Bolema, Ano 13, nº 14, pp. 66 a 91, 2000

ARTIGO CONVIDADO

Cenários[39] para Investigação

Ole Skovsmose[40]

RESUMO

Conforme observações efetivadas em diversos lugares, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Esse paradigma se diferencia do cenário para investigação, no qual os alunos são convidados a se envolverem em processos de exploração e argumentação justificada. A distinção entre o paradigma do exercício e o cenário para investigação é combinada com a diferença entre três tipos diferentes de referência: referência à matemática, referência à semi-realidade e referência à situação da vida real. Os seis possíveis ambientes de aprendizagem resultantes dessa combinação serão ilustrados através de exemplos.

Mover-se do paradigma do exercício em direção ao cenário para investigação pode contribuir para o enfraquecimento da autoridade da sala de aula tradicional de matemática e engajar os alunos ativamente em seus processos de aprendizagem. Mover-se da referência à matemática pura para a referência à vida real pode resultar em reflexões sobre a matemática e suas aplicações. Minha expectativa é que caminhar entre os diferentes ambientes de aprendizagem pode ser uma forma de engajar os alunos em ação e reflexão e, dessa maneira, dar à educação matemática uma dimensão crítica.

[39] A palavra "cenário" foi traduzida do inglês "*landscape*".

[40] Centre for Educational Development in University Science - Aalborg University
Fredrik Bajers Vej 7B
DK-9220 Aalborg East - Denmark
E-mail: osk@dcn.auc.dk

ABSTRACT

According to many observations, traditional mathematics education falls within the exercise paradigm. This paradigm is contrasted with landscapes of investigation serving as invitations for students to be involved in processes of exploration and explanation. The distinction between the exercise paradigm and landscapes of investigation is combined with a distinction between three different types of reference which might provide mathematical concepts and classroom activities with meaning: references to mathematics; references to a semi-reality; and references to a real-life situation. The six possible learning milieus are illustrated by examples.

Moving away from the exercise paradigm and in the direction of landscapes of investigation may help to abandon the authorities of the traditional mathematics classroom and to make students the acting subjects in their learning processes. Moving away from reference to pure mathematics and in the direction of real life references may help to provide resources for reflection on mathematics and its applications. My hope is that finding a route among the different milieus of learning may provide new resources for making the students both acting and reflecting and in this way providing mathematics education with a critical dimension.

1. Introdução

Nas suas observações de salas de aula inglesas, Cotton (1998) notou que a aula de matemática é dividida em duas partes: primeiro, o professor apresenta algumas idéias e técnicas matemáticas e, depois, os alunos trabalham com exercícios selecionados. Ele também observou que existem variações nesse mesmo padrão: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Geralmente, o livro didático representa as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificativa da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma, e somente uma, resposta correta.

O paradigma do exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação, que pode tomar muitas formas, como o trabalho de projeto na escola primária e secundária (Nielson, Patronis & Skovsmose 1999; Skovsmose, 1994) bem como no nível universitário (Vithal, Christiansen & Skovsmose, 1995). Em geral, o trabalho de projeto está localizado num ambiente de aprendizagem que difere do paradigma do exercício. É um ambiente que oferece recursos para fazer investigações.

Meu interesse numa abordagem de investigação tem relação com a educação matemática crítica, a qual pode ser caracterizada em termos de diferentes preocupações[41]. Uma delas é o desenvolvimento da *materacia*, vista como uma competência similar à *literacia* caracterizada por Freire. *Materacia* não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática. A Educação Matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia, implicando que as micro-sociedades de salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos de democracia. A Educação matemática crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou sócio-cultural). A Matemática em si é um tópico sobre o qual é preciso refletir. Ela é parte de nossa cultura tecnológica e exerce muitas funções, as quais podem ser mais bem caracterizadas por uma leve reformulação da Primeira Lei de Kranzberg: o que a matemática está produzindo não é bom nem ruim, nem é neutro (veja Kranzberg, 1997). D'Ambrósio (1994), usando uma formulação mais incisiva, enfatiza que a matemática é parte de nossas estruturas tecnológicas, militares, econômicas e políticas e como tal, um recurso tanto para maravilhas como para horrores[42]. Fazer uma crítica da matemática como parte da educação matemática é um interesse da educação matemática crítica. Parece não haver muito espaço no paradigma do exercício para que tais interesses

[41] Veja Skovsmose e Nielsen (1996).
[42] Veja também D'Ambrósio (1998) e Skovsmose (1998a, 1999b, no prelo).

sejam levados em conta.

A apresentação que segue é baseada parcialmente em meu trabalho com educação matemática através de projetos. Esse trabalho mantém vínculos com professores de contextos culturais, econômicos e políticos muito diferentes – Colômbia, África do Sul, Brasil, Inglaterra e Dinamarca- com os quais tenho discutido essas idéias. Sempre começo com um exemplo.

2. Um Exemplo

Chamo de cenário para investigação um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação[43]. Observemos uma interessante e antiga tabela de números, que provavelmente tem decorado as paredes de muitas salas de aula de matemática e servido de base para uma variedade de exercícios.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	...						

Figura 1: Uma interessante e antiga tabela de números.

[43] O exemplo seguinte é inspirado na Palestra de Ole Einar Torkildsen, durante a Conferência NOMUS, em Aalborg (Dinamarca), no ano de 1996.

Concentremo-nos em um retângulo colocado sobre a tabela. Se os números nos cantos do retângulo são indicados por *a, b, c* e *d*, é possível calcular o valor de F determinado por:

F = ac - bd **F = ac — bd.**

O retângulo pode ser transferido para outra posição e o valor de F=*ac-bd* pode ser calculado novamente.

Por exemplo, observamos que 22•34 - 24•32 = - 20 e 37•49 - 39•47 = - 20. Tentemos transladar o retângulo para uma posição diferente e calcular de novo o valor de F. A propósito, o que acontece se girarmos o retângulo em 90º e fizermos o mesmo cálculo? Bem... O que acontece se escolhermos um retângulo maior e fizermos uma translação semelhante? Qual será o valor de $F = ac - bd$? De que maneira o valor de F depende das dimensões do retângulo?

