



# Parte 05

## Análise de Variância

Prof. Dr. Renato de Oliveira Moraes



| Amostra 1 | Amostra 2 | Amostra 3 |
|-----------|-----------|-----------|
| 7         | 6         | 4         |
| 3         | 5         | 7         |
| 6         | 5         | 6         |
| 6         | 8         | 7         |

|                          |      |      |      |       |
|--------------------------|------|------|------|-------|
| N                        | 4    | 4    | 4    | 3     |
| $\bar{x}_{\text{médio}}$ | 5,5  | 6    | 6    | 5,83  |
| s                        | 1,73 | 1,41 | 1,41 | 0,289 |
| $s^2$                    | 3    | 2    | 2    | 0,083 |

### Variância entre amostras

Variância entre as médias amostrais  $\rightarrow 0,083$  3 médias ( $\sigma^2_{\text{Média}} = \sigma^2/N$ )  $\rightarrow v = 2$

Estimativa da variância da população será  $N \times s^2_{\text{Média}} = 4 \times 0,083 = 0,33$

### Variância dentro das amostras

Média das variâncias amostrais  $= (3 + 2 + 2) / 3 = 2,33 \rightarrow v = 12 - 3 = 9$

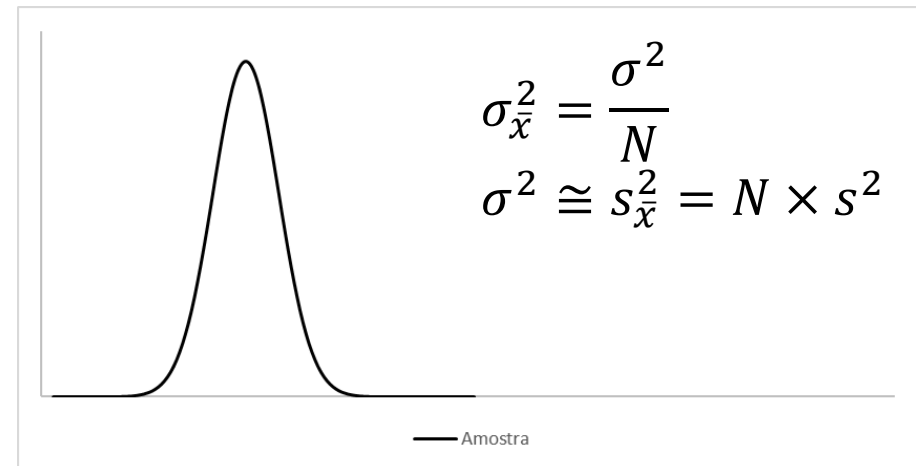
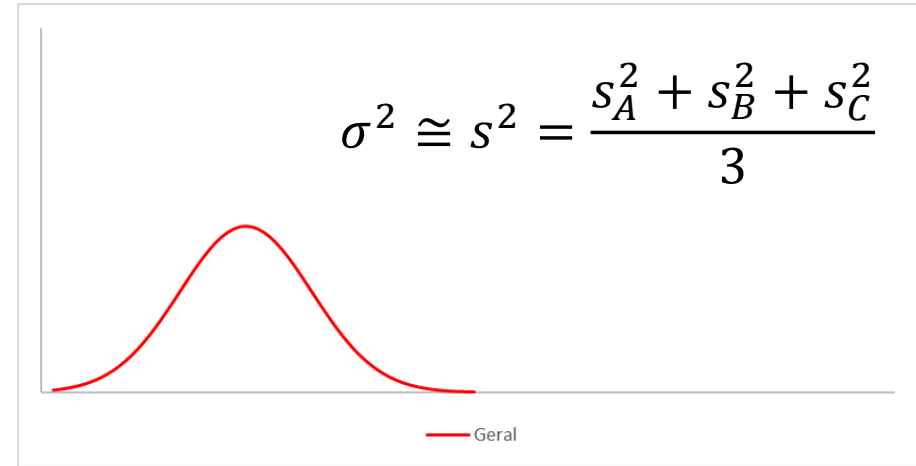
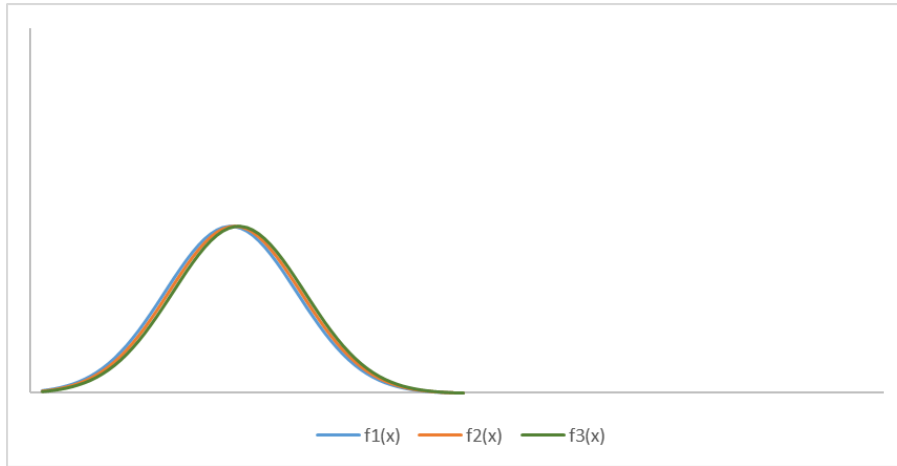
### Teste F de comparação de variâncias

$$F_{\text{Calculado}} = \frac{0,33}{2,33} = 0,143$$

$$\alpha = 5\% \rightarrow F_{\text{Crítico}} = F_{5\%; 2; 9} = 4,256$$



# $H_0$ é verdadeiro



$$s^2 \cong s_{\bar{x}}^2 \Rightarrow F_{Calc} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{s^2} \cong 1$$



