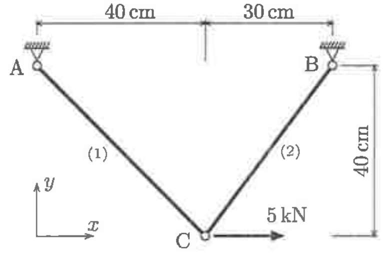
3 Processo dos Deslocamentos

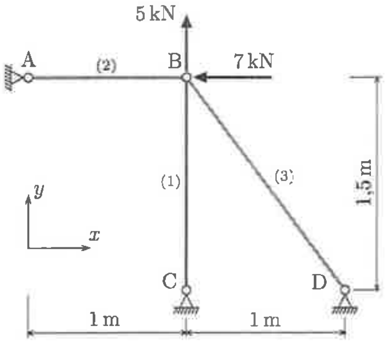
8. Empregue o processo dos deslocamentos para resolver a treliça ao lado. São dados: $E = 210\,\text{GPa}$, $A_1 = 1{,}5\,\text{cm}^2$, $A_2 = 2{,}0\,\text{cm}^2$.
R.: $u_C = 8{,}90 \times 10^{-3}\,\text{cm}$, $v_C = -1{,}36 \times 10^{-3}\,\text{cm}$,
$N_1 = 4{,}04\,\text{kN}$, $N_2 = -3{,}57\,\text{kN}$.



9. Determine os deslocamentos do nó B da treliça submetida às cargas concentradas mostradas na figura. Calcule também a força normal na barra 3. São dados: $E_{\text{aço}} = 210\,\text{GPa}$ e $E_{\text{al}} = 70\,\text{GPa}$.

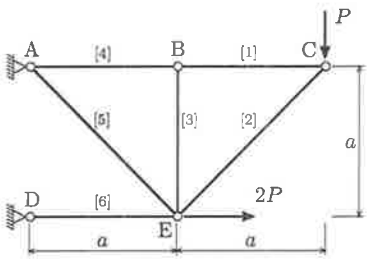
Barra	Material	A (mm^2)
1	aço	200
2	alumínio	300
3	alumínio	400

R.: $u_B = -0{,}248\,\text{mm}$, $v_C = 0{,}083\,\text{mm}$,
$N_1 = 2{,}33\,\text{kN}$, $N_2 = -5{,}22\,\text{kN}$, $N_3 = 3{,}22\,\text{kN}$.

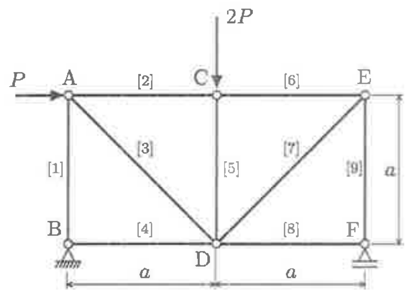


4 Processo da Carga Unitária

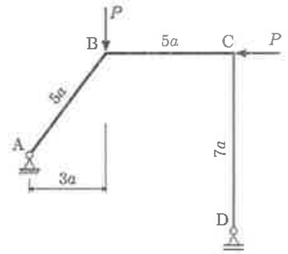
10. Determine os deslocamentos v_C, u_C e v_B da treliça ao lado. Considere $EA = \text{const.}$
R.: $v_C = \frac{(2+4\sqrt{2})Pa}{EA}$, $u_C = \frac{2Pa}{EA}$, $v_B = \frac{2\sqrt{2}Pa}{EA}$.



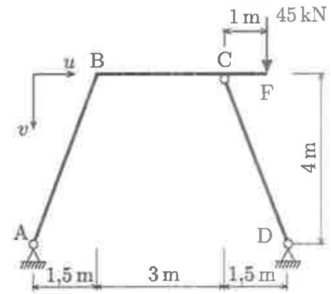
11. Calcule a componente vertical do deslocamento do nó D e o deslocamento do nó F para o carregamento indicado na figura. Considere $EA = \text{const.}$
R.: $v_D = \frac{(5+4\sqrt{2})Pa}{2EA}$, $u_F = \frac{Pa}{EA}$.