Naturalmente, é possível investigar translações de outras figuras. O que acontece se calcularmos os valores $F = ac - bd$, com *a, b, c* e *d* referindo-se aos números determinados pelos cantos das figuras mostradas abaixo (Figura 2)? Quais destas figuras podem ser "transladadas" sem alterações no valor de F?

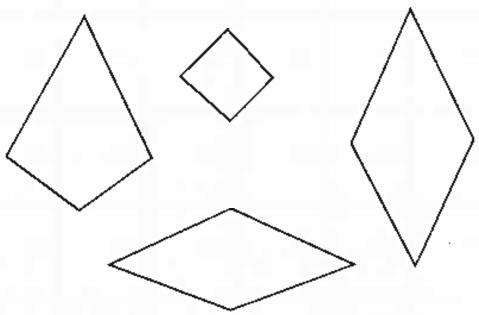

Figura 2: Outras figuras a serem transladadas.

Por que não investigar uma função diferente para F? Por exemplo, o que acontece se permutarmos as operações "subtração" e "multiplicação" e, em vez de $F = ac - bd$, calcularmos:

$G = (a - c)(b - d)$

(*a, b, c* e *d* referem-se aos cantos de um retângulo)? Será que G é

constante em todas as translações? Daria certo também para as figuras mostradas na Figura 2? Existem outras funções que são retângulos transladáveis (ou seja, cujo valor seja mantido constante durante a translação)? Sim, bem, há a função H definida como $H = 0a + 0b + 0c + 0d$. Mas será que não existem funções para retângulos "transladáveis" mais interessantes? Considerando que achamos uma dessas funções, ela seria também um losango transladável? Uma função associada a um retângulo transladável seria também associada a um losango transladável? Em termos mais gerais: que funções fazem quais figuras transladáveis?

E se considerarmos os números negativos? Nesse caso, a tabela de números da Figura 1 poderia ser prolongada, acrescentando números à esquerda e à direita de cada linha. Podemos, então, considerar translações as que tragam as figuras para regiões com números negativos (Figura 3). A propósito, o que aconteceria se a tabela fosse disposta como mostrada na Figura 4?

Certamente, é também possível desenvolver cálculos numa base numérica diferente. Seria a qualidade de "ser transladável" dependente da base numérica que estamos considerando?

								...									
...	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	...
...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
...	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...
								...									

Figura 3: Uma tabela prolongada de números.

Naturalmente, não precisamos nos concentrar em configurações de números determinados pelos cantos de um quadrilátero. Poderíamos considerar qualquer configuração de números $a_1,...,a_n$ e uma função $F = F(a_1,..., a_n)$. A questão, então, seria: que funções definidas sobre uma configuração de números são constantes em relação à translação da configuração? E por que não considerar a rotação ou qualquer outro movimento da figura? Além disso, até agora nos concentramos em uma propriedade particular da função F, sendo constante ou não, mas poderíamos observar muitas outras propriedades dela. Isso nos conduz à questão: Que funções definidas sobre uma configuração de números mostram "belas" propriedades para a translação?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	...			

Figura 4: Uma disposição diferente para a tabela de números.

3. O que acontece se ...?

Imaginemos que este exemplo envolva os alunos e o professor por um determinado tempo. Estamos observando seu diálogo. O professor pergunta: "O que acontece se...?", e, mais tarde, ouvimos de novo o seu "O que acontece se...?". Os alunos podem ficar surpresos com algumas das propriedades matemáticas levantadas pelas questões. Cochichos vêm de todos os cantos. Mais adiante, torna-se possível ouvir mais claramente as vozes dos alunos: "O que acontece se...?" "Sim, o que acontece se...?".

Talvez o professor pergunte: "Por que isto...?", o que conduz a mais cochichos e, possivelmente, períodos longos de silêncio. Mais tarde, algumas falas dos alunos podem ser ouvidas: "Sim, por que isto...?".

Um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. O convite é simbolizado pelo "O que acontece se...?" do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se...?". Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O "Por que isto...?" do professor representa um desafio e os "Sim, por que isto...?" dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo.

Então, o exemplo da translação de figuras é um cenário para investigação? Talvez sim, talvez não, pois o cenário somente torna-se um cenário para investigação se os alunos aceitam o convite. Ser um cenário para investigação é uma propriedade relacional. A aceitação do convite depende de sua natureza, (a possibilidade de explorar e explicar propriedades matemáticas de uma tabela de números pode não ser atrativa para muitos alunos), depende do professor, (um convite pode ser feito de muitas maneiras e para alguns alunos um convite do professor pode soar como um comando), e depende, certamente, dos alunos (no momento, eles podem ter outras prioridades). O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para um outro grupo de alunos. Se um certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que em que ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos.

4. Ambientes de aprendizagem

As práticas de sala de aula baseadas num cenário para investigação diferem fortemente aquelas baseadas em exercício. A distinção entre elas pode ser combinada com uma distinção diferente, a que tem a ver com as "referências" que visam levar os estudantes a produzirem significados para os conceitos e atividades matemáticas.

Em Filosofia, muitos esforços têm sido realizados para clarear a noção de significado em termos de referências. Esses esforços têm inspirado educadores matemáticos a discutirem significado no tocante às referências possíveis dos conceitos matemáticos. Por exemplo, a idéia de fração pode ser introduzida através da idéia de divisão de pizzas, enquanto, mais tarde, o significado de "fração" pode ser desenvolvido pela introdução de outros conjuntos de referências. Portanto, o significado também pode ser visto, primeiramente, como um característica das ações e não somente como uma característica dos conceitos. Em minha interpretação, as referências também incluem os motivos das ações; em outras palavras, incluem o contexto para localizar o objetivo de uma ação (realizada pelo aluno na sala de aula de matemática). Quando, no que se segue, falo sobre os diferentes tipos de referência, estarei geralmente aludindo à produção de significado na educação matemática[43].