*Soma 10 aos elementos  
da amostra A*

| Amostra 1 | Amostra 2 | Amostra 3 |
|-----------|-----------|-----------|
| 17        | 6         | 4         |
| 13        | 5         | 7         |
| 16        | 5         | 6         |
| 16        | 8         | 7         |

|                          |      |      |      |        |
|--------------------------|------|------|------|--------|
| N                        | 4    | 4    | 4    | 3      |
| $\bar{x}_{\text{médio}}$ | 15,5 | 6    | 6    | 9,17   |
| s                        | 1,73 | 1,41 | 1,41 | 5,485  |
| $s^2$                    | 3    | 2    | 2    | 30,083 |

### **Variância entre amostras**

*Variância entre as médias amostrais*  $\rightarrow 30,083$       3 médias  $\rightarrow v = 2$

*Estimativa da variância da população será:*  $N \times s^2_{\text{Média}} = 4 * 30,083 = 120,33$

### **Variância dentro das amostras**

*Média das variâncias amostrais*  $= (3 + 2 + 2) / 3 = 2,333$        $\rightarrow v = 12 - 3 = 9$

### **Teste F de comparação de variâncias**

$$F_{\text{Calculado}} = \frac{120,33}{2,33} = 51,571$$

$$\alpha=5\% \rightarrow F_{\text{Crítico}} = F_{5\%;2;9} = 4,256$$



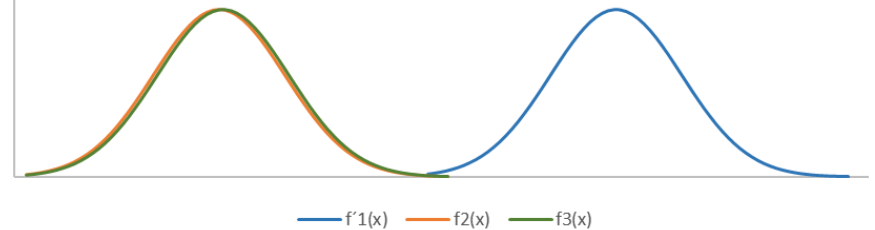
$H_0$  é verdadeiro

$$\sigma^2 \cong s^2 = \frac{s_A^2 + s_B^2 + s_C^2}{3}$$

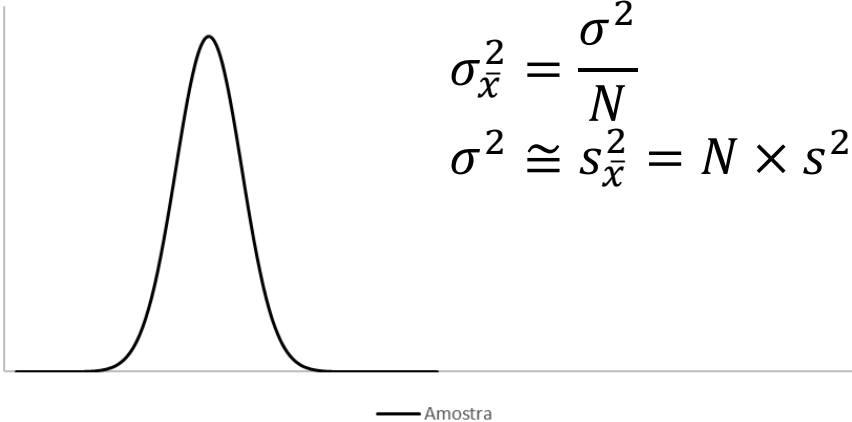


$H_0$  é falso

$$\sigma^2 \cong s^2 = \frac{s_A^2 + s_B^2 + s_C^2}{3}$$

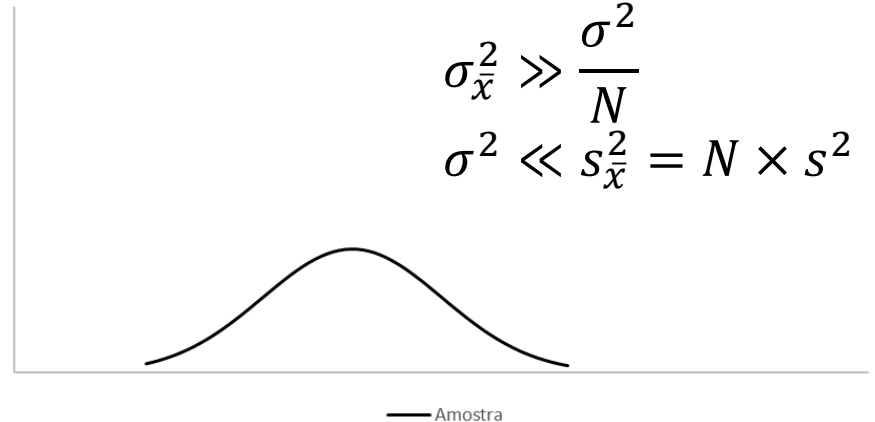


$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$
$$\sigma^2 \cong s_{\bar{x}}^2 = N \times s^2$$



$$s^2 \cong s_{\bar{x}}^2 \Rightarrow F_{Calc} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{s^2} \cong 1$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 \gg \frac{\sigma^2}{N}$$
$$\sigma^2 \ll s_{\bar{x}}^2 = N \times s^2$$



$$s^2 \neq s_{\bar{x}}^2 \Rightarrow F_{Calc} = \frac{s_{\bar{x}}^2}{s^2} \gg 1$$