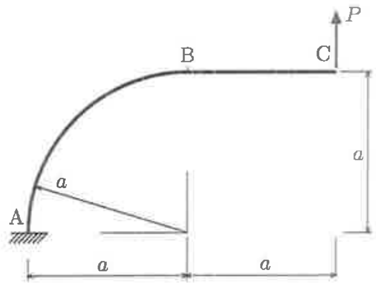
12. Para a estrutura ao lado, calcule o deslocamento horizontal do ponto C e a rotação do ponto A. Considere apenas a deformação por flexão com $EI = \text{const.}$
R.: $u_C = \frac{125Pa^3}{24EI}$ (←), $\varphi_A = \frac{350Pa^2}{192EI}$ (↶).



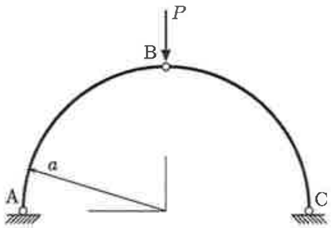
13. Determine os deslocamentos v_F e u_B do pórtico tri-articulado desprezando as deformações por força normal e força cortante. São dados: $E = 2000\,\text{kN/cm}^2$ e as dimensões da seção transversal retangular, $b = 20\,\text{cm}$ e $h = 45\,\text{cm}$.
R.: $v_F = 0{,}95\,\text{cm}$ (↓), $u_B = 1{,}05\,\text{cm}$ (←)



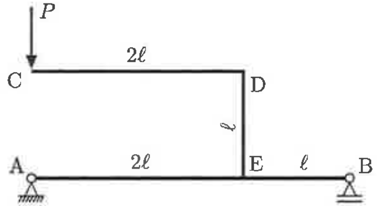
14. Calcule o deslocamento horizontal da extremidade C da viga curva indicada ao lado ($EI = \text{const.}$).
R.: $u_C = \frac{\pi-1}{2}\frac{Pa^3}{EI}$ (←)



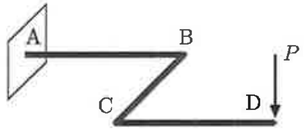
15. Calcule o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga P para o arco semicircular tri-articulado de raio a. São conhecidos o módulo de elasticidade E e o momento de inércia à flexão I da seção transversal.
R.: $v_B = 0{,}0708\frac{Pa^3}{EI}$ $(\downarrow)$



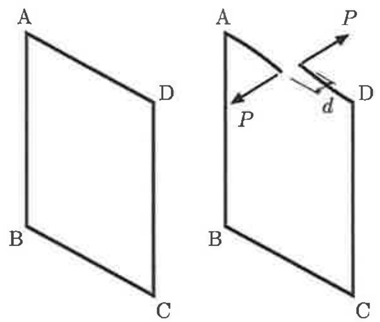
16. Para o carregamento indicado, determine o deslocamento vertical e a rotação da seção transversal do nó C da estrutura ao lado. Considere o efeito das deformações por força normal e momento fletor, com EI = const. e EA = const.
R.: $v_C = \left(\frac{28}{3} + \frac{I}{A\ell^2}\right)\frac{P\ell^3}{EI}$ $(\downarrow)$, $\varphi_C = \frac{44P\ell^2}{9EI}$ $(\curvearrowleft)$.



17. O suporte horizontal ABCD é engastado na extremidade A e livre na extremidade D. O comprimento dos trechos AB e CD é de 1 500 mm e o da parte BC, que é perpendicular a AB e CD, 1 200 mm. O suporte é constituído de um tubo de 100 mm de diâmetro, tendo momento de inércia $I = 3 \times 10^6\,\text{mm}^4$ e momento de inércia à torção $I_T = 6 \times 10^6\,\text{mm}^4$. Ache a deflexão vertical v_D e o ângulo de torção θ_D da extremidade livre. São dados: $P = 200$ kgf, $E = 21\,000\,\text{kgf/mm}^2$ e $G = 8\,400\,\text{kgf/mm}^2$.
R.: $v_C = 49{,}7$ mm, $\theta = 0{,}00943$ rad.



