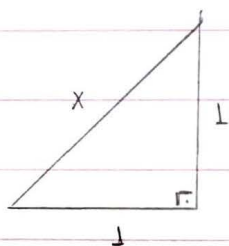
① números reais (e convergência)

② raízes de equações: métodos numéricos

③ álgebra linear - o que for preciso para:

↳ ④ métodos dos mínimos quadrados

↳ ⑤ cadeias de Markov



$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$x^2 = 2$$

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ inteiros

números racionais = $\frac{m}{n}$ onde m, n são inteiros

$$x^2 = 2$$

Existem inteiros m, n tais que $x = \frac{m}{n}$?

por contradição: suponha que existam m, n inteiros tais que $\frac{m}{n} = x$, isto é, $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$

Podemos supor que m, n não têm fatores primos em comum:

$$\begin{cases} m = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k} \\ n = q_1^{s_1} \cdot q_2^{s_2} \cdot \dots \cdot q_l^{s_l} \end{cases} \quad \text{> } p_i \neq q_j, \forall i, j$$

onde p_i, q_j são números primos e r_i, s_j são naturais ≥ 1

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2$$

$$p_1^{s_{11}} \cdot p_2^{s_{12}} \cdot \dots \cdot p_k^{s_{1k}} = 2^{s_{11}} \cdot q_1^{s_{11}} \cdot \dots \cdot q_l^{s_{1l}}$$

$$2^{s_{11}} \cdot p_1^{s_{12}} \cdot \dots \cdot p_k^{s_{1k}} = 2^{s_{21}} \cdot q_1^{s_{21}} \cdot \dots \cdot q_l^{s_{2l}}$$

contradição, pois $q_j \neq 2$

$$\underline{x^2 = 2}$$

$$\boxed{1 < x < 2} \quad \text{porque } 1^2 < x^2 < 2^2$$

$$(1,4)^2 = 1,96 < x^2 < (1,5)^2 = 2,25$$

$$\boxed{1,4 < x < 1,5}$$

$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0164$$

$$\boxed{1,41 < x < 1,42}$$

$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,002225$$

$$\boxed{1,414 < x < 1,415}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ 1,4 \\ 1,41 \\ 1,414 \end{array} \right\} < x < \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1,5 \\ 1,42 \\ 1,415 \end{array} \right.$$

Raízes de equações

$$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

$$\boxed{e^x \cdot \cos(x) + 1 = 0}$$

$$x < 0, 0 < e^x < 1 \Rightarrow |e^x \cdot \cos(x)| < 1$$

$$\Rightarrow e^x \cdot \cos(x) + 1 > 0, \text{ se } x < 0$$

No. _____

Date _____

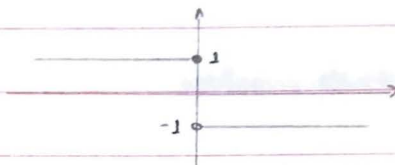
$$f(x) = e^x \cdot \cos(x) + 1$$

$$f(0) = 2$$

$$\exists \text{ raiz } \left\{ \begin{array}{l} f(1) = 2,4686... \\ f(2) = e^2 \cdot \cos(2) + 1 = -9,07... \end{array} \right.$$

$$\bar{x} \in [1, 2] \quad f(2) = e^2 \cdot \cos(2) + 1 = -9,07...$$

procurando valores de x para os quais $f(x) = 0$



• Teorema do Valor intermediário

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $a < \xi < b$ tal que $f(\xi) = 0$