# ANOVA - Tabela

| Fonte de variação            | Soma de quadrados                                                        | Graus de liberdade       | Quadrado médio                               | F                         | $F_{k-1; (\Sigma n) - k; \alpha}$ |
|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------|----------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| Entre amostras               | $SQE = SQ(tratamento)$<br>$SQE = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$ | $k - 1$                  | $s_E^2 = \frac{SQE}{k - 1}$                  | $F = \frac{s_E^2}{s_R^2}$ | $F_{Crítico}$                     |
| Dentro das amostras Residual | $SQR = SQ(erro)$<br>$SQR = \sum (n_i - 1) s_i^2$                         | $(\sum_{i=1}^k n_i) - k$ | $s_R^2 = \frac{SQR}{(\sum_{i=1}^k n_i) - k}$ |                           |                                   |
| Total                        | $SQT = SQ(total)$<br>$SQT = \sum (x_i - \bar{\bar{x}})^2$                | $(\sum_{i=1}^k n_i) - 1$ |                                              |                           |                                   |

$$SQ(total) = SQ(tratamento) + SQ(erro)$$



| A | B | C |
|---|---|---|
| 7 | 6 | 4 |
| 3 | 5 | 7 |
| 6 | 5 | 6 |
| 6 | 8 | 7 |

| N                        | 4    | 4    | 4    | 3    |
|--------------------------|------|------|------|------|
| $\bar{x}_{\text{médio}}$ | 5,50 | 6,00 | 6,00 | 5,83 |
| s                        | 1,73 | 1,41 | 1,41 | 0,29 |
| $s^2$                    | 3,00 | 2,00 | 2,00 | 0,08 |

**SQE**

| $x_{\text{mm}} - \bar{x}_{\text{médio}}$        | 0,33 | -0,17 | -0,17 |             |
|-------------------------------------------------|------|-------|-------|-------------|
| $(x_{\text{mm}} - \bar{x}_{\text{médio}})^2$    | 0,11 | 0,03  | 0,03  |             |
| $N_i(x_{\text{mm}} - \bar{x}_{\text{médio}})^2$ | 0,44 | 0,11  | 0,11  | <b>0,67</b> |

**SQR**

| $(N_i - 1)s^2$ | 9 | 6 | 6 | <b>21,00</b> |
|----------------|---|---|---|--------------|
|----------------|---|---|---|--------------|

**SQT**

| $(x - x_{\text{mm}})^2$ | 1,36 | 0,03 | 3,36 | <b>21,67</b> |
|-------------------------|------|------|------|--------------|
|                         | 8,03 | 0,69 | 1,36 |              |
|                         | 0,03 | 0,69 | 0,03 |              |
|                         | 0,03 | 4,69 | 1,36 |              |



| Fonte de variação            | Soma de quadrados | Graus de liberdade | Quadrado médio | F                   | $F_{k-1;(\Sigma n)-k;\alpha}$ |
|------------------------------|-------------------|--------------------|----------------|---------------------|-------------------------------|
| Entre amostras               | $SQE = 0,667$     | 2                  | 0,334          | 0,143               | 4,256                         |
| Dentro das amostras Residual | $SQR = 21$        | 9                  | 2,33           | <u>Sig.</u> = 86,9% |                               |
| Total                        | $SQT = 21,667$    | 11                 |                |                     |                               |



$$SQ(total) = \sum (x_i - \bar{\bar{x}})^2$$

somar todos

$$SQ(tratamento) = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

entre amostras

$$SQ(erro) = \sum (n_i - 1) s_i^2$$

dentro das amostras

$$SQ(total) = SQ(tratamento) + SQ(erro)$$

$$SQ(erro) = SQ(total) - SQ(tratamento)$$



$x_{ij}$  : observação  $j$  da amostra  $i$

$x_i$  : soma dos valores da amostra  $i$

$$SQE = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n_i} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$$

$$SQR = SQT - SQE$$



| Fonte de variação            | Soma de quadrados                                                                                     | Graus de liberdade                    | Quadrado médio                                            | F                         | $F_{k-1;(\sum n)-k;\alpha}$ |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| Entre amostras               | $SQE = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n_i} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$ | $k - 1$                               | $s_E^2 = \frac{SQE}{k - 1}$                               | $F = \frac{s_E^2}{s_R^2}$ | $F_{\text{Crítico}}$        |
| Dentro das amostras Residual | $SQR = SQT - SQE$                                                                                     | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k$ | $s_R^2 = \frac{SQR}{\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k}$ |                           |                             |
| Total                        | $SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$        | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - 1$ |                                                           |                           |                             |

Onde:

$x_i$  é a soma de todos os elementos da amostra  $i$



# Refazendo o exemplo

|                                     | A       | B   | C   |             |
|-------------------------------------|---------|-----|-----|-------------|
|                                     | 7       | 6   | 4   |             |
|                                     | 3       | 5   | 7   |             |
|                                     | 6       | 5   | 6   |             |
|                                     | 6       | 8   | 7   |             |
| $N_i$                               | 4       | 4   | 4   | <b>12</b>   |
| Soma $(x_{ij}) = x_i$               | 22      | 24  | 24  | <b>70</b>   |
| Soma $(x_{ij}^2)$                   | 130     | 150 | 150 | <b>430</b>  |
| $(\text{Soma } (x_{ij}))^2 = x_i^2$ | 484     | 576 | 576 | <b>1636</b> |
| $(x_i)^2 / N_i$                     | 121     | 144 | 144 | <b>409</b>  |
| SQE                                 | 0,6667  |     |     |             |
| SQR                                 | 21      |     |     |             |
| SQT                                 | 21,6667 |     |     |             |



# Refazendo o exemplo

| Fonte de variação            | Soma de quadrados                                                                                                                                                                                                               | Graus de liberdade                                    | Quadrado médio                                                                           | F                                     | $F_{k-1;(\sum n_i)-k;\alpha}$ |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| Entre amostras               | $SQE = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n_i} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$ $SQE = \left( \frac{22^2}{4} + \frac{24^2}{4} + \frac{24^2}{4} \right) - \frac{(70)^2}{12}$ $SQE = 409 - 408,333 = 0,667$ | $k - 1 = 2$                                           | $s_E^2 = \frac{SQE}{k-1}$ $s_E^2 = \frac{0,667}{2}$ $s_E^2 = 0,333$                      | $F = \frac{s_E^2}{s_R^2}$ $F = 0,143$ | $F_{\text{Crítico}}$<br>4,256 |
| Dentro das amostras Residual | $SQR = SQT - SQE$ $SQR = 21,667 - 0,667 = 21$                                                                                                                                                                                   | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k$<br>12 - 3<br>9  | $s_R^2 = \frac{SQR}{\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k}$ $s_R^2 = \frac{21}{9} = 2,333$ | Sig. = 86,9%                          |                               |
| Total                        | $SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$ $SQT = 130 + 130 + 150 - \frac{(70)^2}{12}$ $SQT = 430 - 408,333 = 21,667$                                                       | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - 1$<br>12 - 1<br>11 |                                                                                          |                                       |                               |



# Exemplo

- Considere os dados abaixo e verifique se há evidências de que as médias não sejam iguais

| A  | B | C |
|----|---|---|
| 12 | 3 | 4 |
| 14 | 4 | 5 |
| 17 | 5 | 3 |
| 15 | 4 |   |
| 11 |   |   |



| Fonte de variação            | Soma de quadrados                                                                                     | Graus de liberdade                    | Quadrado médio                                            | F                         | $F_{k-1;(\sum n)-k;\alpha}$ |
|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| Entre amostras               | $SQE = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n_i} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$ | $k - 1$                               | $s_E^2 = \frac{SQE}{k - 1}$                               | $F = \frac{s_E^2}{s_R^2}$ | $F_{\text{Crítico}}$        |
| Dentro das amostras Residual | $SQR = SQT - SQE$                                                                                     | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k$ | $s_R^2 = \frac{SQR}{\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - k}$ |                           |                             |
| Total                        | $SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N}$        | $\left( \sum_{i=1}^k n_i \right) - 1$ |                                                           |                           |                             |

Onde:

$x_i$  é a soma de todos os elementos da amostra  $i$



# Exercício

|                                     | A        | B   | C   |               |
|-------------------------------------|----------|-----|-----|---------------|
|                                     | 12       | 3   | 4   |               |
|                                     | 14       | 4   | 5   |               |
|                                     | 17       | 5   | 3   |               |
|                                     | 15       | 4   |     |               |
|                                     | 11       |     |     |               |
| $N_i$                               | 5        | 4   | 3   | <b>12</b>     |
| Soma $(x_{ij}) = x_i$               | 69       | 16  | 12  | <b>97</b>     |
| Soma $(x_{ij}^2)$                   | 975      | 66  | 50  | <b>1091</b>   |
| $(\text{Soma } (x_{ij}))^2 = x_i^2$ | 4761     | 256 | 144 | <b>5161</b>   |
| $(x_j)^2 / N_i$                     | 952,2    | 64  | 48  | <b>1064,2</b> |
| SQE                                 | 280,167  |     |     |               |
| SQR                                 | 26,8     |     |     |               |
| SQT                                 | 306,9167 |     |     |               |



$$SQE = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n_i} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N} = \left( \frac{69^2}{5} + \frac{16^2}{4} + \frac{12^2}{3} \right) - \frac{(87)^2}{12}$$

$$SQE = 1064,2 - 784,093 = 280,117$$

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k x_i \right)^2}{N} = 975 + 66 + 50 - \frac{(97)^2}{12}$$

$$SQT = 1091 - 784,083 = 306,917$$

$$SQR = SQT - SQE$$

$$SQR = 306,917 - 280,117 = 26,8$$



| Fonte de variação | Soma de quadrados | Graus de liberdade | Quadrado médio | F           | $F_{k-1;(\Sigma n)-k;\alpha}$ |
|-------------------|-------------------|--------------------|----------------|-------------|-------------------------------|
| Entre amostras    | 280,117           | 2                  | 140,058        | 47,035      | $F_{\text{Crítico}}$          |
| Residual          | 26,8              | 9                  | 2,978          | Sig. 0,002% | 4,256                         |
| Total             | 306,917           | 11                 |                |             |                               |