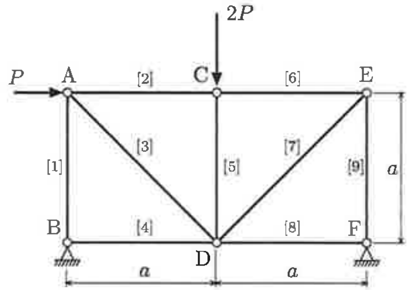
18. O quadro ABCD, de lados iguais ℓ, sofre um corte no meio do lado AD. Forças iguais e opostas, P, perpendiculares ao plano do quadro, atuam nas extremidades do corte. Determine o deslocamento d entre as extremidades cortadas, admitindo que todos os trechos tenham rigidez à flexão EI e rigidez à torção GI_T.
R.: $d = \frac{5P\ell^3}{6EI} + \frac{3P\ell^3}{2GI_T}$.



5 Processo dos Esforços

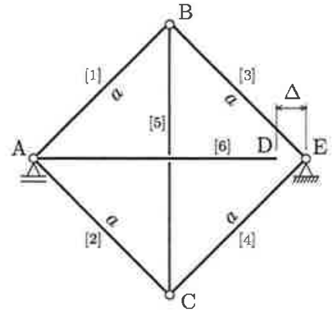
19. Determine as forças normais nas barras 4, 5 e 6 da treliça ao lado, e forneça a componente vertical do deslocamento do nó D. Considere EA = const.
R.: $N_4 = \frac{P}{2}$, $N_5 = -2P$, $N_6 = -\frac{3P}{2}$,

$$v_D = \left(\frac{5}{2} + 2\sqrt{2}\right)\frac{Pa}{EA}\ (\downarrow).$$

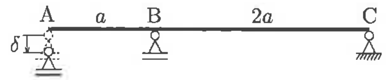


20. Para as barras da treliça ao lado, calcule as forças normais decorrentes da eliminação da folga Δ na fixação da extremidade da barra 6 com o nó E. Admita EA = const.
R.: $N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -0{,}146\,\frac{EA\Delta}{a}$,

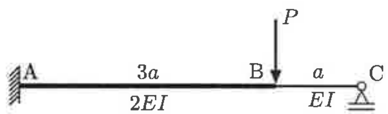
$$N_5 = N_6 = 0{,}207\,\frac{EA\Delta}{a}.$$



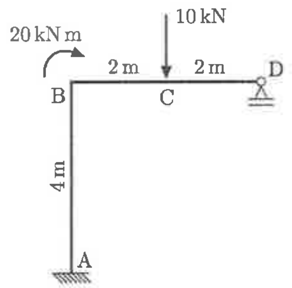
21. Trace os diagramas dos esforços solicitantes para a viga contínua submetida a um recalque δ do apoio A. Admita EI = const.
R.: $M_B = -\frac{EI}{a^2}\delta$, $R_A = \frac{EI}{a^3}\delta$ $(\downarrow)$.



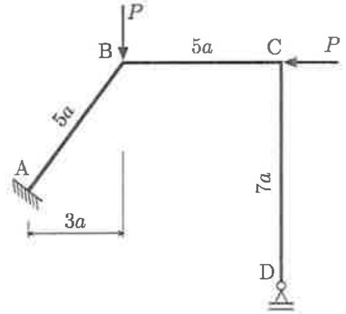
22. Calcule o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga P, sabendo-se que o trecho AB tem o dobro do produto de rigidez à flexão que o trecho BC.
R.: $v_B = \frac{153}{520}\frac{Pa^3}{EI}$ $(\downarrow)$



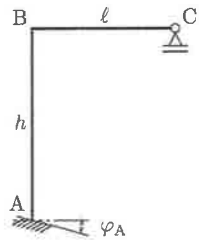
23. Para o pórtico plano da figura, trace os diagramas de esforços solicitantes e calcule a rotação φ_B do nó B. Considere apenas o efeito da deformação por momento fletor admitindo EI = const.
R.: $M_A = 6{,}88\,\mathrm{kN\,m}$ (↶),
$R_D = 8{,}28\,\mathrm{kN}$ (↑), $\varphi_B = \frac{27{,}5}{EI}$ (↷).



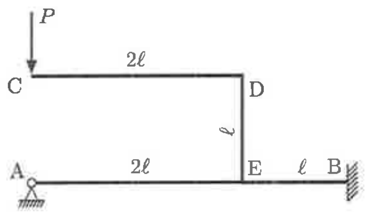
24. Trace o diagrama de momentos fletores admitindo EI = const.
R.: $M_A = 0{,}455Pa$ (↷),
$R_D = 0{,}0682P$ (↓).



