Universidade de São Paulo

Lista 1– Agosto de 2018

Programação Matemática Aplicada a Controle

PTC3420

Resposta do Exercício 1 x_{ij} $\rightarrow$ quantidade do produto j produzido pela máquina i onde,

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{i1} = 4000, \quad \sum_{i=1}^{4} x_{i2} = 5000, \quad \sum_{i=1}^{4} x_{i3} = 3000,$$

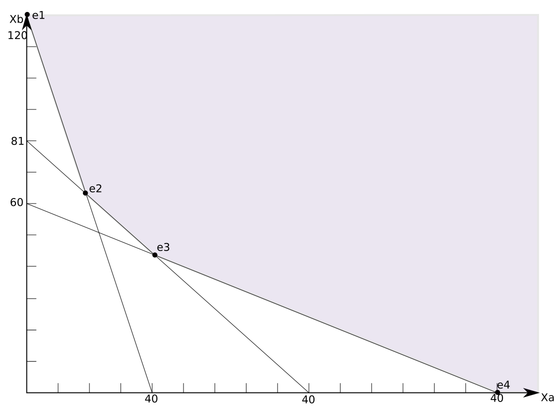
$$\begin{cases} 0.3x_{11} + 0.2x_{12} + 0.8x_{13} \leq 1500 \\ 0.25x_{21} + 0.3x_{22} + 0.6x_{23} \leq 120 \\ 0.2x_{31} + 0.2x_{32} + 0.6x_{33} \leq 1500 \\ 0.2x_{41} + 0.25x_{42} + 0.5x_{43} \leq 2000 \\ \min 4x_{11} + 6x_{12} + 12x_{13} + \dots \\ 4x_{21} + 7x_{22} + 10x_{23} + \dots \\ 5x_{31} + 5x_{32} + 8x_{33} + \dots \\ 7x_{41} + 6x_{42} + 11x_{43} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Resposta do Exercício 2 Simplificando,

$$\min 100x_A + 150x_b$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{6}x_b \geq 20 \\ \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b \geq 27 \\ \frac{1}{5}x_a + \frac{1}{2}x_b \geq 30 \\ x_a \geq 0, x_b \geq 0 \end{cases}$$

Colocando essas restrições em forma de gráfico temos,



Onde,

$$e_1 \to x_a = 0, x_b = 120, z = 18000$$

$$e_2 \to \begin{cases} \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{6}x_b = 20 \\ \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b = 27 \end{cases} \quad x_a = 18.5714, x_b = 64.2857, z = 11500$$

$$e_3 \to \begin{cases} \frac{3}{10}x_a + \frac{1}{3}x_b = 27 \\ \frac{1}{5}x_a + \frac{1}{2}x_b = 30 \end{cases} \quad x_a = 42, x_b = 43.20, z = 10680$$

$$e_4 \to x_a = 150, x_b = 0, z = 15000$$

Pontos extremos e direções extremas:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 18.5714 \\ 64.2857 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 42 \\ 43.2 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplos do Teorema da Representação: Note que $\binom{30}{60}$ é factivel pois

$$\frac{30}{2} + \frac{60}{6} = 25 > 20$$
$$\frac{3}{10}30 + \frac{60}{3} = 29 > 27$$
$$\frac{1}{5}30 + \frac{1}{2}60 = 36 > 30$$

e escrevendo em função de e_1, e_2, e_3 temos que

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 18.5714 & 42 \\ 120 & 64.2854 & 43.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = 0.1538, \lambda_2 = 0.2364, \lambda_3 = 0.6098.$$

Temos que $\binom{100}{100}$ também é factível e uma possível representação em função dos pontos extremos e direção extrema seria:

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \end{pmatrix} + (1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \lambda_1 = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

$$100 = \frac{1}{6} \times (3 \times 5 \times 10) + u = 25 + u \to u = 75$$

Resposta do Exercício 3 $x_i \to$ espaço reservado para o produto P_i Restrições:

$$x_2 \leq x_1$$
$$x_1 \leq x_2 + x_3 + 3000$$
$$x_2 + x_3 \geq 5000$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000$$

Na forma de programação linear

$$max\ 1000x_1 + 8000x_2 + 5000x_3$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 3000 \\ x_2 + x_3 \geq 5000 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 20000 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