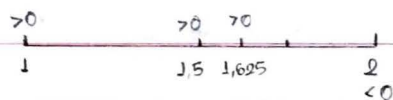
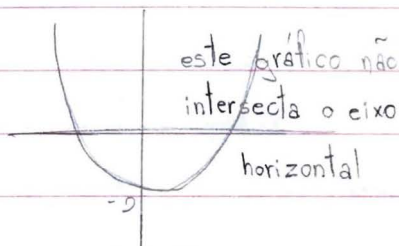
$$g(x) = x^2 - 2, \quad x \in \mathbb{Q}$$

$$f(1) > 0 \quad f(2) < 0$$

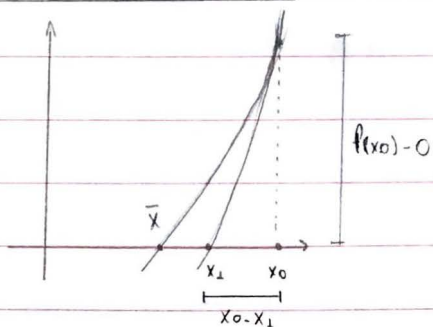
$$f\left(\frac{1+2}{2}\right) = f(1,5) = 1,3170 > 0$$

$$f\left(\frac{1,5+2}{2}\right) = f(1,75) = -0,025$$

$$f\left(\frac{1,5+1,75}{2}\right) = 0,7248$$



Método de Newton



$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

$$x_0 - x_1$$

$$\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = \varphi_f(x_0), \quad x_0 = \varphi_f(x_1), \quad \dots, \quad x_{n+1} = \varphi_f(x_n)$$

$$\text{Ex: } f(x) = x^2 - 2$$

$$\varphi_f(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{2x^2 - x^2 + 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$\Rightarrow \varphi_f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

$$\underbrace{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}_{\varphi_f(x_n)}$$

$$\text{onde } \varphi_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

No.

Date

começando com $x_0 = 2$

$$x_1 = \varphi(2) = 1,5$$

$$x_2 = 1,41666...$$

$$x_3 = 1,414215...$$

Sequência de Fibonacci

0 1 1 2 3 5 8 13 21 ...

$$k_{n+1} = k_n + k_{n-1}$$

$$\begin{bmatrix} k_{n+1} \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_n \\ k_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\exists \lambda > 1 \quad c \leq \frac{\lambda^n}{k_n} \leq C$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{n-1} \\ k_{n-2} \end{bmatrix} \\ &\vdots = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Descrição de um conjunto de axiomas para os números reais

Assumir que existe um conjunto $\mathbb{R}$ e assumir que este conjunto tem certas propriedades, isto é, satisfaz os axiomas a seguir

Axiomas de um corpo (field em inglês)

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{(soma)} \quad (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

$$(1) \text{ comutatividade: } x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

$$(2) \text{ associatividade: } x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \text{(produto)} \quad (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

$$(3) \text{ distributividade: } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$(4) \text{ existência de identidade: existem números reais } 0 \text{ e } 1$$

$$\text{tais que } \begin{cases} x + 0 = x, \forall x \in \mathbb{R} \\ x \cdot 1 = x, \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(5) existência de inversos:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + y = 0$$

$$\forall x \neq 0, \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \cdot y = 1$$

No.

Date

Teoremas:

1. $a + b = a + c \Rightarrow b = c$

corolário: 0 é único

2. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ existe um único $x \in \mathbb{R}$ tal que $a + x = b$. Denotamos $x = b - a$, o número 0 - a é denotado por $(-a)$

Prova de 1

Pelo axioma (5) existe um número real x tal que $x + a = 0$

$$a + b = a + c$$

$$x + (a + b) = x + (a + c)$$

$$(2) \quad (x + a) + b = (x + a) + c$$

$$(4) \quad 0 + b = 0 + c$$

$$b = c$$

Prove que 0 é único

Suponha que $0'$ também tem a propriedade (4)

$$0' + 0 = 0 \quad 0 + 0 = 0$$

$$0' + 0 = 0 + 0$$

$$0' + 0' = 0 + 0 \Rightarrow 0' = 0$$

Prova de 2

Dados a, b , tome y tal que $y + a = 0$ e defina $x = y + b$

$$a + x = a + (y + b) \stackrel{(2)}{=} (a + y) + b \stackrel{(1)}{=} 0 + b \stackrel{(4)}{=} b \quad \left. \begin{array}{l} a + x = a + z \\ x = z \end{array} \right\} \text{teorema 1}$$