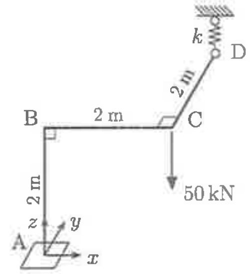
25. Trace os diagramas de esforços solicitantes para o pórtico ao lado. Considere EI = const.
R.: $M_A = \frac{3EI}{3h+\ell}\varphi_A$ (↷),
$R_C = \frac{3EI}{\ell(3h+\ell)}\varphi_A$ (↑).



26. Trace o diagrama de momentos fletores e calcule o deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga P. São conhecidos o módulo de elasticidade E e o momento de inércia à flexão I da seção transversal.
R.: $R_A = 0{,}704P$ (↑), $R_B = 0{,}296P$ (↑),
$M_B = 0{,}888P\ell$ (↷), $v_C = 8{,}54\frac{P\ell^3}{EI}$ (↓).

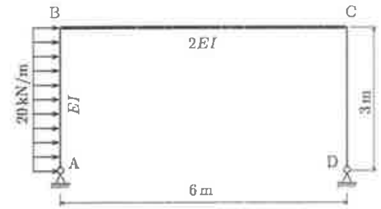


27. Na estrutura ao lado, a barra AB é vertical e as barras BC e CD estão em um plano horizontal, o ponto D preso a uma mola vertical de rigidez k. Para o carregamento indicado, trace os diagramas de momento fletor e momento de torção, e calcule o deslocamento vertical do ponto D e a rotação φ_{Cy} em torno do eixo y. São dados: $EI = 10^4\,\mathrm{kN\,m^2}$, $GI_T = 5 \times 10^3\,\mathrm{kN\,m^2}$, $k = 10^4\,\mathrm{kN/m}$.
R.: $M_{Ax} = -27{,}8\,\mathrm{kN\,m}$, $M_{Ay} = -72{,}2\,\mathrm{kN\,m}$,
$M_{Az} = 0$, $R_D = 13{,}9\,\mathrm{kN}$ (↑),
$v_C = 1{,}40 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$ (↓), $\varphi_{Cy} = 0{,}0217\,\mathrm{rad}$ (↷).

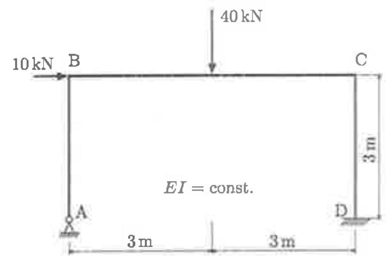


Processo dos Esforços - Exercícios de Prova

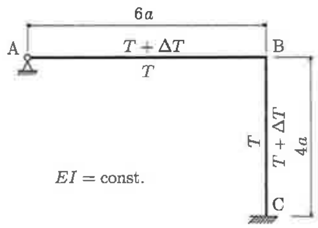
28. Trace os diagramas de esforços solicitantes para o pórtico plano submetido à força lateral distribuída como indicado na figura. Os pilares têm produto de inércia à flexão EI e a viga, $2EI$. Considere apenas o efeito da deformação por momento fletor.
R.: $M_B = 40{,}5\,\mathrm{kN\,m}$ $\quad M_C = -49{,}5\,\mathrm{kN\,m}$.



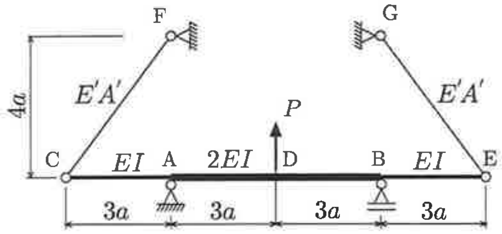
29. Trace os diagramas de esforços solicitantes para o pórtico plano da figura sujeito ao carregamento indicado. Considere apenas o efeito da deformação por momento fletor e EI = const. para todas as barras.
R.: $M_B = -18{,}5\,\mathrm{kN\,m}$
$M_C = -28{,}8\,\mathrm{kN\,m}$
$M_D = 19{,}7\,\mathrm{kN\,m}$