Diferentes tipos de referência são possíveis. Primeiro, questões e atividades matemáticas podem se referir à matemática e somente a ela. Segundo, é possível se referir a uma semi-realidade – não se trata de uma realidade que "de fato" observamos, mas uma realidade construída, por exemplo, por um autor de um livro didático de matemática[44]. Finalmente, alunos e professores podem trabalhar com tarefas com referências a situações da vida real.

Combinando a distinção entre os três tipos de referência e a distinção entre dois paradigmas de práticas de sala de aula, obtém-se uma matriz com seis tipos diferentes de ambientes de aprendizagem (Figura 5). Mais adiante, tentarei esclarecer o que entendo por cada ambiente de aprendizagem, comentando sobre os diferentes tipos sugeridos pela matriz.

[43] Para uma análise da produção de significado em educação matemática, ver Lins (no prelo).
[44] Christiansen (1997) refere-se à "realidade virtual" como uma realidade que é estabelecida pelo exercício matemático. Uso a noção de "semi-realidade" de uma forma similar.

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Figura 5: Ambientes de aprendizagem.

O ambiente tipo (1) é aquele dominado por exercícios apresentados no contexto da "matemática pura", os quais podem ser da seguinte forma:

$(27a - 14b) + (23a + 5b) - 11a =$
$(16 \cdot 25) - (18 \cdot 23) =$
$(32 \cdot 41) - (34 \cdot 39) =$

O tipo (2) é caracterizado como um ambiente que envolve números e figuras geométricas. O exemplo introdutório da translação de figuras geométricas numa tabela de números ilustra esse tipo de ambiente.

O ambiente tipo (3) é constituído por exercícios com referências à semi-realidade. A natureza desse ambiente pode ser ilustrada pelo seguinte exemplo:

Um feirante A vende maçãs a \$ 0,85 o kg. Por sua vez, o feirante B vende 1,2 kg por \$ 1,00. (a) Qual feirante vende mais barato? (b) Qual é a diferença entre os preços cobrados pelos dois feirantes por 15 kg de maçãs?

Certamente, fala-se de maçãs, compras e preços. Mas não acredito que a pessoa que construiu esse exercício tenha feito alguma investigação empírica sobre a maneira como as maçãs são vendidas ou tenha entrevistado alguém de modo a descobrir as circunstâncias em que seria relevante comprar 15 kg de maçãs. A situação é artificial. O exercício está localizado numa semi-realidade o exemplo é tomado do livro de Dowling, *The Sociology of*

Mathematics Education: Mathematical Myths / Pedagogical Texts, no qual ele descreve os "mitos de referências". Certamente, é um mito que um exercício como esse referia-se a alguma realidade. Mas, na minha compreensão, há uma referência: a semi-realidade imaginada pelo autor do problema.

A semi-realidade pode ser uma referência que ofereça suporte para alguns alunos na resolução de problema. Portanto, a prática da educação matemática tem estabelecido padrões específicos de como operar numa dada semi-realidade. Se, por exemplo, um aluno pergunta ao professor sobre a distância entre as lojas e a casa da pessoa que está indo comprar as maçãs; e se o aluno desejar descobrir que distância é possível carregar uma sacola de 15 kg, fazendo um experimento no pátio da escola; e ainda, se o aluno pergunta se ambas as lojas possuem serviço de entrega a domicílio ou não; e se podemos considerar a qualidade das maçãs das duas lojas como sendo a mesma, nesse caso, o professor provavelmente considerará que o aluno está tentando obstruir a aula de matemática.

Certamente, essas questões geram obstrução, considerando o "acordo" geral entre o professor e os alunos para operar no paradigma do exercício. Resolver exercícios com referência a uma semi-realidade é uma competência muito complexa e é baseada num contrato bem especificado entre professor e alunos. Alguns dos princípios desse acordo são os seguintes: a semi-realidade é totalmente descrita pelo texto do exercício; nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício; mais informações são totalmente irrelevantes; o único propósito de apresentar o exercício é resolvê-lo. Uma semi-realidade é um mundo sem impressões dos sentidos (perguntar pelo gosto das maçãs está fora de questão), de modo que somente as quantidades mensuradas são relevantes. Além disso, toda informação quantitativa é exata; a negociação do preço ou compra de, vamos dizer, um pouco menos do que 15 kg de maçãs é destituída de sentido. A combinação da exatidão das medidas com o pressuposto de que a semi-realidade é completamente descrita pelas informações fornecidas torna possível sustentar o pressuposto de que há somente uma resposta correta. A metafísica da semi-realidade assegura que esse pressuposto pode ser mantido, não somente quando a referência é exclusivamente para números e figuras geométricas, mas também quando são "compras", "maçãs", "kilogramas", "preços", "distâncias" bem como outras entidades empíricas parecidas[45]. Em particular, essa metafísica tem estruturado a comunicação entre professor e alunos.

As observações acerca da maneira como a matemática opera em situações da vida real não têm sido consideradas na elaboração de exercícios do tipo (3). Mas, recentemente, estudos muito mais cuidadosos de práticas matemáticas em diferentes situações de trabalho têm sido desenvolvidos[46]. Exercícios baseados na vida real oferecem um ambiente de aprendizagem do tipo (5). Por exemplo, diagramas representando o desemprego podem ser apresentados como parte do exercício, e, com base, podem ser elaboradas questões sobre períodos de tempo, países diferentes, etc.[47] Todos os diagramas utilizados vêm da vida real, oferecendo uma condição diferente para a comunicação entre o professor e os alunos, uma vez que agora faz sentido questionar e suplementar a informação dada pelo exercício. Entretanto, as atividades estão ainda estabelecidas no paradigma do exercício.

Como o ambiente (3), o ambiente (4) também contém referências a uma semi-realidade, mas agora ela não é usada como um recurso para a produção de exercícios: é um convite para que os alunos façam explorações e explicações. Uma "corrida de grandes cavalos" pode servir como exemplo. A pista de corrida é desenhada na lousa e onze cavalos – 2, 3, 4,..., 12 – estão prontos para iniciar. Dois dados são jogados; a partir da soma dos números tirados, marca-se uma cruz no diagrama. Como mostra a Figura 6, a soma 6 apareceu três vezes, mais vezes que as outras somas. O cavalo 6, portanto, tornou-se o grande vencedor, seguido pelos cavalos 7 e 10.