Suponha que z seja tal que $a + z = b$

Note que $-a$ é o número com a propriedade:

$$a + (-a) = 0$$

corolário: Inverso aditivo é único:

$\forall a \in \mathbb{R}$, existe um único número $-a$ tal que $a + (-a) = 0$

3. $b - a = b + (-a)$

prova: $a + (b - a) = b$

$$a + (b + (-a)) \stackrel{(2)}{=} (a + b) + (-a) \stackrel{(1)}{=} (b + a) + (-a) \stackrel{(2)}{=} b + (a + (-a)) = b + 0 = b$$

portanto $a + (b - a) = a + (b + (-a))$

pelo teorema 1: $b - a = b + (-a)$

No.

Date

4. $-(-a) = a$

prova: $(-a) + (-(-a)) = 0$

$$(-a) + a = 0$$

$$a + (-a) = 0$$

$$(-a) + a = (-a) + (-(-a))$$

exercício: $C = \{0, 1\}$ $\mathbb{Z}_2$

duas operações $+$, $\cdot$:

$$+ : C \times C \rightarrow C$$

$$\cdot : C \times C \rightarrow C$$

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Este conjunto com estas operações satisfaz TODOS os 5 axiomas anteriores

$\mathbb{Z}_p$, p primo é um corpo

Axiomas de Ordem

conjunto dos números positivos

Existe um subconjunto $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

(6) Se $x, y \in \mathbb{R}_+$, $x+y, x \cdot y \in \mathbb{R}_+$

(7) $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}$, ou $x \in \mathbb{R}_+$ ou $(-x) \in \mathbb{R}_+$, mas não ambos

(8) $0 \notin \mathbb{R}_+$

Podemos definir uma ORDEM em $\mathbb{R}$ usando os axiomas (6), (7) e (8):

Uma relação $<$ entre dois números reais, satisfazendo:

(a) Se $x \neq y$ então $x < y$ ou $y < x$

(b) Se $x < y$, $y < z$ então $x < z$

transitividade

definição: $x < y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$

prova de (a) (isto é, se $x \neq y$ então ou $x < y$ ou $y < x$)

dados x, y , $x \neq y$, definimos $z = y - x$, $z = y + (-x)$

Se $z = 0$, então $y + (-x) = 0 \Rightarrow y = x$

como estamos supondo que $x \neq y \Rightarrow z \neq 0$, pelo axioma (7) ou $z \in \mathbb{R}_+$ ou $(-z) \in \mathbb{R}_+$, mas não ambos

Se $z \in \mathbb{R}_+$, $y - x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x < y$

Se $-z \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow -(y - x) \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x - y \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow y < x$

No.

Date

prova de (b): $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}_+$

$$y < z \Leftrightarrow z - y \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+ \ni (y-x) + (z-y) &= (y+(-x)) + (z+(-y)) = y + ((-x)+z) + (-y) = (y+(-y)) + ((-x)+z) = \\ \uparrow & \\ \text{axioma (6)} & \quad = (-x) + z = z - x \Rightarrow x < z \end{aligned}$$

Números inteiros

$$1, \underbrace{1+1}_2, \underbrace{(1+1)+1}_3, \underbrace{((1+1)+1)+1}_4$$

Chamamos $A \subset \mathbb{R}$ de conjunto INDUTIVO se

(i) $1 \in A$

(ii) Se $x \in A$ então $x+1 \in A$

exemplos: $\mathbb{R}$ é indutivo

$\mathbb{R}_+$ é indutivo (Prove que $1 \in \mathbb{R}_+$)

Teorema: Se A e B são conjuntos indutivos então $A \cap B$ é um conjunto indutivo

prova: (exercício)

Definimos:

$\mathbb{N}$ = interseção de todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$ = subconjunto de $\mathbb{R}$ cujos elementos estão em todos os subconjuntos indutivos de $\mathbb{R}$