

# LISTA #3 – Equações de diferenças

## PMR3409 – Controle II

Prof. Eduardo Cabral

1) Discretize no tempo os sistemas dinâmicos dados pelas seguintes funções de transferência usando os períodos de amostragens dados:

a)  $G(s) = \frac{e^{-s}}{10s + 1}$  ( $T = 1$  s)

b)  $G(s) = \frac{1}{s^2}$  ( $T = 1$  s)

c)  $G(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$  ( $T = 0,2$  s)

d)  $G(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$  ( $T = 0,2$  s)

e)  $G(s) = \frac{2s + 1,5}{s^2 + s + 1}$  ( $T = 0,1$  s)

2) Calcule os pólos e zeros dos sistemas em tempo discreto do problema 1 e verifique a estabilidade dos sistemas no domínio de tempo discreto.

3) Obtenha as equações de diferenças correspondentes aos sistemas do problema 1.

4) Ache a solução das equações de diferenças abaixo usando o método da Transformada Z e o método da recorrência. Compare os resultados obtidos com os dois métodos.

a)  $x(k) - x(k-1) + 0,25x(k-2) = u(k)$   
- Condições iniciais:  $x(0) = x(1) = 0$   
- Entrada:  $u(k) = 1$ , para  $k \geq 0$

b)  $x(k) = kx(k-1)$   
- Condições iniciais:  $x(0) = 1$

c)  $x(k) = x(k-1) + a^{k-1}$   
- Condições iniciais:  $x(k) = 0$  para  $k \leq 0$

d)  $x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = u(k)$   
- Condições iniciais:  $x(0) = x(1) = 1$   
- Entrada:  $u(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k \geq 1 \\ 0, & \text{para } k < 0 \end{cases}$

e)  $x(k) + x(k-1) + 0,5x(k-2) = u(k)$   
- Condições iniciais:  $x(0) = -1, x(1) = 1$   
- Entrada:  $u(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$

## Solução

$$1a) G(s) = \frac{1 - e^{-T/10}}{z - e^{-T/10}} = \frac{0,09516}{z - 0,9048}$$

$$1b) G(s) = \frac{T^2(z+1)/2}{z^2 - 2z + 1} = \frac{0,5z + 0,5}{z^2 - 2z + 1}$$

$$1c) G(s) = \frac{[1 - \cos(2T)](z+1)/2}{[z^2 - 2z \cos(2T) + 1]} = \frac{0,03947(z+1)}{[z^2 - 1,842z + 1]}$$

$$1d) G(s) = \frac{0,1947(z-1)}{[z^2 - 1,842z + 1]}$$

$$1e) G(s) = \frac{0,1973z - 0,183}{[z^2 - 1,895z + 0,9048]}$$

$$2a) \text{ polo} = e^{-T/10} = 0,9048$$

$$2b) \text{ polos}_{1,2} = 1, \text{ zero} = -1,$$

$$2c) \text{ polos} = 0,9211 \pm 0,3894j, \text{ zero} = -1$$

$$2d) \text{ polos} = 0,9211 \pm 0,3894j, \text{ zero} = 1$$

$$2e) \text{ polos} = 0,9477 \pm 0,08231j, \text{ zero} = 0,9277$$

$$3a) y(k) = 0,9048y(k-1) + 0,09516u(k-1)$$

$$3b) y(k) = 2y(k-1) - y(k-2) + 0,5u(k-1) + 0,5u(k-2)$$

$$3c) y(k) = 1,842y(k-1) - y(k-2) + 0,03947u(k-1) + 0,03947u(k-2)$$

$$3d) y(k) = 1,842y(k-1) - y(k-2) + 0,1947u(k-1) - 0,1947u(k-2)$$

$$3e) y(k) = 1,895y(k-1) - 0,9048y(k-2) + 0,1973u(k-1) - 0,183u(k-2)$$

$$4b) x(k) = k!, \text{ para } k \geq 1$$

$$4c) x(k) = \frac{a^k - 1}{a - 1}$$