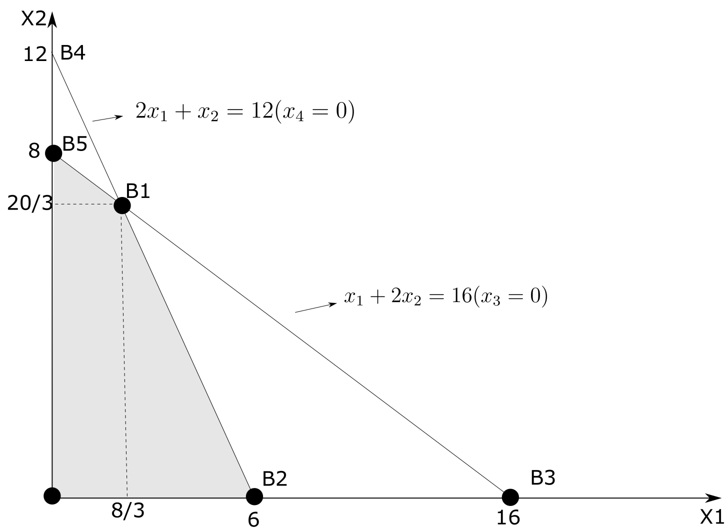
Resposta do Exercício 4

$$\max 2x_1 + 5x_2$$
$$s.a. \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Com as variáveis de folga a matriz A, e o vetor b são:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Letra a)



Letra b)
Letra c)

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{8}{3} \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = 0 \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0 \begin{cases} x_1 = 16 \\ x_4 = -4 \end{cases} \quad \text{não factível}$$

$$B_4 = \begin{array}{cc} x_2 & x_3 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_2 = 12 \\ x_3 = -8 \end{cases} \quad \text{não factível}$$

$$B_5 = \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_2 = 8 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$B_6 = \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{cases} x_3 = 16 \\ x_4 = 12 \end{cases}$$

Letra d) Os pontos extremos são:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}.$$

Letra e) O ponto $\binom{1}{1}$ é factível: Sim, pois

$$1 + 2 = 3 \leq 16$$
$$2 + 1 = 3 \leq 12$$

e ainda

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{20}{3} \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \forall\ \lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \frac{1}{8}, \lambda_1 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$$

obtemos uma representação possível. Outra possibilidade:

$$\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_4 = \frac{3}{20}$$

$$1 = 6\lambda_2 + \frac{3}{20} \times \frac{8}{3} \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{10}$$
$$\boxed{\lambda_1 = 1 - \frac{1}{10} - \frac{3}{20} = 1 - \frac{5}{20} = \frac{3}{4}}$$

Letra f)

$$\begin{aligned} c'x &= 2 \times \frac{8}{3} + 5 \times \frac{20}{3} = 38.7 \\ c'x &= 2 \times 6 + 5 \times 0 = 12 \\ c'x &= 2 \times 0 + 5 \times 8 = 40 \quad \text{ótimo} \end{aligned}$$

Letra g)

$$\max 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

$$\text{Sujeito a} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	5	3	0	1	0
1	2	1	1	0	16
2	1	1	0	1	12

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	-40
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	8
$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	4

Tableau 3

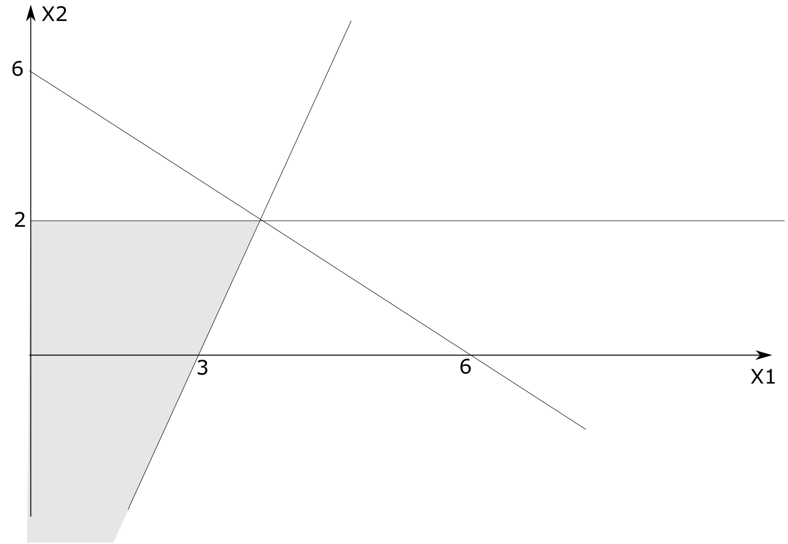
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-\frac{17}{10}$	0	0	-2	-1	-44
-1	1	0	1	-1	4
3	0	1	-1	2	8

$$\text{Solução Ótima:} \begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = 4 \\ x_3^* = 8 \end{cases}, \qquad z^* = 5 \times 4 + 3 \times 8 = 44$$

