



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PMI - DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MINAS E PETRÓLEO

PEA - DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ENERGIA E AUTOMAÇÃO ELÉTRICAS

Eduardo Poleze, Deinar Mercaldi Rafani, Marcos Yukio Yamaguchi

Prof. Dr. Carlos Frederico Meschini, Prof. Dr. Cícero Couto de Moraes

LABORATÓRIO DE ELETROTÉCNICA GERAL

EXPERIMENTO: CIRCUITOS TRIFÁSICOS

Aluno

Nº. USP

1. INTRODUÇÃO

1.1. Circuitos trifásicos simétricos e equilibrados

Um **sistema trifásico simétrico** é definido por três sinais senoidais de tensão de mesma amplitude, mas defasados de 120° entre si. Esses sinais podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\begin{cases} e_A(t) = E_{max} \cos(\omega t) \\ e_B(t) = E_{max} \cos(\omega t - 120^\circ) \\ e_C(t) = E_{max} \cos(\omega t + 120^\circ) \end{cases}$$

Na representação fasorial, tem-se

$$E = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} \dot{E}_A = E \angle 0^\circ \\ \dot{E}_B = E \angle -120^\circ \\ \dot{E}_C = E \angle 120^\circ \end{cases}$$

Define-se ainda o operador auxiliar α , cuja função é aplicar um deslocamento de fase de 120° , como sendo:

$$\alpha = 1 \angle 120^\circ$$

O operador α possui a seguinte propriedade:

$$1 + \alpha^2 + \alpha = 0$$

Deste modo, a fonte trifásica pode ser representada em função de α :

$$\begin{cases} \dot{E}_A = E \cdot 1 \\ \dot{E}_B = E \cdot \alpha^2 \\ \dot{E}_C = E \cdot \alpha \end{cases}$$

Uma **carga é dita equilibrada** quando é constituída de **três elementos de mesma impedância** ligados em estrela (Y) ou triângulo (Δ). Para **sistemas trifásicos simétricos equilibrados** cada uma das malhas pode ser analisada isoladamente, como se fossem três circuitos monofásicos independentes. Essa característica simplifica muito a resolução do circuito, uma vez que, ao encontrar as tensões e correntes referentes a uma das malhas, as demais estarão defasadas de $+120^\circ$ ou -120° .

As ligações entre a fonte trifásica (Y ou Δ) e a carga equilibrada (Y ou Δ) podem ser feitas de 4 maneiras: Y-Y, Δ - Δ , Y- Δ e Δ -Y. Será apresentado, como exemplo, o equacionamento para sistemas trifásicos simétricos e equilibrados nas configurações Y-Y e Δ - Δ :

- **Ligação Y-Y**

Assumindo o sistema trifásico simétrico e equilibrado, representado na figura a seguir, serão determinadas as correntes e tensões de fase e de linha.

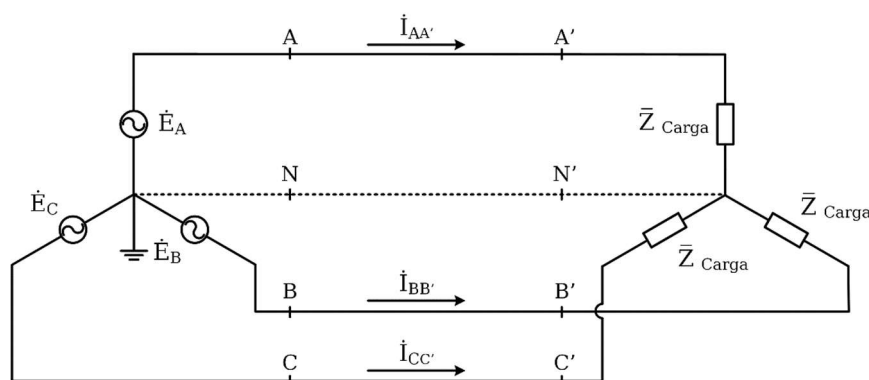


Figura 1 – Ligação Y-Y.

Tensão de fase: medida na fonte ou na carga (elemento monofásico). No caso da ligação em estrela, é a tensão entre o terminal da fonte ou da carga e o centro-estrela, ou seja, $(\dot{V}_{AN}, \dot{V}_{BN}, \dot{V}_{CN})$ e $(\dot{V}_{A'N'}, \dot{V}_{B'N'}, \dot{V}_{C'N'})$

Tensão de linha: medida entre dois terminais da fonte ou da carga. $(\dot{V}_{AB}, \dot{V}_{BC}, \dot{V}_{CA})$ e $(\dot{V}_{A'B'}, \dot{V}_{B'C'}, \dot{V}_{C'A'})$

Corrente de fase: corrente que percorre cada fonte ou cada carga (elemento monofásico). $(\dot{I}_{AN}, \dot{I}_{BN}, \dot{I}_{CN})$ e $(\dot{I}_{A'N'}, \dot{I}_{B'N'}, \dot{I}_{C'N'})$