30. Determine os diagramas de esforços solicitantes quando a estrutura ao lado é submetida a uma variação de temperatura ΔT no seu lado externo. Adote $h = a/2$ e considere a deformação axial produzida pela temperatura, mas despreze os efeitos das deformações por força normal e força cortante ($EA = GA = \infty$).
R.: $M_B = 2{,}18\alpha\Delta TEI/a$
$M_C = 2{,}47\alpha\Delta TEI/a$

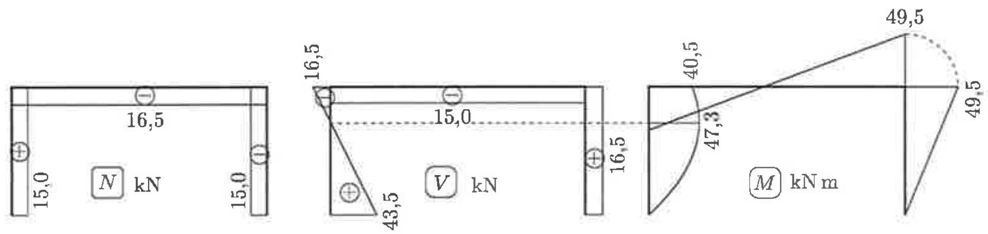


31. A estrutura da figura é formada por uma viga com trechos AB (produto de rigidez à flexão $2EI$), CA e BE (produto EI) ligadas às barras CF e EG (produto de rigidez axial $E'A'$). A estrutura está sujeita à ação de uma carga P alicada no ponto D. São pedidos: (a) o diagrama de momentos fletores da viga; (b) a rotação ϕ_B no ponto B. Considere $E'A' = (25/3)EI/a^2$ e que a deformação axial da viga pode ser desprezada.
R.: $M_A = 0{,}432Pa$, $M_D = -1{,}068Pa$, $\phi_B = 0{,}477Pa^2/EI$.

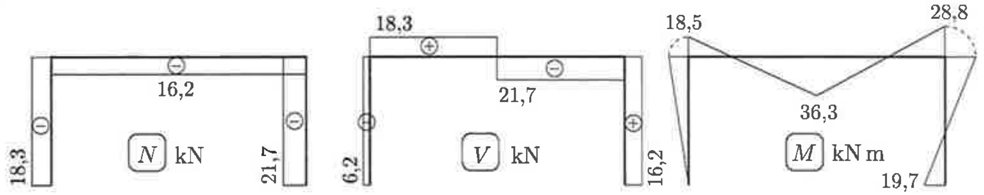


Respostas

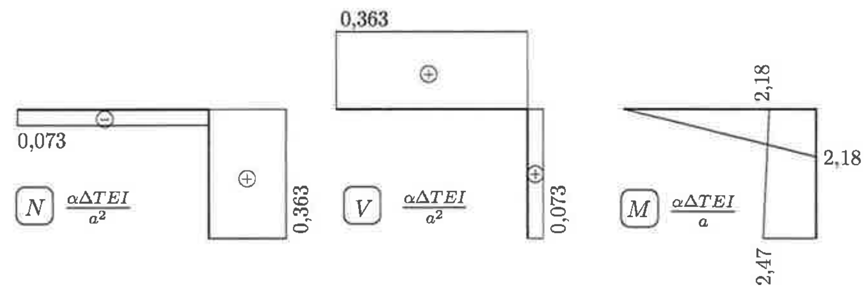
28.



29.

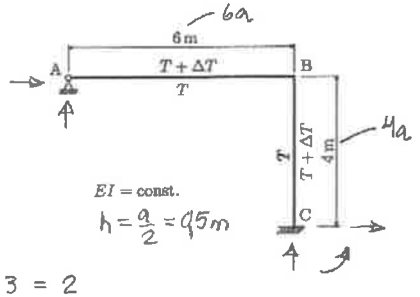


30.