*Rejeitar  $H_0$  – Hipótese de igualdade*



$$MQ(tratamento) = \frac{SQ(tratamento)}{k - 1}$$

$$MQ(erro) = \frac{SQ(erro)}{N - k}$$

$$F_{\text{Calculado}} = \frac{MQ(tratamento)}{MQ(erro)}$$

Graus de liberdade do numerador =  $k - 1$

Graus de liberdade do denominador =  $N - k$

| Grupos |   |   |
|--------|---|---|
| A      | B | C |
| 12     | 3 | 4 |
| 14     | 4 | 5 |
| 17     | 5 | 3 |
| 15     | 4 |   |
| 11     |   |   |

|             |       |    |    |
|-------------|-------|----|----|
|             | Total |    |    |
| $\Sigma$    | 69    | 16 | 12 |
| N           | 5     | 4  | 3  |
| $\nu (N-1)$ | 4     | 3  | 2  |

|                         |       |       |       |      |
|-------------------------|-------|-------|-------|------|
| Medias                  | 13,8  | 4     | 4     | 8,08 |
| $(x_{med} - \bar{X})^2$ | 5,72  | -4,08 | -4,08 |      |
| $(\Delta)^2$            | 32,68 | 16,67 | 16,67 |      |

$$\bar{\bar{X}} = 8,08 \Rightarrow SQ(total) = 306,92$$

$$SQ(tratamento) = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{X}})^2$$

$$SQ(tratamento) = 5(13,8 - 8,02)^2 + 4(4 - 8,02)^2 + 3(4 - 8,02)^2$$

$$SQ(tratamento) = 280,12$$



$$\bar{\bar{x}} = 8,08 \Rightarrow SQ(total) = \sum (x_i - \bar{\bar{x}})^2 = 306,92$$

$$SQ(total) = 306,92$$

$$SQ(tratamento) = \sum n_i (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})^2$$

$$SQ(tratamento) = 5(13,8 - 8,02)^2 + 4(4 - 8,02)^2 + 3(4 - 8,02)^2$$

$$SQ(tratamento) = 280,12$$

$$SQ(erro) = SQ(total) - SQ(tratamento)$$

$$SQ(erro) = 26,8$$



|                 |        | Graus de Liberdade |
|-----------------|--------|--------------------|
| SQ (tratamento) | 280,12 | 2                  |
| SQ (erro)       | 26,8   | 9                  |
| SQ (total)      | 306,92 | 11                 |

$$MQ(tratamento) = \frac{SQ(tratamento)}{k - 1} = \frac{280,12}{2} = 140,06$$

$$MQ(erro) = \frac{SQ(erro)}{N - k} = \frac{26,8}{9} = 2,98$$

$$F_{\text{Calculado}} = \frac{MQ(tratamento)}{MQ(erro)} = \frac{140,06}{2,98} = 47,03$$

$$\alpha = 5\% \Rightarrow F_{\text{Crítico}} = F_{5\%; 2; 9} = 4,26$$



## Anova: fator único

### RESUMO

| <i>Grupo</i> | <i>Contagem</i> | <i>Soma</i> | <i>Média</i> | <i>Variância</i> |
|--------------|-----------------|-------------|--------------|------------------|
| A            | 5               | 69          | 13,8         | 5,7              |
| B            | 4               | 16          | 4            | 0,666667         |
| C            | 3               | 12          | 4            | 1                |

### ANOVA

| <i>Fonte da variabilidade</i> | <i>SQ</i> | <i>gl</i> | <i>MQ</i> | <i>F</i> | <i>valor-P</i> | <i>F crítico</i> |
|-------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------------|------------------|
| Entre grupos                  | 280,1167  | 2         | 140,0583  | 47,03451 | 1,72E-05       | 4,256495         |
| Dentro dos grupos             | 26,8      | 9         | 2,977778  |          |                |                  |
| Total                         | 306,9167  | 11        |           |          |                |                  |



# Exercício – Machucando a cabeça em batidas de automóveis

Os dados sobre machucados na cabeça estão listados a seguir. Use um nível de significância de 5% para testar a hipótese nula de que as categorias dos diferentes pesos têm a mesma média. Os dados sugerem que carros mais pesados sejam mais seguros?



| Subcompacto | Compacto | Médio | Grande |
|-------------|----------|-------|--------|
| 681         | 643      | 469   | 384    |
| 428         | 655      | 727   | 656    |
| 917         | 442      | 525   | 602    |
| 898         | 514      | 454   | 687    |
| 420         | 525      | 259   | 360    |

| Subcompacto | Compacto | Médio | Grande |
|-------------|----------|-------|--------|
| 681         | 643      | 469   | 384    |
| 428         | 655      | 727   | 656    |
| 917         | 442      | 525   | 602    |
| 898         | 514      | 454   | 687    |
| 420         | 525      | 259   | 360    |

| N                        | 5        | 5       | 5        | 5        | 4       |
|--------------------------|----------|---------|----------|----------|---------|
| $\bar{X}_{\text{médio}}$ | 668,80   | 555,80  | 486,80   | 537,80   | 562,30  |
| s                        | 241,96   | 90,95   | 167,66   | 154,61   | 76,78   |
| $s^2$                    | 58542,70 | 8272,70 | 28110,20 | 23905,20 | 5895,00 |