Corrente de linha: corrente que percorre os condutores que alimentam a carga $(\dot{I}_{AA'}, \dot{I}_{BB'}, \dot{I}_{CC'})$

Para a ligação Y-Y, as **correntes de linha são iguais às correntes de fase** e são dadas por:

$$\begin{cases} i_{AA'} = i_A = \frac{\dot{E}_A}{\bar{Z}_{carga}} = \frac{E \angle 0^\circ}{Z \angle \phi} = \frac{E}{Z} \angle -\phi \\ i_{BB'} = i_B = \frac{\dot{E}_B}{\bar{Z}_{carga}} = \frac{E \angle -120^\circ}{Z \angle \phi} = \frac{E}{Z} \angle -\phi - 120^\circ \\ i_{CC'} = i_C = \frac{\dot{E}_C}{\bar{Z}_{carga}} = \frac{E \angle 120^\circ}{Z \angle \phi} = \frac{E}{Z} \angle -\phi + 120^\circ \end{cases}$$

É possível escrever as correntes em função do parâmetro α :

$$\begin{cases} i_{AA'} = i_A = \frac{E}{Z} \angle -\phi \\ i_{BB'} = i_B = \alpha^2 i_A \\ i_{CC'} = i_C = \alpha i_A \end{cases}$$

Caso haja conexão entre o centro-estrela da fonte e o da carga, a corrente $i_{NN'}$ é dada por:

$$i_{NN'} = i_A + i_B + i_C$$

Para sistemas trifásicos simétricos e equilibrados:

$$i_{NN'} = (1 + \alpha^2 + \alpha) \frac{E}{Z} \angle -\phi = 0$$

As tensões de fase podem ser escritas conforme abaixo :

$$\begin{cases} \dot{V}_{AN} = \dot{V}_{A'N'} = \dot{E}_A \\ \dot{V}_{BN} = \dot{V}_{B'N'} = \alpha^2 \dot{E}_A \\ \dot{V}_{CN} = \dot{V}_{C'N'} = \alpha \dot{E}_A \end{cases}$$

As tensões de linha, por sua vez, são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{A'B'} = \dot{V}_{AN} - \dot{V}_{BN} = \dot{E}_A(1 - \alpha^2) = \dot{E}_A\sqrt{3}\angle 30^\circ \\ \dot{V}_{BC} = \dot{V}_{B'C'} = \dot{V}_{BN} - \dot{V}_{CN} = \dot{E}_A(\alpha^2 - \alpha) = \alpha^2\dot{E}_A\sqrt{3}\angle 30^\circ \\ \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{C'A'} = \dot{V}_{CN} - \dot{V}_{AN} = \dot{E}_A(\alpha - 1) = \alpha\dot{E}_A\sqrt{3}\angle 30^\circ \end{cases}$$

O resultado acima pode ser obtido analiticamente ou graficamente, por meio de um diagrama fasorial para as tensões:

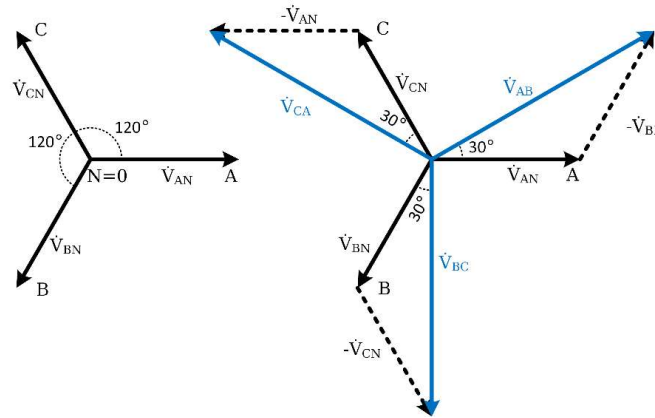


Figura 2 – Diagrama fasorial relacionando as tensões de linha e de fase (Y-Y).

- **Ligação \$\Delta\$-\$\Delta\$:**

Assumindo o sistema trifásico simétrico e equilibrado representado na figura a seguir, serão determinadas as correntes e tensões de fase e de linha.

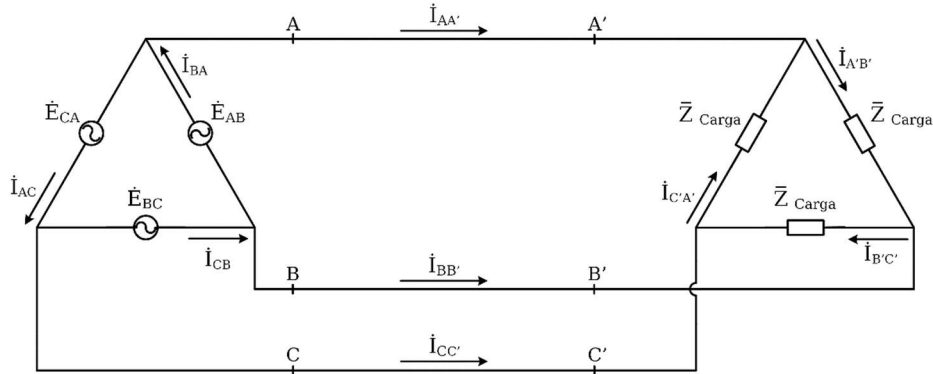


Figura 3 – Ligação \$\Delta\$-\$\Delta\$.