Resposta do Exercício 5 Como

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

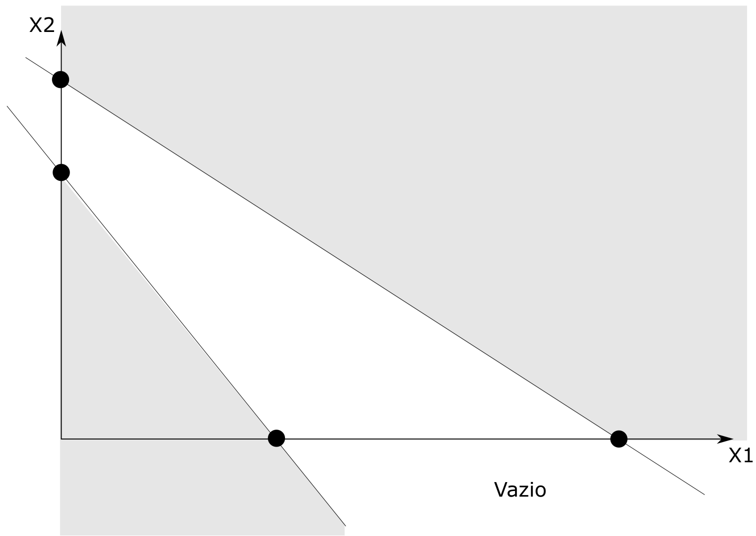
temos que a região é ilimitada.



Letra b) Como

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ -x_1 - 2x_2 \leq -12 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

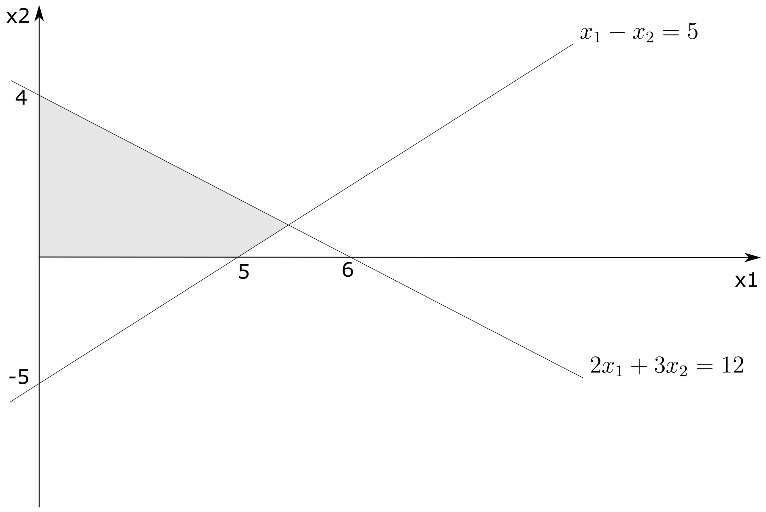
temos que a região é vazia (não existe solução factível).



Letra c) Como

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0,\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

temos que a região é limitada.



Resposta do Exercício 6 $\lambda x^* + (1-\lambda)y^*$ é factível para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$ pois

$$\lambda x^* + (1-\lambda)y^* \geq 0$$
$$A(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) = \lambda A x^* + (1-\lambda)Ay^* = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

E o valor da função objetivo é constante e igual ao valor ótimo z^* pois

$$z^* = c'x^* = c'y^* \to c'(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*) = \lambda c'x^* + (1-\lambda)c'y^* = \lambda z^* + (1-\lambda)z^* = z^*.$$

Logo para qualquer $0 \leq \lambda \leq 1$ temos que $\lambda x^* + (1-\lambda)y^*$ também é ótimo.

Resposta do Exercício 7 Consider os seguintes casos $i)$ e $ii)$ referentes ao vetor c:

$i)$ Se $c_j > 0$ $\forall j = 1, 2, \ldots, n$, então $x^* = 0$.

$ii)$ Suponha agora que $c_j < 0$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Temos 2 possibilidades $ii.a)$ e $ii.b)$: $ii.a)$ Se $a_{ij} \leq 0$ $\forall i = 1, \ldots, m$ então definimos

$$z^\lambda = \begin{pmatrix} x_{0j} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \to \text{j-ésimo linha}, \lambda \geq x_{0j}, \text{ seque que}$$

$$\begin{cases} Az^\lambda = x_{01}a_1 + \cdots + \lambda a_j + \cdots + x_{0n}a_n \leq \\ x_{01}a_1 + \cdots + x_{0j}a_j + \cdots + x_{0n}a_n = Ax_0 < b \\ z^\lambda \geq 0 \end{cases}$$

Como $c_j < 0$ temos que

$$c'z^\lambda = c_1 x_{01} + \cdots + c_j\lambda + \cdots + c_n x_{0n} \to -\infty, \text{ quando } \lambda \to \infty$$