## SOE

|                             |          |        |          |         |                 |
|-----------------------------|----------|--------|----------|---------|-----------------|
| $x_{mm} - x_{medio}$        | -106,50  | 6,50   | 75,50    | 24,50   |                 |
| $(x_{mm} - x_{medio})^2$    | 11342,25 | 42,25  | 5700,25  | 600,25  |                 |
| $N_i(x_{mm} - x_{medio})^2$ | 56711,25 | 211,25 | 28501,25 | 3001,25 | <b>88425,00</b> |

SOR

|                |          |         |          |         |                  |
|----------------|----------|---------|----------|---------|------------------|
| $(N_f - 1)s^2$ | 234170,8 | 33090,8 | 112440,8 | 95620,8 | <b>475323,20</b> |
|----------------|----------|---------|----------|---------|------------------|

## SOT

|                  |           |         |          |          |                  |
|------------------|-----------|---------|----------|----------|------------------|
| $(x - x_{mm})^2$ | 14089,69  | 6512,49 | 8704,89  | 31790,89 | <b>420496,64</b> |
|                  | 18036,49  | 8593,29 | 27126,09 | 8779,69  |                  |
|                  | 112694,49 | 2332,89 | 11728,89 | 15550,09 |                  |
|                  | 20249,29  | 1391,29 | 91990,89 | 40925,29 |                  |



| Fonte de variação            | Soma de quadrados | Graus de liberdade | Quadrado médio | F             | $F_{k-1;(\Sigma n)-k;\alpha}$ |
|------------------------------|-------------------|--------------------|----------------|---------------|-------------------------------|
| Entre amostras               | SQE = 88425       | 3                  | 29.475         | 0,992         | 3,239                         |
| Dentro das amostras Residual | SQR = 475323      | 16                 | 29.707,7       | Sig. = 42,16% |                               |
| Total                        | SQT = 420496      | 19                 |                |               |                               |



Anova: fator único

## RESUMO

| <i>Grupo</i> | <i>Contagem</i> | <i>Soma</i> | <i>Média</i> | <i>Variância</i> |
|--------------|-----------------|-------------|--------------|------------------|
| Subcompacto  | 5               | 3344        | 668,8        | 58542,7          |
| Compacto     | 5               | 2779        | 555,8        | 8272,7           |
| Médio        | 5               | 2434        | 486,8        | 28110,2          |
| Grande       | 5               | 2689        | 537,8        | 23905,2          |

## ANOVA

| <i>Fonte da variação</i> | <i>SQ</i> | <i>gl</i> | <i>MQ</i> | <i>F</i> | <i>valor-P</i> | <i>F crítico</i> |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------------|------------------|
| Entre grupos             | 88425     | 3         | 29475     | 0,992167 | 0,42157        | 3,238872         |
| Dentro dos grup          | 475323,2  | 16        | 29707,7   |          |                |                  |
| Total                    | 563748,2  | 19        |           |          |                |                  |



|             | N  | Mean   | Std. Deviation | Std. Error | 95% Confidence Interval for Mean |             | Minimum | Maximum |
|-------------|----|--------|----------------|------------|----------------------------------|-------------|---------|---------|
|             |    |        |                |            | Lower Bound                      | Upper Bound |         |         |
| Subcompacto | 5  | 668,80 | 241,95599      | 108,20601  | 368,3720                         | 969,2280    | 420,00  | 917,00  |
| Compacto    | 5  | 555,80 | 90,95438       | 40,67604   | 442,8652                         | 668,7348    | 442,00  | 655,00  |
| Médio       | 5  | 486,80 | 167,66097      | 74,98026   | 278,6214                         | 694,9786    | 259,00  | 727,00  |
| Grande      | 5  | 537,80 | 154,61307      | 69,14506   | 345,8225                         | 729,7775    | 360,00  | 687,00  |
| Total       | 20 | 562,30 | 172,25260      | 38,51685   | 481,6833                         | 642,9167    | 259,00  | 917,00  |

## Test of Homogeneity of Variances

| Levene Statistic | df1 | df2 | Sig. |
|------------------|-----|-----|------|
| 1,955            | 3   | 16  | ,162 |

## ANOVA

|                | Sum of Squares | df | Mean Square | F    | Sig. |
|----------------|----------------|----|-------------|------|------|
| Between Groups | 88.425,0       | 3  | 29.475,0    | ,992 | ,422 |
| Within Groups  | 475.323,2      | 16 | 29.707,7    |      |      |
| Total          | 563.748,2      | 19 |             |      |      |

## Robust Tests of Equality of Means

|                | Statistic <sup>a</sup> | df1 | df2    | Sig. |
|----------------|------------------------|-----|--------|------|
| Welch          | ,566                   | 3   | 8,381  | ,652 |
| Brown-Forsythe | ,992                   | 3   | 11,628 | ,430 |