Ao contrário da ligação Y-Y, no caso da ligação \$\Delta\$-\$\Delta\$, as tensões de fase e de linha são iguais:

$$\begin{cases} \dot{E}_{AB} = \dot{V}_{AB} = \dot{V}_{A'B'} = \bar{Z}_{carga} \cdot \dot{I}_{A'B'} = \dot{V}_{A'B'} \\ \dot{E}_{BC} = \dot{V}_{BC} = \dot{V}_{B'C'} = \bar{Z}_{carga} \cdot \dot{I}_{B'C'} = \alpha^2 \dot{V}_{A'B'} \\ \dot{E}_{CA} = \dot{V}_{CA} = \dot{V}_{C'A'} = \bar{Z}_{carga} \cdot \dot{I}_{C'A'} = \alpha \dot{V}_{A'B'} \end{cases}$$

As correntes de linha são escritas em função das correntes de fase:

$$\begin{cases} \dot{I}_{A'B'} = \frac{\dot{V}_{A'B'}}{\bar{Z}_{carga}} \\ \dot{I}_{B'C'} = \frac{\dot{V}_{B'C'}}{\bar{Z}_{carga}} = \alpha^2 \dot{I}_{A'B'} \\ \dot{I}_{C'A'} = \frac{\dot{V}_{C'A'}}{\bar{Z}_{carga}} = \alpha \dot{I}_{A'B'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{I}_{AA'} = \dot{I}_{BA} - \dot{I}_{AC} = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'} = \dot{I}_{A'B'}(1 - \alpha) = \dot{I}_{A'B'} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_{BB'} = \dot{I}_{CB} - \dot{I}_{BA} = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'} = \dot{I}_{A'B'}(\alpha^2 - 1) = \alpha^2 \dot{I}_{A'B'} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ \\ \dot{I}_{CC'} = \dot{I}_{AC} - \dot{I}_{CB} = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'} = \dot{I}_{A'B'}(\alpha - \alpha^2) = \alpha \dot{I}_{A'B'} \cdot \sqrt{3} \angle -30^\circ \end{cases}$$

O diagrama fasorial que relaciona correntes de linha e de fase está representado na figura a seguir:

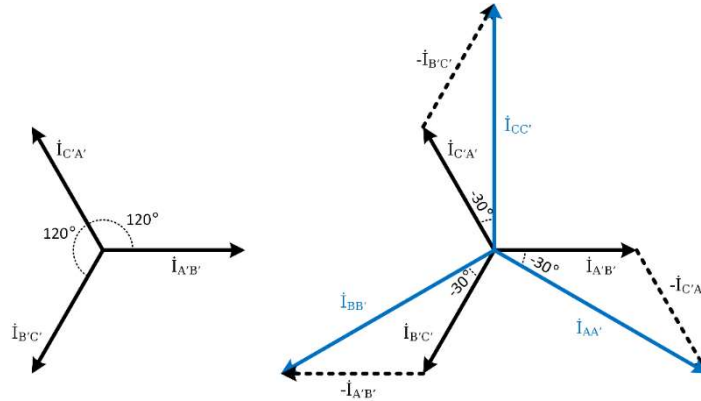


Figura 4 - Diagrama fasorial relacionando as correntes de linha e de fase (Δ-Δ).

1.2. Potência em circuitos trifásicos

A potência instantânea **por fase** é dada pelo produto entre a **tensão de fase** e a **corrente de fase** instantânea.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t),$$

sendo:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V_{fase} \cos(\omega t) = V_{max, fase} \cos(\omega t)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I_{fase} \cos(\omega t - \phi) = I_{max, fase} \cos(\omega t - \phi)$$

Logo:

$$p(t) = 2 \cdot V_{fase} I_{fase} \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \phi)$$

Assim, a potência média **por fase** é dada por:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T 2 \cdot V_{fase} I_{fase} \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t - \phi) dt$$

$$P = \frac{2 \cdot V_{fase} I_{fase}}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [\cos(2\omega t) + \cos(\phi)] dt$$

$$P = V_{fase} I_{fase} \cos(\phi), \quad [W].$$

Logo, a **potência total de um sistema trifásico simétrico equilibrado, constante no tempo**, é dada pela soma das potências por fase:

$$P_T = 3 \cdot V_{fase} I_{fase} \cos(\phi),$$

sendo ϕ a defasagem entre tensão de fase e corrente de fase e $\cos(\phi)$ o fator de potência do sistema trifásico simétrico equilibrado.

Neste caso, as potências ativa, reativa e aparente são dadas por:

$$\begin{cases} P_T = 3 \cdot V_{fase} I_{fase} \cos(\phi) \\ Q_T = 3 \cdot V_{fase} I_{fase} \sin(\phi) \\ S_T = 3 \cdot V_{fase} I_{fase} \leftrightarrow \bar{S}_T = P_T + jQ_T \end{cases}$$

É importante lembrar que a potência reativa apresenta sinal, sendo positiva para cargas indutivas e negativa para cargas capacitivas.