$ii.b)$ Suponha que $a_{xj} > 0$ para algum i, onde $1 \leq i \leq m$. Seja $y = b - Ax_0 > 0$. Portanto,

$$b - (a_1 x_{01} + a_j x_{0j} + \cdots + a_n x_{0n}) = y > 0$$

Seja

$$\epsilon = \frac{y_n}{a_{rj}} = \min\left\{\frac{y_i}{a_{ij}; a_{ij} > 0}\right\}$$

Segue que

$$\begin{cases} a_{ij} > 0 \to \frac{y_i}{a_{ij}} - \epsilon \geq 0 \to y_i - a_{ij}\epsilon \geq 0 \\ a_{ij} \leq 0 \to y_i - a_{ij}\epsilon \geq 0 \end{cases}$$

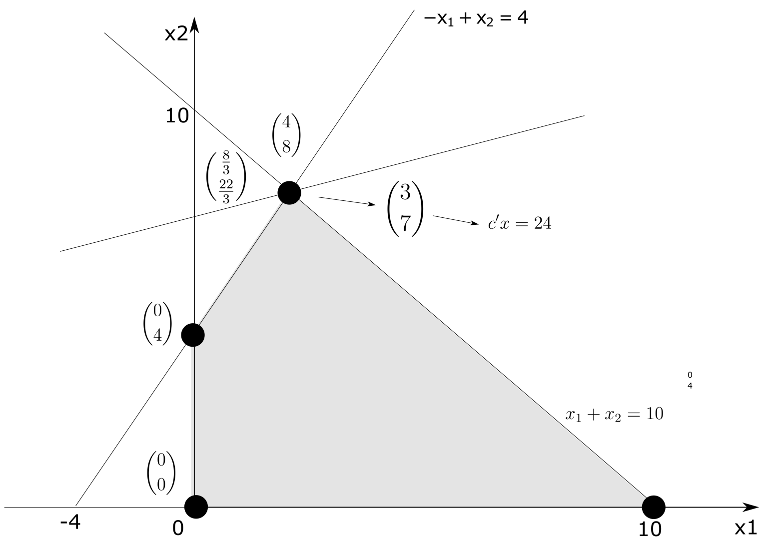
$$\begin{aligned} b - (a_1 x_{01} + \cdots + a_j(x_{0j} + \epsilon) + \cdots + a_n x_n) = \\ y - \epsilon a_{ij} \geq 0 \to A(x_0 + \epsilon e_j) \leq b, x_0 + \epsilon e_j \geq 0 \\ c'(x_0 + \epsilon e_j) = c' x_0 + \epsilon c_j < c' x_0 \to \text{logo } x_0 \text{ não pode ser ótimo} \end{aligned}$$

Resposta do Exercício 8 Letra a)

$$\left\{\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ \hline 3x_2 = 22 \to x_2 = \frac{22}{3}, x_1 = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 + x_2 = 10 \\ \hline 2x_2 = 14 \to x_2 = 7, x_1 = 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 = 12 \\ \hline x_2 = 8, x_1 = 4 \end{array}\right.$$



Letra b)

$$x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1, \lambda_i \geq 0$$

e com $c = \binom{1}{3}$, segue que

$$\begin{aligned} c'x &= \lambda_1 \times 0 + \lambda_2 \times 12 + \lambda_3 \times 24 + \lambda_4 \times 10 \\ &= 12\lambda_1 + 24\lambda_3 + 10\lambda_4 \end{aligned}$$

Portanto, o ótimo é fazendo $\lambda_3 = 1$, e $x^* = \binom{3}{7}$ (ótimo único).

Letra c) Nesse caso o conjunto de restrições é ilimitado, e as direções extremas e as representações de x são dadas por:

$$d_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ x = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1;\ \lambda_1, \lambda_2, v_1, v_2 \geq 0$$

Considerando $c = \binom{1}{3}$ segue que:

$$c'd_1 = 5 > 0\{ \text{ ou } c'd_2 = 1 > 0\} \text{ solução ilimitada}$$

Resposta do Exercício 9

$$\begin{aligned} x_1 &= 207 \to z = 3 \times 207 = 621 \\ x_2 &= \frac{207}{3} \to z = 9 \times \frac{207}{5} = 372,6 \\ x_3 &= \frac{207}{3} \to z = 6 \times \frac{207}{3} = 414 \\ x_4 &= \frac{207}{4} \to z = 7 \times \frac{207}{4} = 262,25 \\ x_5 = \frac{207}{2} \to z = \frac{207}{2} = 331.2 x_6 &= \frac{207}{5} \to z = 8 \times \frac{207}{5} = 331.2 \end{aligned}$$

Logo a solução ótima (única) é: $x_1^* = 207$, $x_i^* = 0$, $i = 2, \ldots, 6$, e $z^* = 621$ (máximo).