# Exercício

- Verifique se as médias dos 4 grupos são distintas

| <u>A</u> | <u>B</u> | <u>C</u> | <u>D</u> |
|----------|----------|----------|----------|
| 23       | 21       | 32       | 23       |
| 23       | 17       | 19       | 21       |
| 21       | 22       | 29       | 26       |
| 22       | 27       | 26       | 21       |
| 24       | 27       | 22       |          |
| 23       | 21       |          |          |
| 22       |          |          |          |



# MS Excel

| <i>Grupo</i> | <i>Contagem</i> | <i>Soma</i> | <i>Média</i> | <i>Variância</i> |
|--------------|-----------------|-------------|--------------|------------------|
| A            | 7               | 158         | 22,57143     | 0,952381         |
| B            | 6               | 135         | 22,5         | 15,1             |
| C            | 5               | 128         | 25,6         | 27,3             |
| D            | 4               | 91          | 22,75        | 5,583333         |

| <i>Fonte da<br/>variação</i> | <i>SQ</i> | <i>gl</i> | <i>MQ</i> | <i>F</i> | <i>valor-P</i> | <i>F crítico</i> |
|------------------------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------------|------------------|
| Entre<br>grupos              | 35,19935  | 3         | 11,733    | 1,019    | 40,72%         | 3,160            |
| Dentro dos<br>grupos         | 207,1643  | 18        | 11,509    |          |                |                  |
| Total                        | 242,3636  | 21        |           |          |                |                  |



|       | N  | Mean    | Std.<br>Deviation | Std. Error | 95% Confidence<br>Interval for Mean |                | Minimum | Maximum |
|-------|----|---------|-------------------|------------|-------------------------------------|----------------|---------|---------|
|       |    |         |                   |            | Lower<br>Bound                      | Upper<br>Bound |         |         |
| A     | 7  | 22,5714 | ,97590            | ,36886     | 21,6689                             | 23,4740        | 21,00   | 24,00   |
| B     | 6  | 22,5000 | 3,88587           | 1,58640    | 18,4220                             | 26,5780        | 17,00   | 27,00   |
| C     | 5  | 25,6000 | 5,22494           | 2,33666    | 19,1124                             | 32,0876        | 19,00   | 32,00   |
| D     | 4  | 22,7500 | 2,36291           | 1,18145    | 18,9901                             | 26,5099        | 21,00   | 26,00   |
| Total | 22 | 23,2727 | 3,39722           | ,72429     | 21,7665                             | 24,7790        | 17,00   | 32,00   |

|                | Sum of<br>Squares | df | Mean<br>Square | F     | Sig. |
|----------------|-------------------|----|----------------|-------|------|
| Between Groups | 35,199            | 3  | 11,733         | 1,019 | ,407 |
| Within Groups  | 207,164           | 18 | 11,509         |       |      |
| Total          | 242,364           | 21 |                |       |      |



# Homogeneidade da Variância

| Levene Statistic | df1 | df2 | Sig. |
|------------------|-----|-----|------|
| 4,068            | 3   | 18  | ,023 |

|                | Statistic <sup>a</sup> | df1 | df2   | Sig. |
|----------------|------------------------|-----|-------|------|
| Welch          | ,464                   | 3   | 7,085 | ,716 |
| Brown-Forsythe | ,944                   | 3   | 9,768 | ,456 |



# ANOVA – Extensões

Prof. Dr. Renato de Oliveira  
Moraes



# Dados emparelhados – N amostras

| Funcionário | Método |    |
|-------------|--------|----|
|             | A      | B  |
| 1           | 41     | 41 |
| 2           | 42     | 42 |
| 3           | 41     | 35 |
| 4           | 42     | 42 |

*Comparação de duas  
média com dados  
emparelhados: teste t*

*p-value: 39,1%*

| Funcionário | Método |    |    |
|-------------|--------|----|----|
|             | A      | B  | C  |
| 1           | 41     | 41 | 42 |
| 2           | 42     | 42 | 43 |
| 3           | 41     | 35 | 42 |
| 4           | 42     | 42 | 44 |

*Comparação de três (ou mais)  
médias com dados  
emparelhados: ANOVA com  
dois fatores e sem repetição*



# ANOVA com dois fatores e sem repetição

| Funcionário | Método |    |    |
|-------------|--------|----|----|
|             | A      | B  | C  |
| 1           | 41     | 41 | 42 |
| 2           | 42     | 42 | 43 |
| 3           | 41     | 35 | 42 |
| 4           | 42     | 42 | 44 |

| Método | Funcionário |    |    |    |
|--------|-------------|----|----|----|
|        | 1           | 2  | 3  | 4  |
| A      | 41          | 42 | 41 | 42 |
| B      | 41          | 42 | 35 | 42 |
| C      | 42          | 43 | 42 | 44 |

| Fonte da variação | SQ    | gl | MQ   | F    | valor-P | F crítico |
|-------------------|-------|----|------|------|---------|-----------|
| Linhas            | 20,25 | 3  | 6,75 | 2,31 | 17,56%  | 4,757     |
| Colunas           | 15,17 | 2  | 7,58 | 2,60 | 15,37%  | 5,143     |
| Erro              | 17,50 | 6  | 2,92 |      |         |           |
| Total             | 52,92 | 11 |      |      |         |           |