É possível escrever a potência em termos das **tensões e correntes de linha**.

Para ligação em estrela tem-se:

$$V_{linha} = \sqrt{3} \cdot V_{fase} \quad I_{linha} = I_{fase} \rightarrow P_T = \sqrt{3} \cdot V_{linha} I_{linh} \cos(\phi)$$

Para a ligação em triângulo, tem-se:

$$V_{linha} = V_{fase} \quad I_{linha} = \sqrt{3} \cdot I_{fase} \rightarrow P_T = \sqrt{3} \cdot V_{linha} I_{linha} \cos(\phi)$$

2. OBJETIVOS

Essa atividade experimental tem como objetivo apresentar:

- 1) Os conceitos fundamentais de circuitos trifásicos;
- 2) As principais diferenças entre as ligações em estrela e triângulo;
- 3) Os conceitos de potência ativa, potência reativa e potência aparente para sistemas trifásicos.

Após conclusão deste relatório, o aluno deverá ser capaz de:

- 1) Determinar as tensões de fase e de linha de sistemas trifásicos simétricos e equilibrados;
- 2) Determinar as correntes de fase e de linha de sistemas trifásicos simétricos e equilibrados;
- 3) Usar diagramas fasoriais para compreender e resolver circuitos de corrente alternada de maneira gráfica;
- 4) Determinar as potências ativa, reativa e aparente de sistemas trifásicos.

3. MATERIAIS

Os equipamentos usados nesta atividade experimental estão listados a seguir:

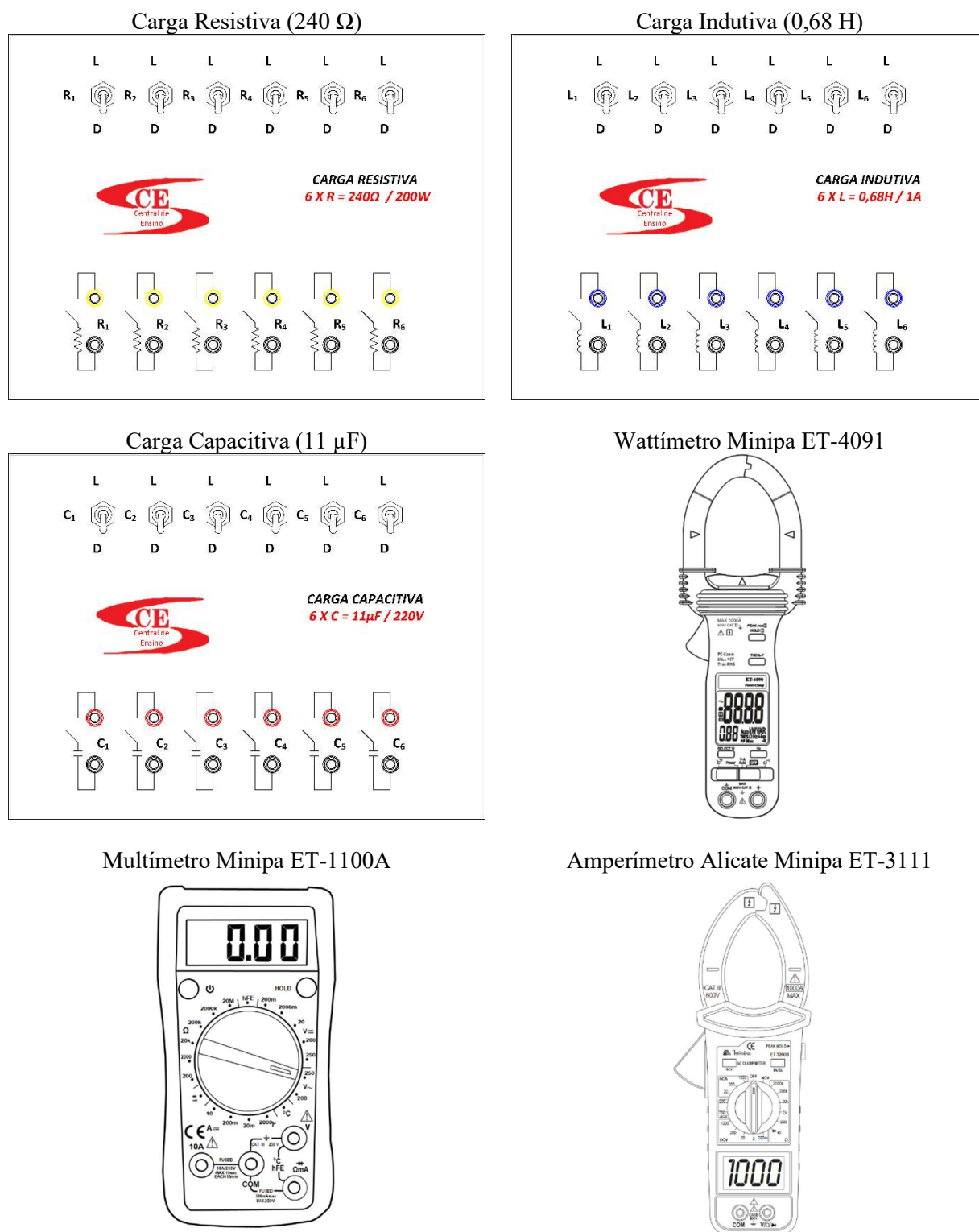


Figura 5 - Equipamentos utilizados na atividade experimental.