[45] Se não for reconhecido que a maneira que a matemática se enquadra na semi-realidade não tem nada a ver com a relação entre matemática e realidade, então a ideologia da certeza encontra seu lugar. Para uma discussão sobre a ideologia da certeza, veja Borba e Skovsmose (1997).

[46] Veja, por exemplo, Wedege (1999).

[47] Veja, por exemplo, Frankenstein (1989) para exercícios desse tipo.

			X							
			X	X			X			
X	X		X	X	X	X	X		X	
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	2

Figura 6: O terreno da corrida de cavalos.

Essa corrida de cavalos pode ser desenvolvida na direção de uma grande atividade de sala de aula. Imagine que estamos com crianças em torno de 11 anos. Duas agências de apostadores organizam-se na sala de aula. Um pequeno grupo de alunos controla cada agência. Independente das outras, as agências anunciam os prêmios. O resto da classe, jogadores muito ricos, faz suas apostas: "Veja, a agência A paga de volta 8 vezes pelo cavalo número 9. Mas veja a agência B! Eles pagam 40 vezes pelo cavalo número 10!". As apostas precisam ser feitas logo, pois a próxima corrida está para começar. Um outro grupo de crianças, que está cuidando da corrida, toca o sino e a sala de aula fica em silêncio. Os dados são jogados, as somas são calculadas, as cruzes são feitas e os cavalos correm pelas linhas. Alguns apostadores mostram grandes sorrisos.

A agência A tem poucos clientes. Seus prêmios parecem menos favoráveis do que os oferecidos pela agência B. De qualquer modo, uma nova corrida está para começar. Novos prêmios são apresentados. Os apostadores estão surpresos: "Que maravilhosos prêmios a agência A está oferecendo agora!". Novos prêmios, novas corridas, novos ganhadores, novos perdedores. Os cavalos não são mais anônimos e o número 2 é chamado de tartaruga. Repentinamente, uma agência perde toda sua fortuna. De qualquer modo, um novo milionário monta uma nova agência.

O professor sugere que está no momento de uma corrida mais longa. Até agora, as corridas tiveram o comprimento de 3 casas, mas esta seria de

pelo menos 5 casas. As agências lançam seus prêmios. Alguns dos jogadores colocam chapéus de papel. Após a segunda corrida, alguns dos jogadores querem saber: O cavalo número 7 seria um bom candidato para uma corrida de longa distância?

Depois de várias corridas, não há cheiro de cavalos na sala de aula. A grande corrida de cavalos está acontecendo numa semi-realidade, mas não no paradigma do exercício. E as muitas observações sobre as habilidades dos diferentes cavalos (o cavalo número 11 precisa de algumas pílulas de vitamina) não são percebidas como obstruções. A lógica estrita que governa a semi-realidade do ambiente de aprendizagem número (3) não está em operação. A atividade toda está localizada num cenário para investigação. Muitas descobertas estão esperando as crianças. Estratégias estão para ser produzidas e aperfeiçoadas. E, uma vez que essa atividade foi escolhida para ser descrita, o aluno certamente aceitou o convite para participar da grande corrida de cavalos.

5. Um outro exemplo

Naturalmente, é possível desenvolver cenários para investigação com um grau maior de realidade envolvida do que na grande corrida de cavalos. Em *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, discuto alguns exemplos organizados como trabalho de projeto, os quais podem ilustrar o ambiente de aprendizagem (6).

O projeto "Energia" concentrou-se sobre o "input-output" de energia. Como introdução, os estudantes calcularam a quantidade de energia em certos tipos de café da manhã (a energia foi medida em kJ). Então, usando fórmulas oriundas de pesquisas sobre esporte, foi calculada a quantidade de energia gasta durante uma determinada viagem de bicicleta. As fórmulas expressavam o uso da energia em função de parâmetros diferentes como velocidade, tipo de bicicleta e "área frontal" do ciclista. Como medir essa área? Os estudantes desenvolveram um método e concluíram seus cálculos. Dessa forma, eles foram introduzidos à idéia de fazer um modelo de "input-output" para energia.

Depois disso, o projeto concentrou-se nos modelos de "input-output" na agricultura. Os estudantes investigaram uma fazenda relativamente próxima da escola. Primeiro, calculou-se a quantidade de energia em termos, por exemplo, da gasolina usada na preparação de um certo campo durante um ano. No celeiro, os alunos ouviram do agricultor explicações sobre os métodos de preparação do campo. Depois, eles mediram a largura dos diferentes instrumentos - o arado, a colheitadeira, etc. – e, com isso, estimaram quantos quilômetros o agricultor tem que dirigir o trator anualmente na preparação do campo. No campo pesquisado, a cevada estava crescendo e foi calculada a quantidade de energia que havia na cevada colhida. Para esses cálculos, usaram-se informações estatísticas trazidas da Agronomia e outras áreas. De acordo com os cálculos dos alunos, o diagrama "input-output" estava bastante lucrativo: a cevada colhida tinha 6 vezes mais energia do que a energia usada no campo; isso porque o sol é um grande fornecedor de energia. O resultado pôde ser comparado com as estatísticas oficiais da Dinamarca, que revelaram um fator um pouco menor (um motivo para isto é que os alunos não consideraram todos os tipos relevantes de transporte necessários para gerenciar a fazenda).

Nessa fazenda, a cevada era usada como alimento para os porcos e, assim, os alunos puderam montar um novo modelo "input-output". Eles coletaram informações sobre a quantidade de porcos que estava comendo cevada em relação aos seus pesos e sobre o tempo necessário para serem levados para o matadouro. O fator foi calculado em torno de 0,2 somente um quinto de energia contida na comida fornecida aos porcos estava na carne. A produção de carne, portanto, parece ser uma atividade econômica ruim do ponto de vista da energia.

