ELETROMAGNETISMO I (4302303) - LISTA 1a

1. Seja $\boldsymbol{\mathscr{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ o vetor separação de um ponto fixo $\mathbf{r}'$ de coordenadas cartesianas (x', y', z') ao ponto $\mathbf{r}$ de coordenadas (x, y, z) e seja $\mathscr{r}$ sua magnitude. Mostre que:

   (a) $\nabla(\mathscr{r}^2) = 2\boldsymbol{\mathscr{r}}$.

   (b) $\nabla(1/\mathscr{r}) = -\hat{\boldsymbol{\mathscr{r}}}/\mathscr{r}^2$

   (c) Determine a fórmula geral para $\nabla(\mathscr{r}^n)$.

2. Esboce a projeção no plano xy do campo vetorial

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

   e calcule sua divergência.

3. Prove as seguintes regras de produto:

   (i) $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

   (ii) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

   (iii) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

   (iv) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

4. Prove que:

   (a) $\int_{\mathcal{S}} f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathcal{S}} [\mathbf{A} \times \nabla f] \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\mathcal{P}} f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

   (b) $\int_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_{\mathcal{S}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$

5. Expresse os versores $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ em termo de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Teste suas respostas de diversas formas ($\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} 1$, $\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{?}{=} 0$, $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{?}{=} \hat{\boldsymbol{\phi}}$,...). Escreva também as expressões inversas, i.e., $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ em termos de $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, θ e ϕ.

6. Verifique o teorema da divergência para o campo vetorial $\mathbf{v} = r^2\hat{\mathbf{r}}$ usando como volume de integração uma esfera de raio R centrada na origem.

7. Expresse os versores em coordenadas cilíndricas $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ em termos de $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$. Inverta as expressões, escrevendo $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ em termos de $\hat{\mathbf{s}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, $\hat{\mathbf{z}}$ e ϕ.

8. Mostre que

   (a)

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)$$

(b) Seja $\theta(x)$ a função de Heaviside ou função escada

$$\theta(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Mostre que $\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$.
Dica: Integração por partes.

9. Calcule a integral

$$J = \int_{\mathcal{V}} e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau,$$

onde $\mathcal{V}$ é o volume de uma esfera de raio R centrada na origem usando:

(a) o conceito de função δ.

(b) integração por partes para campos vetoriais.

10. A integral

$$\mathbf{a} \equiv \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{a}$$

é às vezes chamada de **vetor área** da superfície $\mathcal{S}$.

(a) Determine o vetor área de um semi-hemisfério de raio R.

(b) Mostre que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ para qualquer superfície fechada.

(c) Mostre que $\mathbf{a}$ é o mesmo para qualquer superfície que compartilhe o mesmo contorno.

(d) Mostre que

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l},$$

onde a integral é feita em torno da curva de contorno. Dica: Uma possibilidade é desenhar o cone subentendido pela superfície a partir da origem. Divida a superfície do cone em cunhas infinitesimais, cada uma com o vértice na origem e o lado oposto ao longo de $d\mathbf{l}$, e explorar a interpretação geométrica do produto vetorial.

(e) Mostre que $\int_{\mathcal{S}} \nabla T \times d\mathbf{s} = -\oint_{\mathcal{P}} T d\mathbf{l}$. Dica: Use $\mathbf{v} = \mathbf{c}T$ no teorema de Stokes.

(f) Mostre que

$$\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

para qualquer vetor constante $\mathbf{c}$. Use $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$ no ítem (e).

11. Dada o campo vetorial:

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$$

(a) Calcule sua divergência de maneira direta e teste seu resultado usando o teorema da divergência.

(b) Mostre que a fórmula geral para $r^n\hat{\mathbf{r}}$ é (para $n > -3$):

$$\nabla \cdot (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \begin{cases} (n+2)r^{n-1} & \text{se } n \neq -2 \\ 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) & \text{se } n = -2 \end{cases}$$

A divergência é mal definida na origem para $n \leq -3$.

(c) Mostre que $\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$

12. Verifique o teorema da divergência para o campo vetorial

$$\mathbf{v} = (r^2 \cos\theta)\hat{\mathbf{r}} + (r^2 \cos\phi)\hat{\boldsymbol{\theta}} - (r^2 \cos\theta \sin\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

usando como volume um octante da esfera de raio R. Certifique-se de incluir a superfície toda na integral de fluxo!

13. Calcule a divergência do campo vetorial

$$\mathbf{v} = (r\cos\theta)\hat{\mathbf{r}} + (r\sin\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\sin\theta\cos\phi)\hat{\boldsymbol{\phi}}.$$

Verifique o teorema da divergência para esse campo usando como volume o hemisfério superior de uma esfera de raio R centrada na origem e apoiado sobre o plano xy.