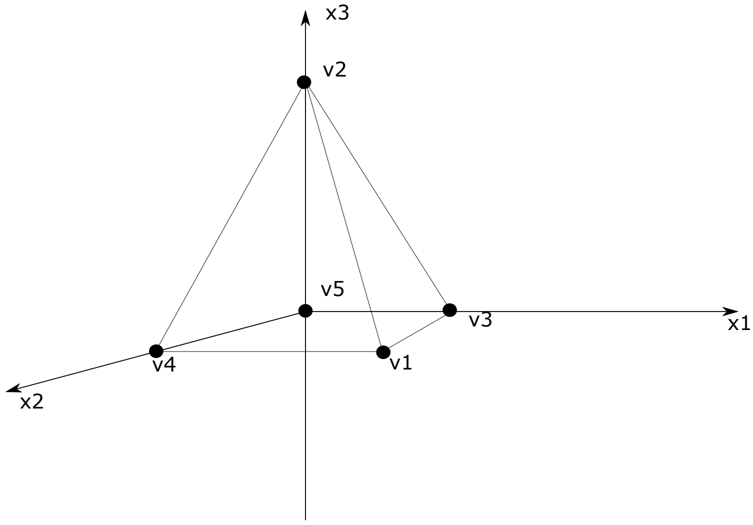
Resposta do Exercício 10

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1,\ \ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Com as variáveis de folga a matriz A, e o vetor b são:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{ número máximo soluções básicas: } \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

O gráfico da região factível é:



1) x_1 e x_2 na base, variáveis não básicas $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo temos o ponto extremo indicado no gráfico como v_1:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x_1 - 2x_2 = 1 \\ \hline \frac{3}{2}x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow x_2 = \frac{1}{3}, x_1 = \frac{2}{3} \end{cases}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) x_1 e x_3 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo temos o ponto extremo indicado no gráfico como v_2, que é uma solução básica factível degenerada ($x_1 = 0$).

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_3 = 1 \\ \hline \frac{1}{2}x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_3 = 1. \end{cases}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) x_1 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$. Solução básica não factível.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 2, x_4 = -1.$$

4) x_1 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo v_3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 0, x_5 = \frac{1}{2}, \ \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5) x_2 e x_3 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = 0, x_3 = 1.$$

6) x_2 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_3 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo v_4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}; x_4 = \frac{1}{2}; \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

7) x_2 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$. Solução básica não factível.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow x_2 = 1, x_5 = -1$$

8) x_3 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_5 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 1; x_4 = 0$$

9) x_3 e x_5 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$. Solução básica factível degenerada, igual ao ponto extremo v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_3 = 1; x_5 = 0$$

10) x_4 e x_4 na base, variáveis não básicas $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. Solução básica factível correspondendo ao ponto extremo $v_5 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow x_4 = 1; x_5 = 1$$

Temos 5 pontos extremos (soluções básicas factíveis), estando de acordo com o gráfico.

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Notamos que $c'v_1 = 1$, $c'v_2 = 1$, $c'v_3 = 1$, $c'v_4 = 1/2$, $c'v_5 = 0$ e portanto temos $z^* = 1$ com infinitas soluções ótimas dadas por

$$x^* = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3, \;\; \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \;\; \lambda_i \geq 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Resposta do Exercício 11 Considere:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

em K, isto é,

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ y_1^2 + y_2^2 \leq 1 \end{cases}$$

Seja

$$z = \lambda x + (1-\lambda)y = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$, vamos mostrar que $z \in K$, isto é, $z_1^2 + z_2^2 \leq 1$. Realmente,

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ z_2 &= \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2 \\ 0 \leq (x_i - y_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 - 2x_iy_i &\leq 1 - 2x_iy_i \\ \to x_iy_i &\leq \frac{1}{2}, \;\; i = 1, 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} z_1^2 = (\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1)^2 = \lambda^2 x_1^2 + (1-\lambda)^2 y_1^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_1y_1 \\ z_2^2 = (\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2)^2 = \lambda^2 x_2^2 + (1-\lambda)^2 y_2^2 + 2\lambda(1-\lambda)x_2y_2 \\ z_1^2 + z_2^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) + (1-\lambda)^2(y_1^2 + y_2^2) + 2\lambda(1-\lambda)(x_1y_1 + x_2y_2) \leq \ldots \\ \ldots \lambda^2 1 + (1-\lambda)^2 1 + 2\lambda(1-\lambda)(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) \\ \hline z_1^2 + z_2^2 \leq \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1. \end{cases}$$