Essas conclusões são características somente da fazenda escolhida? Os resultados dos alunos foram muito similares aos relatados nas estatísticas oficiais sobre a agricultura dinamarquesa. Do ponto de vista da energia, a transformação de cevada em carne tem um custo muito alto. Nesse sentido, as investigações dos alunos tornaram-se exemplares, o que é um elemento essencial no trabalho de projeto. A discussão pode ser levada adiante. A agricultura dinamarquesa está fazendo coisas erradas do ponto de vista da energia? Não necessariamente. Conforme apontam as estatísticas, a agricultura norte-americana está em situação mais dramática em relação à problemática do gasto de energia.

O projeto apresenta aspectos diferentes do ambiente de aprendizagem

(6). As referências são reais, tornando possível aos alunos produzirem diferentes significados para as atividades (e não somente os conceitos). Os alunos fazem cálculos relacionados a fazenda real. Isso quer dizer que são eliminadas as autoridades que exercem seu poder no paradigma do exercício. O pressuposto de que há uma, e somente uma, resposta correta não mais faz sentido. Livros didáticos podem descansar seguramente no canto da sala de aula à medida que um projeto desse tipo é desenvolvido. O professor tem o papel de orientar. Novas discussões baseadas em investigação sempre surgem: Como calcular a área frontal de um ciclista? O problema agora é a montagem de modelos para os cálculos de "input-output", o que torna importante refletir sobre os resultados dos cálculos. Eles são confiáveis? Consideramos os fatores relevantes? Bem, podemos comparar com as estatísticas oficiais. Mas qual desses resultados é o correto? A reflexão crítica sobre matemática e modelagem matemática ganha um novo significado.

Na Dinamarca, o currículo oficial não é um obstáculo para os alunos e os professores trabalharem no ambiente de aprendizagem (6). Não há exames após cada ano escolar para decidir se os alunos são aprovados ou não. Nesse país a promoção é automática. Somente após o 9º ano, os alunos fazem um exame nacional em matemática, em que todos passarão independente das notas que tirarem. Esse exame inclui uma abordagem de investigação, em sua parte escrita, que não pressupõe nenhum conhecimento memorizado e, em sua parte oral, concentra-se sobre grupos de alunos, fazendo investigações matemáticas. Apesar disso, o paradigma do exercício também tem um forte apoio naquele canto do mundo.

6. Movendo-se entre diferentes ambientes de aprendizagem

Naturalmente, a matriz da Figura 5 representa uma simplificação. A linha vertical que separa o paradigma do exercício dos cenários para investigação é, por certo, um linha muito "espessa", simbolizando um terreno imenso de possibilidades. Alguns exercícios podem provocar atividades de resolução de problemas, as quais poderiam transformar-se em genuínas investigações matemáticas. Propor problemas significa um passo adiante em direção aos cenários para investigação, embora atividades de formulação de problemas possam ser muito diferentes de um trabalho de projeto. Não há dúvida de que as linhas horizontais também são "fluidas". Não pretendo tentar oferecer uma classificação claramente determinada, mas elaborar uma noção de ambientes de aprendizagem em vista de facilitar as discussões sobre mudanças na educação matemática.

Uma boa parte da educação matemática está alternando os ambientes (1) e (3). Nesse sentido, o paradigma do exercício oferece uma fundamentação assentada na "tradição" da educação matemática. Muitos estudos em educação matemática têm revelado um quadro desolador sobre o que acontece na sala de aula tradicional. Muitos desses estudos, todavia, não reconhecem que existem outros possíveis ambientes de aprendizagem e que seus dados estão ligados a uma organização particular da sala de aula de matemática, a que é típica[48]. Uma diferenciação entre a "tradição da matemática escolar" e a "tradição da matemática investigativa" tem sido sugerida por Richard (1991), o que está em consonância com a matriz. O exercício é parte do que define a tradição da matemática escolar.

Na Dinamarca, o ambiente de aprendizagem tipo (6) tem desafiado a tradição da matemática escolar. Porém, acho importante que os desafios sejam organizados em termos dos ambientes de aprendizagem de tipos (2) e (4) bem como do (6). Não pretendo defender que o ambiente (6) seja a única alternativa ao paradigma do exercício. De fato, não quero sugerir que um ambiente de aprendizagem particular represente o objetivo último para a educação matemática, crítica ou não.

Sustento que a educação matemática deve se mover entre os diferentes ambientes tal como apresentado na matriz. Particularmente, não considero a idéia de abandonar por completo os exercícios da educação matemática. Poderia fazer sentido, por exemplo, após a grande corrida de cavalos, usar um período para "consolidar" o que os alunos trabalharam por meio de exercícios relacionados com a noção de probabilidade. É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. A rota "ótima" não pode ser determinada

[48] Veja, por exemplo, Walkerdine (1988).

apressadamente, mas tem que ser decidida pelos alunos e pelo professor. A matriz dos ambientes de aprendizagem pode também ser usada como um instrumento analítico. Por exemplo, é possível que alunos e professor considerem a rota seguida no último ano: Que ambientes de aprendizagem experimentamos? Nós gastamos todo o tempo com um ou dois ambientes? Em qual ambiente tivemos experiências com mais sucesso? Algum movimento de um ambiente para outro causou dificuldade? Muitas considerações de planejamento podem ser relacionadas à matriz.

Há muito tempo, participei de um projeto matemático envolvendo crianças com cerca de 7 anos. O principal objetivo do projeto era planejar e construir um playground fora da sala de aula num, lugar onde havia um pequeno terreno disponível para a classe. Certamente, essa atividade se enquadrou no ambiente de aprendizagem tipo (6), e, como um dos resultados do projeto, foi construído um pequeno playground fora da sala de aula com a ajuda dos pais durante alguns finais de semana. Antes disso, porém, muitas atividades foram desenvolvidas. Inicialmente, as crianças visitaram outros playgrounds para testar o que seria um "bom" brinquedo. Crianças de 7 anos são especialistas em fazer esse tipo de teste. Entretanto, mais difícil foi especificar a qualidade exata de um bom playground. Qual é a altura dos balanços? Quanto de areia é necessário? Muitas coisas precisavam ser medidas; e, para não esquecer essas medidas, tornou-se importante anotá-las. Não é uma tarefa fácil!