4. ROTEIRO DE LABORATÓRIO

4.1.Determinação da impedância dos equipamentos fornecidos

Meça a resistência de todos os 6 bipolos da caixa de resistências e, em seguida, calcule o valor médio, o qual será usado na execução de todos os cálculos nesta experiência. Lance todos os resultados obtidos na Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 – Medições na caixa de resistências.

Resistor	Resistência [Ω]
R ₁	
R ₂	
R ₃	
R ₄	
R ₅	
R ₆	
Valor médio: $\bar{R} = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 R_i$	

Determine a impedância complexa de cada uma das 6 bobinas, utilizando a tensão de alimentação da rede. Da mesma forma, calcule a média dos 6 valores. Lance todos os resultados na Tabela 2 a seguir

Tabela 2 – Medições na caixa de indutâncias.

Bobina	V [V]	I [A]	P [W]	$R_b = \frac{P}{I^2}$ [Ω]	$Z_b = \frac{V}{I}$ [Ω]	$X_b = \sqrt{Z^2 - R^2}$ [Ω]
L ₁						
L ₂						
L ₃						
L ₄						
L ₅						
L ₆						
			Valor médio	$\bar{R}_b =$		$\bar{X}_b =$

4.2.Ligação em estrela (Y) – carga resistiva

Para o circuito representado na Figura 6, meça as correntes e tensões de linha e de fase. Complete a Tabela 3 com os valores obtidos.

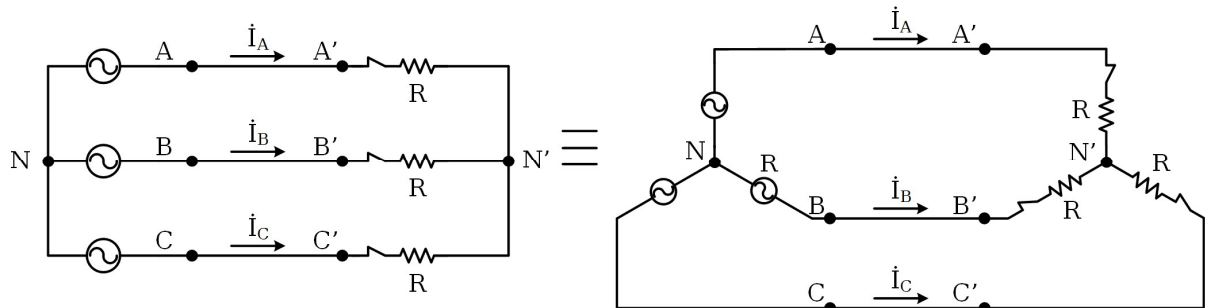


Figura 6 – Carga resistiva ligada em estrela (Y).

Tabela 3 – Valores medidos das tensões e correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
$I_A [A]$	
$I_B [A]$	
$I_C [A]$	
$V_{A'N'} [V]$	
$V_{B'N'} [V]$	
$V_{C'N'} [V]$	
$V_{A'B'} [V]$	
$V_{B'C'} [V]$	
$V_{C'A'} [V]$	

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 4. Para realizar as medições por fase na ligação Y, os terminais do wattímetro deverão ser colocados entre os pontos A', B' ou C' e o neutro N', representados na Figura 6, enquanto o alicate deverá envolver o condutor correspondente à fase a ser analisada.

A Figura 7 apresenta um exemplo de como realizar a medição na fase A':

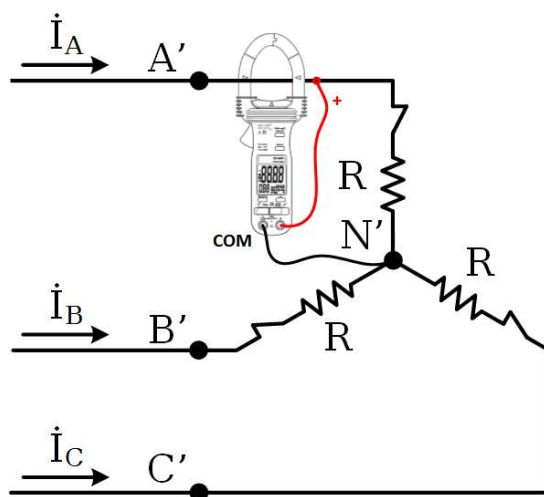


Figura 7 – Exemplo de medição de potência na fase A' para uma carga Y.