Resposta do Exercício 12

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & -8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{19}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{8}{5} \end{array}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{19}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{5} - x_3 \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases} \quad \text{Solução é dada pela reta:} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

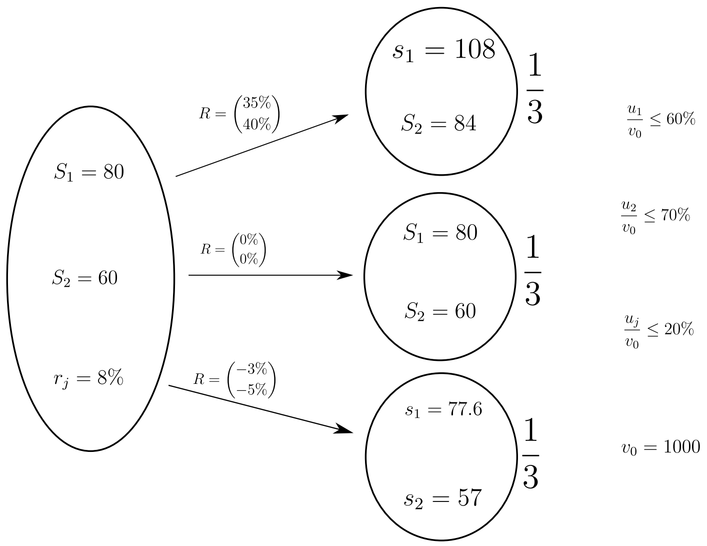
Com isso temos os seguintes pontos extremos (temos somente 2 bases):

$$\text{Base1:} \, (x_1,\, x_2) \, \text{na base} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 = \frac{19}{5} \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{matrix} \quad x_3 = 0$$

$$\text{Base2:} (x_2,\, x_3) \, \text{na base} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_2 = \frac{8}{5} \\ x_3 = \frac{19}{5} \end{matrix} \quad x_1 = 0$$

Conjunto factível dado por:

$$x = \lambda \begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \frac{19}{5} \\ \frac{8}{5} \\ (1-\lambda)\frac{19}{5} \end{pmatrix}, 0 \leq \lambda \leq 1$$



Resposta do Exercício 13

$$\begin{aligned} t = 0 : \\ v_0 = u_f + u_1 + u_2 \rightarrow u_f = v_0 - (u_1 + u_2) \\ 0 \leq u_1 + u_2 = v_0 - u_f \leq 800 \\ t = 1 : V(1) = (1 + r_f)u_f + (1 + R_1)u_1 + (1 + R_2)u_2 \\ V(1) = (1 + r_f)v_0 + (R_1 - r_f)u_1 + (R_2 - r_f)u_2 \\ = 1080 + (R_1 - r_f)u_1 + (R_2 - r_f)u_2 \end{aligned}$$

R	V(1)
$\begin{pmatrix} 35\% \\ 40\% \end{pmatrix}$	$1080 + 0.27 * u_1 + 0.32 u_2$
$\begin{pmatrix} 0\% \\ 0\% \end{pmatrix}$	$1080 - 0.08 * u_1 - 0.08 u_2$
$\begin{pmatrix} -3\% \\ -5\% \end{pmatrix}$	$1080 - 0.11 * u_1 - 0.13 u_2$
$E(u(1))$	$1080 + \frac{1}{3}(0.08 * u_1 + 0.11 u_2)$

$$\max\ (8u_1 + 11u_2)/300$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 0 \leq u_1 \leq 600 \\ 0 \leq u_2 \leq 700 \\ 0 \leq u_1 + u_2 \leq 800. \end{cases}$$

Resolvendo temos que a solução ótima é: $u_f^* = 200$, $u_1^* = 100$, $u_2^* = 700$, e o retorno esperado ótimo é: 10.833%

Resposta do Exercício 14

$$\min 5x_1 - 8x_2 - 3x_3$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 1 \\ -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ -2x_1 - 12x_2 + 3x_3 \leq 9 \end{cases}$$

Colocando na forma de tableau

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
-5	8	3	0	0	0	0
2	5	-1	1	0	0	1
-3	-8	2	0	1	0	4
-2	-12	3	0	0	1	9

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
$-\frac{41}{5}$	0	$\frac{23}{5}$	$-\frac{8}{5}$	0	0	$-\frac{8}{5}$
$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	1	0	$\frac{28}{5}$
$\frac{14}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	0	1	$\frac{57}{5}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	a
$-\frac{105}{10}$	0	0	-20	$\frac{23}{2}$	0	-66
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	3
$\frac{1}{2}$	0	1	4	$\frac{5}{2}$	0	14
$\frac{5}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	3