Esses períodos de atividade intensa foram muito frutíferos e importantes, mas outros tipos de atividade mais tranqüilas são importantes tanto para o professor quanto para os alunos. Como parte do projeto do playground (que levou alguns meses), foram organizados períodos de "trabalho de escritório", os quais pareciam de fato um passeio ao ambiente de aprendizagem do tipo (1). As crianças eram organizadas em pequenos grupos trabalhando em seus escritórios. Como em qualquer escritório coletivo, conversa-se "baixinho". Os alunos colocaram copos plásticos com suco ou limonada sobre suas mesas de modo que, por algum toque mágico, pareciam mesas de escritório de verdade. Às vezes, os trabalhadores do escritório comiam um biscoito enquanto estavam somando números. Às vezes, o rádio tocava uma música leve. Às vezes, o professor tocava violão. Os papéis espalhados ao redor das mesas continham os exercícios sobre adição e subtração. O ponto é que as crianças, durante os períodos interinos de trabalho do projeto, reconheceram a importância de serem capazes de somar números corretamente. Durante as horas de escritório, esse tipo de habilidade podia ser consolidada e as razões para essa tarefa foram compreendidas nos períodos prévios do trabalho de projeto. A posição de "trabalho de escritório" quebrou o padrão normal do paradigma do exercício, embora a atividade fosse desenvolvida no tipo (1). Isso ilustra que a rota entre os diferentes ambientes pode ajudar a dar novos significados para às atividades dos alunos. O trabalho de escritório não ocorreu numa atmosfera da tradição da matemática escolar, ainda que tenha acontecido no paradigma do exercício. Particularmente, a comunicação entre o professor e os alunos no escritório não foi governada pela mesma lógica que a comunicação entre o professor e os alunos na tradição da matemática escolar[49].

A consolidação propiciada pelo trabalho de escritório serve também como uma preparação para o engajamento num novo projeto. Criar uma harmonia entre o trabalho de projeto e as atividades de sala de aula tem sido o grande desafio para a educação matemática baseada em projetos (não importa se estamos tratando de projetos num curso universitário ou em escolas).

Às vezes, em discussões com professores, tem sido sugerido que, antes de os alunos se envolverem com investigação em algum ambiente, eles devem compreender algumas técnicas que podem, mais eficientemente, ser produzidas dentro do paradigma do exercício. A grande corrida de cavalo ilustra por que, em minha opinião, isso geralmente não é adequado. Suponhamos que as crianças, antes da corrida, tenham sido introduzidas a algumas noções de probabilidade através do diagrama canônico: o número tirado no dado vermelho é mostrado no eixo x; o número tirado no dado azul é mostrado no eixo y, e a soma... então, o jogo poderia perder o fascínio. Portanto, uma rota oposta é relevante em muitos casos, isto é, a rota de (4) para (3). Uma vez que o jogo tenha sido experimentado e as crianças ganharam familiaridade com as características dos diferentes cavalos, obtendo confiabilidade nas vantagens, então os alunos e o professor podem

[49] Para uma discussão sobre comunicação na sala de aula de matemática, ver Alrø e Skovsmose (1996a, 1996b, 1998).

levantar observações específicas e encontrar explicações. E os exercícios podem ser usados como um meio para fixar algumas experiências.

7. A zona de risco

A investigação francesa em educação matemática tem dado muita atenção à noção de *contrato didático*[50]. Com relação à noção de ambiente de aprendizagem, um contrato didático pode ser definido em termos do "equilíbrio no ambiente de aprendizagem". Assim, um contrato didático refere-se à harmonia entre os parâmetros do ambiente de aprendizagem, isto é, uma harmonia entre a maneira que o significado é produzido, as tarefas são organizadas, o livro didático é estruturado, a comunicação é desenvolvida, etc. A essa harmonia deve ser reconhecida e aceita tanto pelo professor quanto pelos alunos. O fato de o contrato didático estar estabelecido não revela muito sobre a qualidade do ambiente de aprendizagem. Mas, antes de tudo, indica que o professor e os alunos compartilham a mesma compreensão e aceitação das prioridades do ambiente de aprendizagem. A interação enter eles não é problemática até onde ambas as partes reconhecem o contrato.

Um contrato didático pode ser quebrado de muitas maneiras como, por exemplo, quando alunos começam a questionar detalhes de uma semi-realidade, conforme descrição anterior. O contrato pode ser quebrado se a avaliação é drasticamente mudada. Em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato. Quando, inicialmente, sugeri desafiar o paradigma do exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar.

De uma perspectiva dos professores, isso pode parecer o movimento de uma zona de conforto para um zona de risco. Essa noção tem sido introduzida por Penteado (manuscrito) em seu estudo sobre as experiências do professor num novo meio de aprendizagem onde os computadores representam um papel crucial[51]. O movimento entre os diferentes ambientes

[50] Veja, por exemplo, Brousseau (1997).
[51] Veja também Penteado, 1999

possíveis de aprendizagem e a ênfase especial no cenário para investigação causarão um grau elevado de incerteza. A meu ver, a incerteza não deve ser eliminada. O desafio é enfrentá-la.

Os computadores na educação matemática têm ajudado a estabelecer novos cenários para investigação (embora alguns programas fechados tentem eliminar incertezas, ajustando as atividades ao paradigma do exercício)[52]. O computador desafiará a autoridade do professor (tradicional) de matemática. Alunos trabalhando com, por exemplo, geometria dinâmica facilmente encontram possíveis situações e experiências que os professores não previram ao planejarem a aula. Um clique no mouse pode rapidamente conduzir a uma parte desconhecida do programa: O que fazer agora? Como sair daqui? O professor deve estar sempre pronto para enfrentar perguntas que podem não ser facilmente respondidas. A autoridade do professor tradicional está para ser quebrada dentro de segundos; e ninguém sabe sobre o próximo momento. Certamente, nem o professor. Uma razão epistemológica para isso é que o computador não é simplesmente um instrumento que estende nossa maneira de pensar; em vez disso, como descreve Borba (1999), os computadores reorganizam nosso pensamento. A reorganização pode influenciar muitas coisas, em particular a forma como o significado é produzido. Portanto, a idéia completa de "reorganização" liga-se fortemente à idéia de "zona de risco".