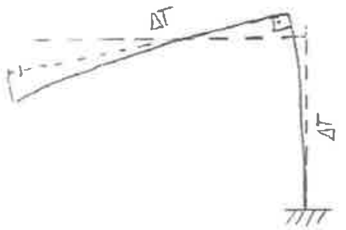


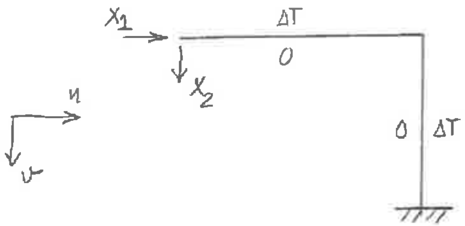
Determine os diagramas de esforços solicitantes quando a estrutura ao lado é submetida a uma variação de temperatura ΔT no seu lado externo. Considere a deformação axial produzida pela temperatura mas despreze os efeitos das deformações por força normal e força cortante ($EA = GA = \infty$).

R.: $M_B = 2{,}18\alpha\Delta T EI/a$
$M_C = 2{,}47\alpha\Delta T EI/a$

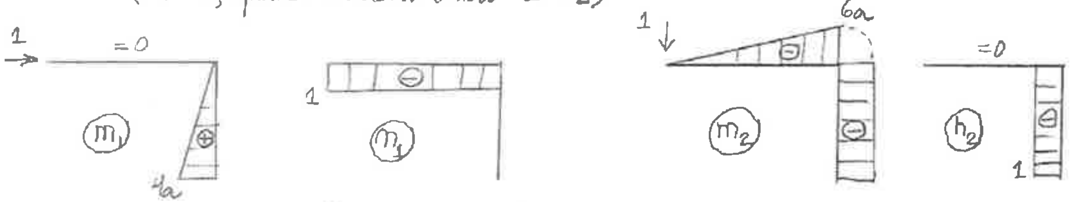


$GH = 5 - 3 = 2$





Esforços solicitantes para os carregamentos unitários associados à X_1 e X_2 ($m>0$, quando traciona o lado de ΔT_2)



$$u_A = \sum_{b=1}^{m_b}\left[\frac{\alpha(\Delta T_2-\Delta T_1)}{h}\int_0^{l_b} m_1\,dx + \alpha\Delta T_G\int_0^{l_b} n_1\,dx\right] = \frac{\alpha(-\Delta T)}{\frac{a}{2}}(2a\times 4a) + \alpha\left(\frac{\Delta T}{2}\right)(-1\times 6a)$$

$$= -19\,\alpha\Delta T a$$

$$v_A = \frac{\alpha(-\Delta T)}{a/2}(-3a\cdot 6a - 6a\cdot 4a) + \alpha\left(\frac{\Delta T}{2}\right)(-1\times 4a) = +82\,\alpha\Delta T a$$

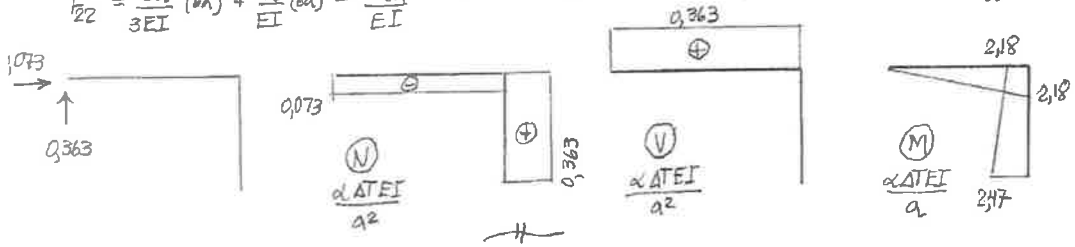
$$F_{11} = \frac{4a}{3EI}(4a)^2 = \frac{64}{3}\frac{a^3}{EI}$$

$$F_{12} = -\frac{4a}{2EI}(4a\times 6a) = -48\frac{a^3}{EI}$$

$$F_{22} = \frac{6a}{3EI}(6a)^2 + \frac{4a}{EI}(6a)^2 = \frac{216a^3}{EI}$$

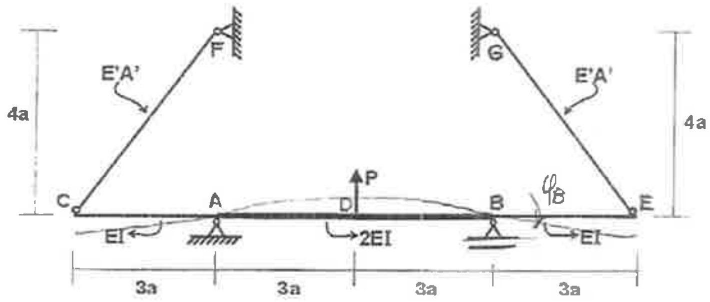
$$\frac{a^3}{EI}\begin{bmatrix} 64/3 & -48 \\ -48 & 216 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19 \\ -82 \end{Bmatrix}\alpha\Delta T a$$