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 4 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta do Exercício 15

$$x(k+1) = \frac{1}{3}x(k) + 4u(k),\ x_0 = 9$$
$$x(3) = 0\ \rightarrow\ \text{minizando}\ |u(0)| + |u(1)| + |u(2)|$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned} x(3) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 x_0 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 u(0) + 4u(2) \\ &= \frac{1}{27}\frac{9}{3} + \frac{4}{9}u(0) + \frac{4}{3}u(1) + 4u(2) = 0 \\ &\rightarrow 4\left(\frac{u(0)}{9} + \frac{1}{3}u(1) + u(2)\right) = -\frac{1}{3} \\ &\rightarrow \frac{u(0)}{9} + \frac{u(1)}{3} + u(2) = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Assumindo que $u(k) = u^+(k) - u^-(k)$, $\forall\ k = 0,1,2$ onde, $u^+(k) \geq 0$, $u^-(k) \geq 0$.

Letra a)

$$\min |u^+(0)| + |u^-(0)| + |u^+(1)| + |u^-(1)| + |u^+(2)| + |u^-(2)|$$
$$\text{s.a.}\ \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^+(0) \\ u^-(0) \\ u^+(1) \\ u^-(1) \\ u^+(2) \\ u^-(2) \end{bmatrix} = -\frac{1}{12},$$
$$u^+(k) \geq 0,\ \ u^-(k) \geq 0,\ \ k = 0,1,2.$$

Temos 6 soluções básicas dentre essas 3 são soluções básicas factíveis.

Letra b)

$$1) -\frac{1}{9}u^-(0) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(0) = \frac{3}{4}, z = \frac{3}{4}$$
$$2) -\frac{1}{3}u^-(1) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(1) = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{4}$$
$$3) - u^-(2) = -\frac{1}{12} \rightarrow u^-(2) = \frac{1}{12}, z = \frac{1}{12}\ \ \text{solução ótima}$$

Logo, $u^*(0) = 0$, $u^*(1) = 0$, $u^*(2) = -\frac{1}{12}$, $z^* = \frac{1}{12}$.

Letra c)

$$x^*(1) = \frac{1}{3}9 = 3$$
$$x^*(2) = \frac{1}{3}3 = 1$$
$$x^*(3) = \frac{1}{3}1 - 4\frac{1}{12} = 0$$

Resposta do Exercício 16 Invertendo o sinal da função objetivo e introduzindo as variáveis de folga temos:

$$\max 4x_1 - x_2 - x_3 \quad \rightarrow \quad -\min -4x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,\dots 5 \end{cases}$$

Primeira fase:

$$\min y_1$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_4 + y_1 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0,\ \ i = 1,2,3,\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
-2	1	0	-1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	1

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
-2	1	0	-1	0	0	1
-2	1	0	-1	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	1

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
-2	1	0	-1	0	1	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Fase 2

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
4	-1	-1	0	0	0
-2	1	0	-1	0	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
2	0	-1	-1	0	1
-2	1	0	-1	0	1
2	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tableau ótimo, e a solução ótima (única) é:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{4} \\ x_2^* &= \frac{3}{2} \\ x_3^* = x_4^* = x_5^* &= 0 \\ z^* = \frac{1}{2} &= -1 + \frac{3}{2} \\ B = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e ainda, considerando o problema com a base correspondente ao início da Fase 2, a solução ótima do dual (denotado por D_2) é:

$$w^* = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad w_1^* = 1, \; w_2^* = -1, \; z_w^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

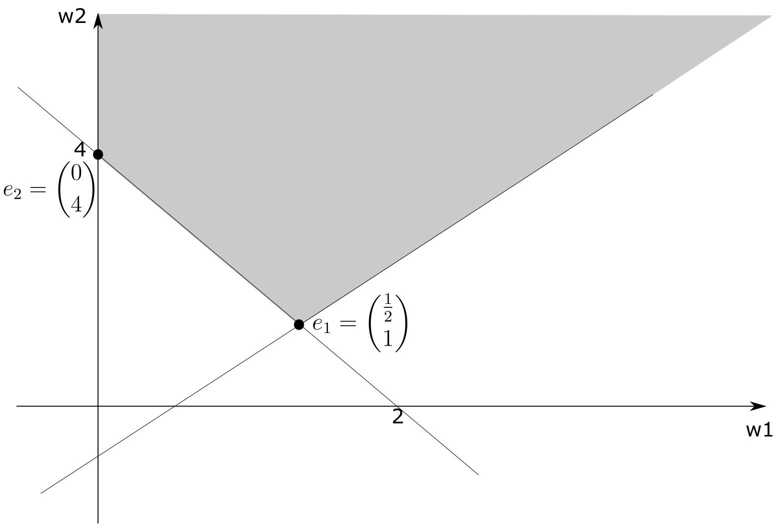
Problema dual D_2 (relativo à base no início da Fase 2) é max $w_1 + \frac{1}{2}w_2$ sujeito a:

$$\begin{aligned} -2w_1 + \frac{1}{2}w_2 &\le -4 \\ w_1 \le 1, \; w_2 &\le 1 \\ -w_1 + \frac{1}{2}w_2 &\le 0, \\ w_2 &\le 0 \end{aligned}$$