Quando os alunos estão explorando um cenário, o professor não pode prever que questões vão aparecer. Uma forma de eliminar o risco é o professor tentar guiar todos de volta ao paradigma do exercício, à zona do conforto. Então, a exploração completa das figuras geométricas transladáveis na tabela de números poderia ser re-organizada como uma seqüência de exercícios. E, em vez de permitir os alunos explorarem o programa de geometria dinâmica, o professor poderia especificar cada passo a ser tomado: "Primeiro, você seleciona um ponto. Ok, todos fizeram isto! Esse ponto chamaremos de A. Então você deve selecionar um outro ponto. Este chamaremos de B..." Através da reorganização das atividades em seqüência, o professor pode conduzir todos os alunos da sala de aula a terem quase a mesma figura sobre as telas dos computadores. Dessa forma, à medida que os alunos estão operando os passos, o professor pode prever a ocorrência de eventos e desafios. Porém, fazendo assim, muitas oportunidades de aprendizagem são também perdidas.

Qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em co-operação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora. Isso significa, por exemplo, a aceitação de questões do tipo "o que acontece se...", que possam levar a investigação para um território desconhecido. De acordo com a pesquisa de Penteado, uma condição importante para os professores se sentirem capazes de trabalhar na zona de risco é o estabelecimento de novas formas de trabalho colaborativo, em particular, entre os professores, mas também juntamente com alunos, pais, professores e pesquisadores.

Portanto, por que se preocupar com o trabalho na zona de risco? Por que não aceitar simplesmente o contrato didático da tradição da matemática escolar, o qual tem sido cuidadosamente elaborado? Cobb e Yackel referem-se à "autonomia intelectual" como um objetivo explicitamente declarado para seus esforços em estabelecer uma tradição da matemática investigativa em contraste com a tradição da matemática escolar. A autonomia intelectual é caracterizada *em termos da consciência e da disposição dos alunos para recorrer às suas próprias capacidades intelectuais quando envolvidos em decisões e julgamentos matemáticos* (Cobb & Yackel, 1998 : p. 170). A autonomia intelectual pode ser associada a atividades de exploração e explicação tais como nos cenários para investigação. É difícil ver essa autonomia enraizada nas regras de comportamento que operam numa semi-realidade do ambiente (3). Em particular, deixar a "zona de risco" também significa eliminar oportunidades de aprendizagem associadas à idéia de computadores como re-organizadores.

Fazer um movimento na matriz da Figura 5 do paradigma do exercício em direção aos cenários para investigação pode contribuir para o abandono das autoridades da sala de aula de matemática tradicional e levar os alunos

[52] Veja, por exemplo, Borba (1995).

a agirem em seus processos de aprendizagem. No livro *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*, discuto aprendizagem como ação e enfatizo a importância de estabelecer as intenções dos alunos como os elementos que dirigem o processo de aprendizagem. Um sujeito crítico tem que ser um sujeito que age.

Estudos de sala de aula que usam problemas do mundo real como ponto de partida para considerações matemáticas levaram Voigt a fazer a seguinte afirmação:

> *Como cidadãos do futuro, alunos terão que enfrentar muitos problemas do mundo real que parecem não ser matematicamente claros... o cidadão é competente para distinguir entre inferências matemáticas necessárias e os pressupostos de modelagem dependentes de interesses? Pode-se esperar que colocar mais atenção na qualidade da negociação do significado matemático na sala de aula pode melhorar a educação do "leigo competente" (1998 : p. 195).*

Certamente, compartilho dessa visão.

Realizar um movimento, na matriz da Figura 5, das referências à matemática pura para as referências da vida real pode ajudar a oferecer recursos para reflexões sobre a matemática[53]. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education* contém uma especificação de elementos de uma crítica da modelagem matemática como sendo essencial para o desenvolvimento da competência chamada *materacia*. Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a matemática pode estar operando enquanto parte de nossa sociedade. Um sujeito crítico é também um sujeito reflexivo.

De que modo desenvolver uma educação matemática como parte de nossas preocupações com a democracia numa sociedade estruturada por

[53] Veja também Cobb, Boufi, McClain e Whitenack (1997).

[54] Veja, por exemplo, Skovsmose (1998b), Skovsmose e Valero (1999), Valero (1999), Vithal (1999, 2000) e Volmink (1994).

tecnologias que incluem a matemática como um elemento estruturante?[54] De que maneira desenvolver uma educação matemática que não torne opaca a introdução dos alunos ao pensamento matemático, mas que os leve a reconhecerem suas próprias capacidades matemáticas e a consciência da forma pela qual a matemática opera em certas estruturas tecnológicas, militares, econômicas e políticas? Nunca ousarei afirmar que o abandono do paradigma do exercício para explorar cenários para investigação forneceria uma resposta para essas questões. Nem afirmaria que é suficiente construir uma educação matemática baseada somente em referências à vida real. Minha expectativa é que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa oferecer novos recursos para levar os alunos a agir e refletir e, dessa maneira, oferecer uma educação matemática de dimensão crítica.

Agradecimentos

Este estudo sobre cenários para investigação tem sido desenvolvido como parte de um investigação iniciada no *Centre for Research in Learning Mathematics*, Dinamarca e baseia-se em Skovsmose (1999a). Este artigo foi apresentado na Reunião Anual da American Educational Research Association (AERA), New Orleans, 24-28 de abril de 2000. Gostaria de apresentar meus agradecimentos a Helle Alrø, Morten Blomhøj, Gunnar Bomann, Henning Bødtkjer, Arne Astrup Juul, Miriam Penteado, Mikael Skånstrøm and Paola Valero por seus comentários críticos e suas sugestões para clarificar os "cenários para investigação".