$$X_1 = \frac{168}{2304} = 0{,}073\,\frac{\alpha\Delta T EI}{a^2} \qquad X_2 = -0{,}363\,\frac{\alpha\Delta T EI}{a^2}$$

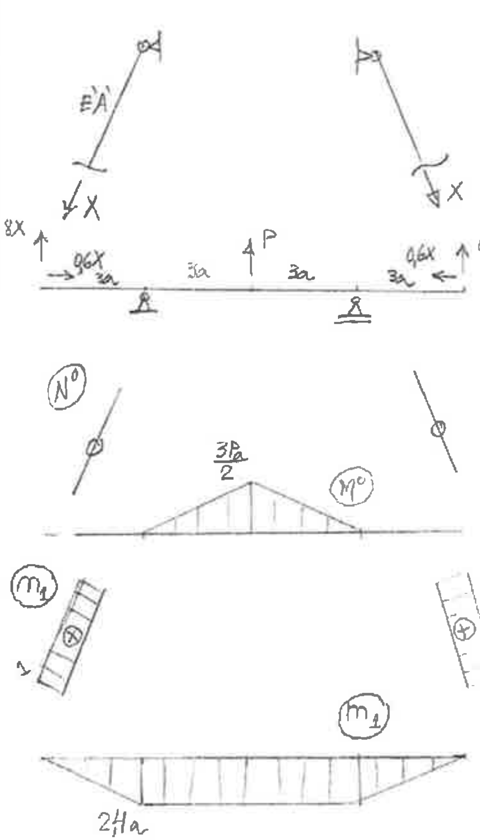


1ª Questão (6 pontos)

A estrutura da figura abaixo é formada por uma viga com trechos **AB** (rigidez à flexão **2EI**), **CA** e **BE** (rigidez à flexão **EI**) ligada às barras **CF** e **EG** (rigidez ao esforço normal **E'A'**). A estrutura está sujeita à ação de uma carga **P** aplicada no ponto **D**. Pede-se: a) o diagrama de momentos fletores da viga; b) a rotação φ_B no ponto **B**. Considere que **E'A'** = $25/3{\times}$**EI/a**^{2} e que a deformação normal das barras **AB, CA** e **BE** pode ser desprezada.



$\boxed{EIF}$ Considerando a simetria da estrutura e do carregamento.



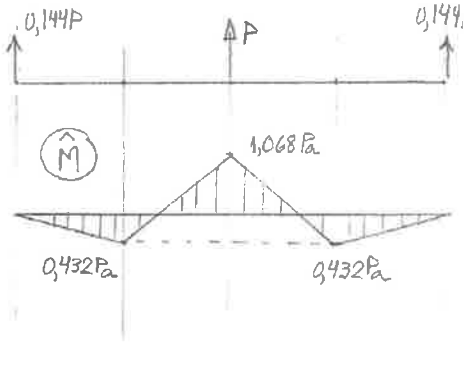
$$F_{11} = \sum_{b=1}^{m_b}\int_0^{l_b}\left(\frac{N_1 n_1}{EA} + \frac{m_1 m_1}{EI}\right)dx$$

$$= 2\times\left(\frac{1^2\,a^2\,5a}{\frac{25}{3}EI}\right) + 2\times\left(\frac{3a}{3EI}\left(\frac{12}{5}a\right)^2\right) + \frac{6a}{(2EI)}\times\left(\frac{12}{5}a\right)^2 = \frac{750}{25}\frac{a^3}{EI}$$