*Premissa: não existe interações entre linhas e colunas*



$x_{ij}$  : observação da linha  $j$  da coluna (amostra)  $i$

$x_i$  : soma dos valores da coluna (amostra)  $i$

$x_j$  : soma dos valores da linha  $j$

$$SQC = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$$

$$SQL = \left( \sum_{j=1}^n \frac{(x_j)^2}{k} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$$

$$SQR = SQT - SQL - SQC$$



| Fonte de Variação | Soma de Quadrados                                                                                                    | Graus de Liberdade | Quadrado Médio                   | F <sub>Calculado</sub>      | F <sub>Crítico</sub>          |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------------|-------------------------------|
| Entre Linhas      | $SQL = \left( \sum_{j=1}^n \frac{(x_j)^2}{k} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$ | $n-1$              | $s_L^2 = \frac{SQL}{n-1}$        | $F_L = \frac{s_L^2}{s_R^2}$ | $F_{n-1; (n-1)(k-1); \alpha}$ |
| Entre Colunas     | $SQC = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{n} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$ | $k-1$              | $s_C^2 = \frac{SQC}{k-1}$        | $F_C = \frac{s_C^2}{s_R^2}$ | $F_{k-1; (n-1)(k-1); \alpha}$ |
| Residual          | $SQR = SQT - SQL - SQC$                                                                                              | $(n-1)(k-1)$       | $s_R^2 = \frac{SQR}{(n-1)(k-1)}$ |                             |                               |
| Total             | $SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)^2}{nk}$          | $nk-1$             |                                  |                             |                               |

Onde:

$x_i$  é a soma de todos os elementos da coluna (amostra)  $i$

$x_j$  é a soma de todos os elementos da linha  $j$

$x_{ij}$  é o elemento da coluna (amostra)  $i$  e linha  $j$



# ANOVA com dois fatores e com repetição

| Funcionário | Método |    |    |
|-------------|--------|----|----|
|             | A      | B  | C  |
| 1           | 40     | 41 | 41 |
|             | 42     | 42 | 44 |
|             | 41     | 40 | 41 |
| 2           | 42     | 42 | 44 |
|             | 43     | 41 | 43 |
|             | 41     | 43 | 42 |
| 3           | 42     | 38 | 42 |
|             | 41     | 33 | 43 |
|             | 40     | 34 | 41 |
| 4           | 41     | 42 | 44 |
|             | 41     | 39 | 42 |
|             | 44     | 45 | 46 |

| Fonte da variação | SQ     | gl | MQ    | F     | valor-P | F <sub>Crítico</sub> |
|-------------------|--------|----|-------|-------|---------|----------------------|
| Amostra           | 60,75  | 3  | 20,25 | 7,364 | 0,12%   | 3,009                |
| Colunas           | 45,5   | 2  | 22,75 | 8,273 | 0,19%   | 3,403                |
| Interações        | 52,5   | 6  | 8,75  | 3,182 | 1,93%   | 2,508                |
| Dentro            | 66     | 24 | 2,75  |       |         |                      |
| Total             | 224,75 | 35 |       |       |         |                      |



$$k = 3$$

$$n = 4$$

$$r = 3 \text{ (repetições)}$$

$x_{ijr}$  : observação r da linha j da coluna (amostra)i

$x_i$  : soma dos valores da coluna (amostra)i

$x_j$  : soma dos valores da linha j

$x_{ij}$  : soma das r observações da linha j da coluna (amostra)i

$$SQC = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{nr} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$$

$$SQL = \left( \sum_{j=1}^n \frac{(x_j)^2}{kr} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$$



$$SQTr = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{(x_{ij})^2}{r} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$$

$$SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ijr})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$$

$$SQR = SQT - SQTr$$

$$SQI = SQTr - SQL - SQC$$



| Fonte de Variação | Soma de Quadrados                                                                                                        | Graus de Liberdade | Quadrado Médio                   | F <sub>Calculado</sub>      | F <sub>Crítico</sub>            |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| Entre Linhas      | $SQL = \left( \sum_{j=1}^n \frac{(x_j)^2}{kr} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$  | $n-1$              | $s_L^2 = \frac{SQL}{n-1}$        | $F_L = \frac{s_L^2}{s_R^2}$ | $F_{n-1;nk(r-1);\alpha}$        |
| Entre Colunas     | $SQC = \left( \sum_{i=1}^k \frac{(x_i)^2}{nr} \right) - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$  | $k-1$              | $s_C^2 = \frac{SQC}{k-1}$        | $F_C = \frac{s_C^2}{s_R^2}$ | $F_{k-1;nk(r-1);\alpha}$        |
| Interação         | $SQI = SQTr - SQL - SQC$                                                                                                 | $(n-1)(k-1)$       | $s_I^2 = \frac{SQI}{(n-1)(k-1)}$ | $F_I = \frac{s_I^2}{s_R^2}$ | $F_{(n-1)(k-1);nk(r-1);\alpha}$ |
| Residual          | $SQR = SQT - SQTr$                                                                                                       | $nk(r-1)$          | $s_R^2 = \frac{SQR}{nk(r-1)}$    |                             |                                 |
| Entre Tratamentos | $SQTr = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \frac{(x_{ij})^2}{r} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$ | $nk-1$             | $s_{Tr}^2 = \frac{SQTr}{nk-1}$   |                             |                                 |
| Total             | $SQT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ijr})^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n x_{ijr} \right)^2}{nkr}$           | $nk-1$             |                                  |                             |                                 |