A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 4 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'			
B'			
C'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

4.3.Ligação em triângulo (Δ) – carga resistiva

Para o circuito representado na Figura 8, meça as correntes e tensões de linha e de fase. Complete a Tabela 5 com os valores obtidos.

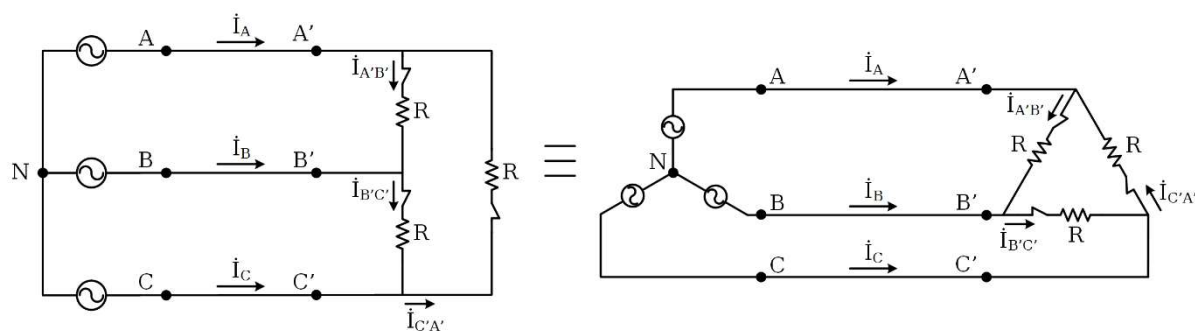


Figura 8 – Carga resistiva ligada em triângulo (Δ).

Tabela 5 – Valores medidos das tensões e correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
I_A [A]	
I_B [A]	
I_C [A]	
$I_{A'B'}$ [A]	
$I_{B'C'}$ [A]	
$I_{C'A'}$ [A]	
$V_{A'B'}$ [V]	
$V_{B'C'}$ [V]	
$V_{C'A'}$ [V]	

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 6. Para realizar as medições por fase na ligação Δ , os terminais do wattímetro deverão ser colocados entre os pontos A' e B', B' e C' ou entre C' e A', representados na Figura 8, enquanto o alicate deverá envolver o condutor correspondente à fase a ser analisada.

A Figura 9 apresenta um exemplo de como realizar a medição na fase A'B':

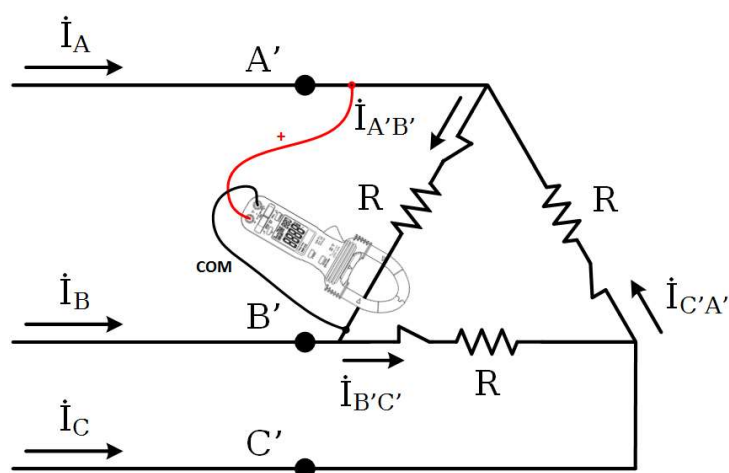


Figura 9 - Exemplo de medição de potência na fase A'B' para uma carga Δ .

A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 6 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'B'			
B'C'			
C'A'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

4.4. Ligação em estrela (Y) – carga indutiva

Para o circuito representado na Figura 10, meça as correntes linha e complete a Tabela 7 com os valores obtidos.

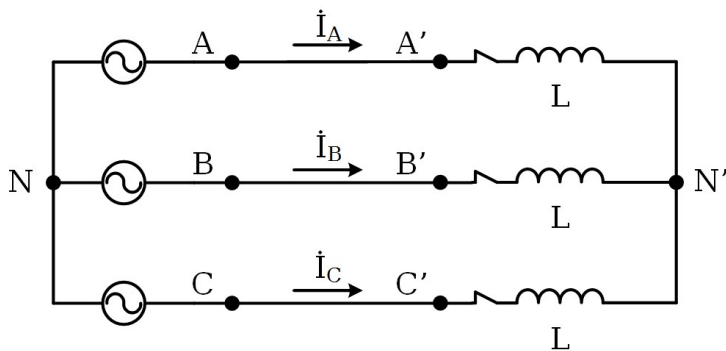


Tabela 7 – Valores medidos das correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
I_A [A]	
I_B [A]	
I_C [A]	

Figura 10 - Carga indutiva ligada em estrela (Y).

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 8. A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 8 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'			
B'			
C'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

4.5. Ligação em estrela (Y) – carga capacitiva

Para o circuito representado na Figura 11, meça as correntes linha e complete a Tabela 9 com os valores obtidos.