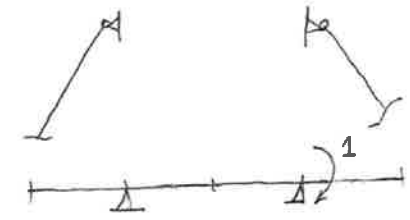
$$d_{01} = 2\left(-\frac{3a}{2(2EI)}\left(\frac{12a}{5}\times\frac{3Pa}{2}\right)\right) = -\frac{54}{10}\frac{Pa^3}{EI}$$

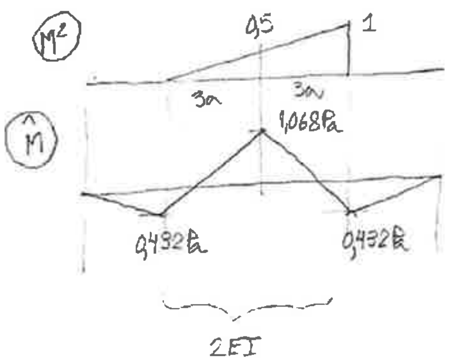
$$F_{11}X = -d_{01} \implies X = \frac{9P}{50} = 0{,}18P$$

a) Diagrama de momos.



Rotação φ_B





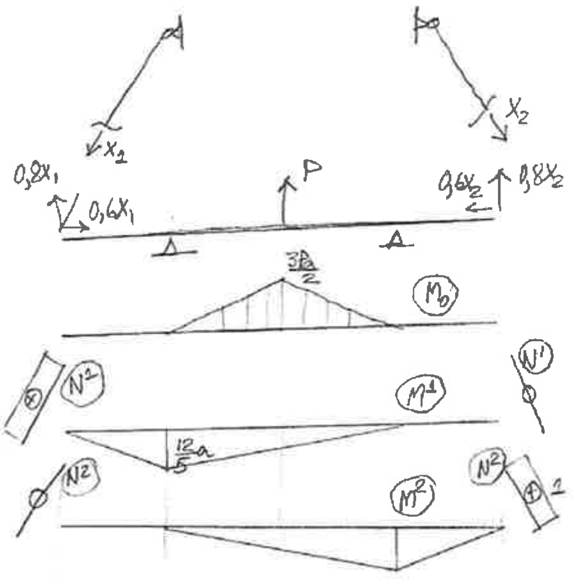
$$\varphi_B = \frac{\cancel{3a}}{\cancel{6}(2EI)}\left[+0{,}5(-0{,}432Pa + 2\times 1{,}068Pa)\right] + \frac{\cancel{3a}}{\cancel{6}(2EI)}\left[0{,}5(2\times 1{,}068Pa - 0{,}432Pa) + 1(1{,}068Pa - 2\times 0{,}432Pa)\right]$$

0,852

$$= (0{,}213 + 0{,}213 + 0{,}051)\frac{Pa^2}{EI}$$

$$\boxed{\varphi_B = 0{,}477\frac{Pa^2}{EJ}}$$

Verificação: (Não considerando a simetria)



$$F_{11} = \left(\frac{1^2\,5a^3}{\frac{25}{3}EI}\right) + \frac{3a}{3EI}\left(\frac{12}{5}a\right)^2 + \frac{6a}{3(2EJ)}\left(\frac{12}{5}a\right)^2$$

$$= \left(\frac{3}{5} + \frac{144}{25} + \frac{144}{25}\right)\frac{a^3}{EI} = \frac{303}{25}\frac{a^3}{EJ}$$

$$F_{12} = \frac{6a}{6(2EI)}\left(\frac{12}{5}a\right)^2 = \frac{72}{25}\frac{a^3}{EI}$$

$$d_{01} = -\frac{3a}{6(2EI)}\left[\frac{3Pa}{2}\times\left(\frac{12a}{5} + 2\times\frac{6a}{5}\right)\right] - \frac{3a}{3(2EI)}\left[\frac{3Pa}{2}\,\frac{6}{5}a\right] = \left(-\frac{9}{5} - \frac{9}{10}\right)\frac{Pa^3}{EI}$$

$$= -\frac{27}{10}\frac{Pa^3}{EI}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{303}{25} & \frac{72}{25} \\ \frac{72}{25} & \frac{303}{25} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{27}{10} \\ \frac{27}{10} \end{Bmatrix} \Rightarrow X_1 = X_2 = \frac{9}{50}P$$