Bibliografia

1. ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. On the Right Track. *For the Learning of Mathematics*, v. 16, n. 1, p. 2-9 e 22, 1996a.
2. ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. The Students' Good Reasons. *For the Learning of Mathematics*, v. 16, n. 3, p. 31-38, 1996b.
3. ALRØ, H., SKOVSMOSE, O. That Was Not the Intention! Communication in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, v. 18, n. 2, p. 42-51, 1998.
4. BORBA, M. C. Graphic Calculators, Functions and Reorganization of the Classroom. In M. C. Borba, T. Souza, B. Hudson, J. Fey (eds.). *The Role of Technology in the Mathematics Classroom - Proceedings of WG 16, ICME-8*. Rio Claro: UNESP – State University of São

Paulo, 1995.

5. BORBA, M. C. Technologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In M. A. V. Bicudo (ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.
6. BORBA, M., SKOVSMOSE, O. The Ideology of Certainty. *For the Learning of Mathematics*, v. 17, n. 3, p. 17-23, 1997.
7. BROUSSEAU, G. *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970-1990* (editado e traduzido por N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
8. CHRISTIANSEN, I. M. When Negotiation of Meaning is also Negotiation of Task. *Educational Studies in Mathematics*, v. 34, n. 1, p. 1-25, 1997.
9. COBB, P., BOUFI, A., MCCLAIN, K., WHITENACK, J. Reflective Discourse and Collective Reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 8, n. 3, p. 258-277, 1997.
10. COBB, P., YACKEL, E. A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. In F. Seeger, J. Voigt., U. Waschescio, U. (eds.). *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. p.158-190.
11. COTTON, T. Towards a Mathematics Education for Social Justice. [s.i.], 1998 (thesis, Ph.D).
12. D' AMBROSIO, U. Cultural framing of mathematics teaching and learning. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, B. Winkelmann (eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994. p. 443-455.
13. D'AMBROSIO, U. Mathematics and Peace: Our Responsibilities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 98, n. 3, p. 67-73, 1998.
14. DOWLING, P. *The Sociology of Mathematics Education: Mathematical Myths/ Pedagogic Texts*. London: The Falmer Press, 1998.
15. FRANKENSTEIN, M *Relearning Mathematics: A Different R – Radical Maths*. London: Free Association Books, 1989.
16. KRANZBERG, M. Technology and History: "Kranzberg's Laws"'. In T. S. Reynolds & S. H. Cutcliffe (eds.). *Technology and the West: A Historical Anthology from Technology and Culture*. Chicago: University of Chigago Press, 1997. p. 5-20.
17. LINS, R. The Production of Meaning for Algebra: A Perspective Based on a Theoretical Model of Semantic Fields. In R. Lins, T. Rojano, A. Bell & R. Sutherland (eds.). *Perspectives on School Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishes, in print.
18. NIELSEN, L., PATRONIS, T., SKOVSMOSE, O. *Connecting Corners of Europe: A Greek Danish Project in Mathematics Education*. Århus: Systime, 1999.
19. PENTEADO, M. G. Novos Atores, Novos Cenários: Discutindo a Inserção dos Computadores na Profissão Docente. In M. A. V. Bicudo (ed.). *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 297-313.
20. PENTEADO, M. G. *Risk Zone: Introduction of Computers into Teachers' Practice*. Depto. de Matematica , State University of Sao Paulo at Rio Claro (manuscrito).
21. POWELL, A., FRANKENSTEIN, M. (eds.) *Ethnomathematics: Challenging Eurocentrism in Mathematics Education*. Albany: State University of New York Press, 1997.
22. RICHARDS, J. Mathematical Discussion. In E. von Glasersfeld (ed.). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 13-52.
23. SKOVSMOSE, O. *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishes, 1994.
24. SKOVSMOSE, O. Aporism: Uncertainty about Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 98, n. 3, p. 88-94, 1999a.
25. SKOVSMOSE, O. Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematics Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, v.* 98, n. 6, p. 195-203,1998b.
26. SKOVSMOSE, O. 'Undersøgelseslandskaber'. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University, 1999a.
27. SKOVSMOSE, O. Mathematical Agency and Social Theorising. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University, 1999b.
28. SKOVSMOSE, O. Aphorism and Critical Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics* (in print).
29. SKOVSMOSE, O., NIELSEN, L. Critical Mathematics Education. In A. Bishop et al. (red.) *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 1257-1288.
30. SKOVSMOSE, O., VALERO, P. Breaking Political Neutrality: The Critical Engagement of Mathematics Education with Democracy. Centre for Research in Learning Mathematics, Royal Danish School of Educational Studies, Roskilde University Centre, Aalborg University, 1999.
31. VALERO, P. Deliberative Mathematics Education for Social Democratization in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 98, n. 6, p. 20-26, 1999.
32. VITHAL, R. Democracy and Authority: A Complementarity in Mathematics Education? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 98, n. 6, p. 27-36, 1999.
33. VITHAL, R. *In Search of a Pedagogy of Conflict and Dialogue for Mathematics Education*. Aalborg: Aalborg University, 2000.
34. VITHAL, R., CHRISTIANSEN, I. M., SKOVSMOSE, O. Project Work in University Mathematics Education: A Danish Experience: Aalborg *University.Educational Studies in Mathematics*, v. 29, p. 199-223. p. 1995.
35. VOIGT, J. The Culture of the Mathematics Classroom: Negotiating the Mathematical Meaning of Empirical Phenomena. In F. Seeger, J. Voigt., U. og Waschescio (red.) *The Culture of the Mathematics Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. p. 191-220.
36. VOLMINK, J. Mathematics by All. In S. in Lerman (ed.) *Cultural Perspectives on the Mathematics Classroom*. Dordrect: Kluwer Academic Publishers, 1994. p.51-68.
37. WALKERDINE, V *The Mastery of Reason: Cognitive Development and the Production of Rationality*. London: Routledge and Kegan Paul, 1988.
38. WEDEGE, T. *Matematikviden og Teknologiske Kompetencer hos Kortuddannede Voksne*. Roskilde: Roskilde University Centre, 1999 (Thesis, Ph.D).