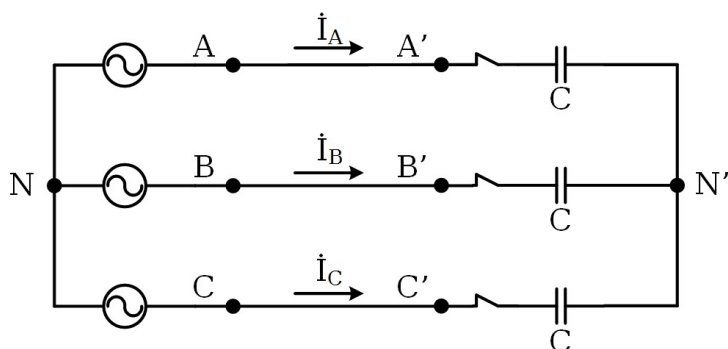


Tabela 9 – Valores medidos das correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
I_A [A]	
I_B [A]	
I_C [A]	

Figura 11 - Carga capacitiva ligada em estrela (Y).

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 10. A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 10 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'			
B'			
C'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

4.6. Ligação em estrela (Y) – carga RL

Para o circuito representado na Figura 12, meça as correntes linha e complete a Tabela 11 com os valores obtidos.

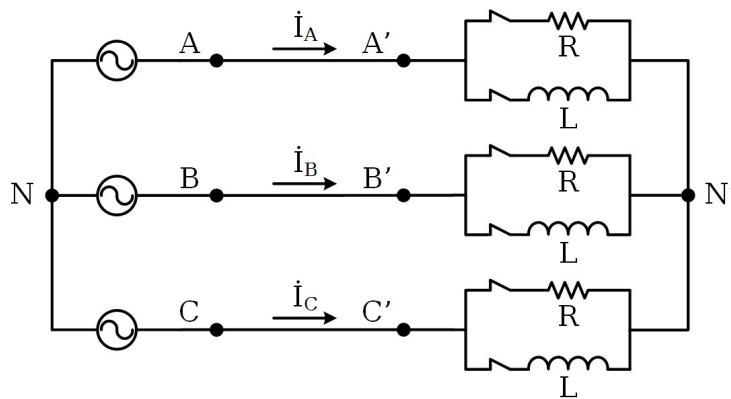


Tabela 11 – Valores medidos das correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
I_A [A]	
I_B [A]	
I_C [A]	

Figura 12 – Carga RL ligada em estrela (Y).

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 12. A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 12 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'			
B'			
C'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

4.7.Ligação em estrela (Y) – carga RLC

Para o circuito representado na Figura 13, meça as correntes linha e complete a Tabela 13 com os valores obtidos.

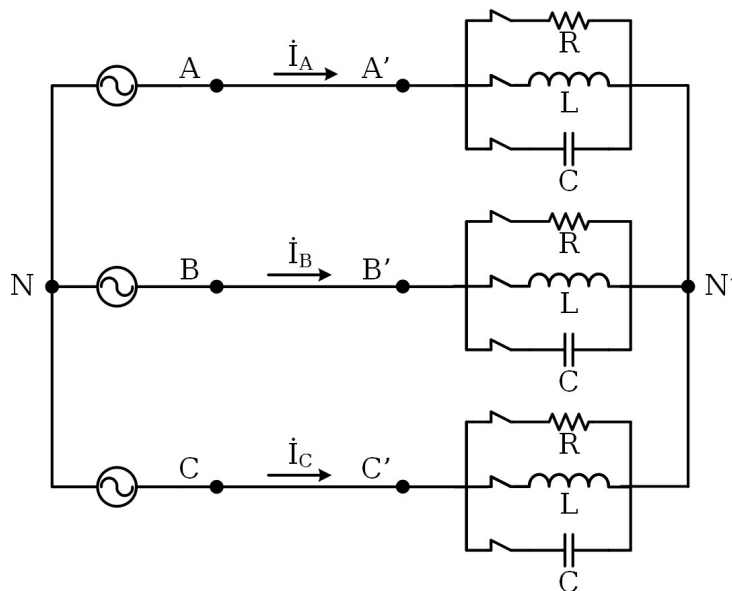


Tabela 13 – Valores medidos das correntes do circuito.

Grandeza	Valor Medido
I_A [A]	
I_B [A]	
I_C [A]	

Figura 13 – Carga RLC ligada em estrela (Y).

Caso esteja com dúvidas a respeito da montagem acima, você pode seguir o diagrama da Figura 14 como referência:

