

Aula 30: (I) TEOREMA DE POYNTING (1884) 1/30

TRABALHO $\rightarrow$ campo elétrico, $dP = d\vec{F} \cdot \vec{v}$
 $= dq \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}$
 $= (\vec{J} dV) \cdot \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{P_V = \int_V d^3x \vec{J} \cdot \vec{E}} \quad (\text{potência})$$

Essa potência representa a conversão de energia eletromagnética em energia mecânica (ou calor) no volume V .

Ela deve, então, ter uma contrapartida na diminuição da energia eletromagnética.

Vejam os:

$$\int_V d^3x \vec{J} \cdot \vec{E} = \int_V d^3x \left[\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] \cdot \vec{E}$$

$$\text{Mas } \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H})$$

$$= \int_V d^3x \left[\vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right]$$

$$= - \oint_{S(V)} d\vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \int_V d^3x \left\{ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\}$$

Se o meio for linear, então $\vec{H} \times \vec{E}$ e $\vec{D} \times \vec{E}$, 2/30
 assim: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

$$P_V = \int_V d^3x \vec{J} \cdot \vec{E} = - \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial t} P_{EM}$$

$P_{EM} = \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E})$

De fato, podemos reverter $\oint d\vec{S} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$ para $\int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H})$, e escrever:

$$\boxed{\frac{\partial P_{EM}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = - \vec{J} \cdot \vec{E}} \quad \boxed{\vec{S} \equiv \vec{E} \times \vec{H}}$$

* "Eq. da Continuidade"

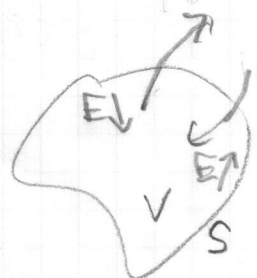
$$* \vec{J} \cdot \vec{E} = \frac{dP_{MEC}}{dV} = \frac{\partial^2 E_{MEC}}{\partial V \partial t} = \frac{\partial P_{MEC}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial (P_{EM} + P_{MEC})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0}$$

* $\vec{S}$: Vetor de Poynting $\rightarrow$ corrente de energia EM
 que flui ~~através~~ para dentro/para
 de qualquer volume

* Conservação de energia!

$$* \frac{\partial E_{tot}(V)}{\partial t} = - \oint_{S(V)} d\vec{S} \cdot \vec{S}$$



Podemos repetir esse mesmo argumento no que toca à conservação de momento.

A força total nos corpos é conente em $\vec{V}_e$:

$$\vec{F}_{MEC} = \frac{d\vec{P}_{MEC}}{dt} = \int d^3x [\rho \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}]$$

Agora, utilizamos as Eqs. de Maxwell para expressar

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Após algumas manipulações algébricas, obtemos:

$$\frac{d\vec{P}_{MEC}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \int d^3x \vec{E} \times \vec{B} + \epsilon_0 \int d^3x \left\{ \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + c^2 \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - c^2 \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right\}$$

$$\text{Mas } \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi}_{EM} = \frac{1}{c^2} \vec{S}} \rightarrow \text{densidade de momento do campo eletromagnético}$$

$$\vec{P}_{EM} = \int d^3x \vec{\Pi}_{EM}$$

$$\boxed{\frac{\vec{S}}{c^2} \rightarrow \text{momento} \quad \vec{S} \rightarrow \text{Energia}}$$

↓ OPTATIVO

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{P}_{MEC} + \vec{P}_{EM}) = \vec{F}_{EM}$$

Vamos agora calcular quem é essa "força", e mostrar que ela tem uma expressão muito particular.

Considere a componente x de:

$$\begin{aligned} \left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_x &= E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \\ &\quad - \overbrace{E_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right)}^{(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z} + \overbrace{E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)}^{(\vec{\nabla} \times \vec{E})_y} \end{aligned}$$

Podemos reescrever isso como:

$$\vec{\nabla} \cdot (E_x \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}^2 = \sum_i \left[E_i \frac{\partial E_i}{\partial x} - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ix} \right]$$

Portanto, podemos expressar:

$$\left[\vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ij} \right)$$

$$\begin{cases} i=1 \rightarrow x^1=x \\ i=2 \rightarrow x^2=y \\ i=3 \rightarrow x^3=z \end{cases}$$

Como o mesmo vale p/ $\vec{B}$, temos que:

$$\frac{d}{dt} (P_{MEC}^i + P_{EM}^i) = \int_V d^3x \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \underbrace{\epsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) \delta_{ij} \right]}_{T_{ij}}$$

$$= \int_V d^3x \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} T_{ij} \leftarrow \text{DIVERGENTE!}$$

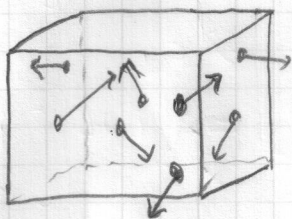
$$= \sum_{j=1}^3 \oint_{S(V)} dS_j \cdot T_{ij}$$

$$dS_j = dS \cdot (\hat{n})_j$$

Qu seja:

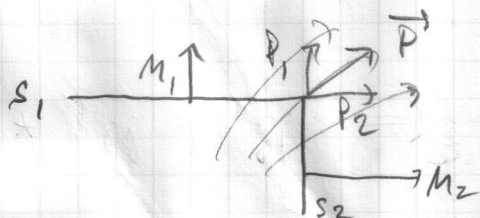
$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)^i = (\vec{F})^i$$

$$F^i = \oint dS \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j$$



Força por unidade de área

$\Rightarrow T_{ij} \rightarrow$ Fluxo de momento (i) por unidade de área (j)



$$(\Delta \vec{P})_1(S_2) \propto P_1 \times n_2$$

$$(\Delta \vec{P})_2(S_1) \propto P_2 \times n_1$$

$$T_{ij} = T_{ji}$$

* Se nenhuma força externa estiver agindo sobre o sistema (apenas forças internas e eletromagnéticas), então o momento total $\vec{P} = \vec{P}_{mec} + \vec{P}_{EM}$ será conservado, e nesse caso o lado direito é zero $\Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0$$

* T_{ij} é chamado de tensores de energia-momento do campo eletromagnético:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left[E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E}^2 \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{B}^2 \right]$$

$$\begin{aligned} * T_z(T_{ij}) &= \sum_i T_{ii} = \epsilon_0 \left(\vec{E}^2 - \frac{3}{2} \vec{E}^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B}^2 - \frac{3}{2} \vec{B}^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2 \right) = -\rho_{EM} ! \end{aligned}$$