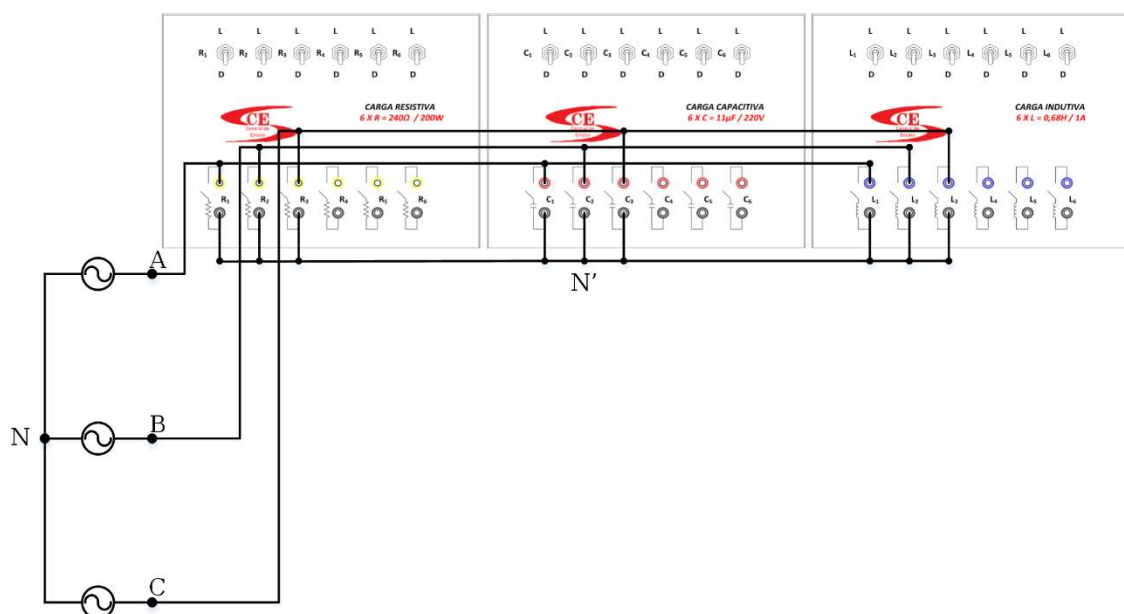


Figura 14 – Diagrama de montagem do circuito com carga RLC ligada em estrela.

Meça as potências ativa, reativa e aparente para cada uma das fases e anote os valores encontrados na Tabela 14. A potência total do sistema trifásico será a soma das potências por fase. Por fim, calcule o fator de potência da carga.

Tabela 14 – Valores medidos da potência do circuito.

Fase	Potência Ativa – P [W]	Potência Reativa – Q [VAr]	Potência Aparente – S [VA]
A'			
B'			
C'			
Trifásico			

Fator de Potência: _____

5. RELATÓRIO

No relatório deverá constar o roteiro da atividade experimental preenchido com todos os resultados coletados e as respostas dos itens solicitados a seguir. Busque sempre deixar claro o raciocínio adotado e estabelecer um paralelo entre a teoria vista em sala de aula e os resultados obtidos no laboratório. Mostre os circuitos usados para os cálculos e apresente, por meio de tabelas comparativas, os valores teóricos e os obtidos experimentalmente.

Utilize para os cálculos solicitados os valores descritos a seguir:

- R: Valor médio das resistências, registrado na Tabela 1;
- X_L : Valor médio das reatâncias das bobinas, registrado na Tabela 2.
- R_L : Valor médio da resistência das bobinas, registrado na Tabela 2.
- X_C : Calculado a partir do valor nominal das capacitâncias (11 μ F);
- O fasor de tensão da fase A é dado por: $\vec{V}_A = 127\angle 0^\circ V$

Parte 1 - Para os circuitos da seção 4.2 - Carga resistiva ligada em estrela (Y) e da seção 4.3 - Carga resistiva ligada em triângulo (Δ):

- Calcule os valores das tensões e correntes de linha e de fase e compare com os valores obtidos na atividade experimental. Justifique eventuais discrepâncias. Faça o diagrama fasorial para as tensões e correntes de fase e de linha.
- Calcule os valores de potência ativa, reativa e aparente e do fator de potência e compare com os valores obtidos na atividade experimental. Em qual das configurações a potência ativa é maior?

Parte 2 - Para os circuitos da seção 4.4 - Carga indutiva ligada em estrela (Y) e da seção 4.5 - Carga capacitiva ligada em estrela (Y):

- Calcule os valores das tensões e correntes de linha e de fase. Compare os valores das correntes de linha obtidos na atividade experimental com os valores calculados. Justifique eventuais discrepâncias. Considere que cada elemento da carga indutiva é uma impedância da forma $R_L + j X_L$.
- Faça um diagrama fasorial para as tensões e correntes de linha e de fase para os dois circuitos e comente as diferenças encontradas.

Parte 3 - Considere os circuitos da seção 4.2 - Carga resistiva ligada em estrela (Y), da seção 4.5 - Carga RL ligada em estrela (Y) e da seção 4.6 - Carga RLC ligada em estrela (Y):

- a) Calcule os valores das tensões e correntes de linha e de fase para o circuito da seção 4.6 - Carga RLC ligada em estrela (Y). Compare os valores das correntes de linha obtidos na atividade experimental com os valores calculados. Justifique eventuais discrepâncias. Considere que cada elemento da carga indutiva é uma impedância da forma $R_L + j X_L$;
- b) Compare e comente as diferenças encontradas nos valores de corrente de linha em cada uma das três configurações. Além disso, compare e comente as diferenças encontradas nos valores das potências ativa, reativa e aparente e no valor do fator de potência em cada uma das configurações.