Problema dual D_1 (relativo ao problema na Fase 1) (D1)

$$\text{Dual: } \max w_1 + w_2$$
$$\text{s.a. } \begin{cases} -2w_1 + w_2 \leq -4 \\ w_1 + \frac{1}{2}w_2 \leq 1 \\ w_1 \leq 1, w_2 \leq 0, w_1 \geq 0 \end{cases}$$

No gráfico, fazemos a troca de variáveis $w_2^+ = -w_2 \geq 0$.



Pontos extremos (considerando $w_2^+ = -w_2$): $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, Direções extremas: $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Note que e_1 é obtido resolvendo

$$\begin{cases} -2w_1 + w_2^+ = -2 \\ 2w_1 + w_2^+ = 4 \\ \hline 2w_2^+ = 2 \to w_2^+ = 1, w_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{que é ótimo : } \begin{cases} z^* = \frac{1}{2} \\ w_1^* = \frac{3}{2}, w_2^* = -1 (= -w_2^+) \end{cases}$$

Vamos verificar o resultado acima usando a representação da matrix A como na fase 1 e usando o teorema visto em aula que gera a solução ótima do dual pelo primal. Temos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e portanto

$$B = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, c_B' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \;\; w^* = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Resposta do Exercício 17 Fase 1

$$\min y_1$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5,\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
2	1	4	1	0	0	5
4	1	2	0	0	1	1
1	1	2	0	1	0	2

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
4	1	2	0	0	0	1
2	1	4	1	0	0	5
4	1	2	0	0	1	1
1	1	2	0	1	0	2

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	b
0	0	0	0	0	-1	0
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{4}$

Fase 2 $\min x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3$

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	0
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{4}$

Tableau 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	3	1	0	$\frac{9}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{7}{4}$

Tableau 2

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	0	0	0	$\frac{1}{8}$
-6	-1	0	1	0	3
2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$
-3	0	0	0	1	1

$$x_1^* = 0;\ x_2^* = 0;\ x_3^* = \frac{1}{2};\ x_4^* = 3;\ x_5^* = 1; z^* = \frac{1}{8}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$c_B' = \begin{bmatrix} c_4 & c_3 & c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Primal considerando Fase 2: $\min x_1 + \dfrac{3}{4}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 + x_4 = \frac{9}{2} \\ x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_5 = \frac{7}{4} \\ x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Dual considerando Fase 2: $\max \dfrac{9}{2}w_1 + \dfrac{1}{4}w_2 + \dfrac{7}{4}w_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} w_2 \leq 1 \\ \frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{3}{4}w_3 \leq \frac{3}{4} \\ 3w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{3}{2}w_3 \leq \frac{3}{4} \\ w_1 \leq 0, w_3 \leq 0 \end{cases}$$

$$w^* = c_B' B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1^* = 0,\ w_2^* = \frac{1}{2},\ w_3^* = 0,\ z_w^* = \frac{1}{8}$$

Primal considerando Fase 1: $\min x_1 + \dfrac{3}{4}x_2 + \dfrac{1}{4}x_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Dual considerando Fase 1: $\max 5w_1 + w_2 + 2w_3$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2w_1 + 4w_2 + w_3 \leq 1 \\ w_1 + w_2 + w_3 \leq \frac{3}{4} \\ 4w_1 + 2w_2 + 2w_3 \leq \frac{1}{4} w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_4 & a_3 & a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w^* = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_1^* = 0, w_2^* = \frac{1}{8}, w_3^* = 0, z_w^* = \frac{1}{8}$$

Resposta do Exercício 18

$$\min x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

Fase 1
Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
0	1	1	-1	0	1	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	2	-1	-1	0	0	0	3
0	1	1	-1	0	0	1	0	2
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	0	3

Tableau 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	-1	1	0	0	-2	1
0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	-1	2

Tableau 2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Fase 2
Tableau 0

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-1	2	0	0	0	0
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Tableau 1

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

Tableau 2

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-3	0	2	0	0	-4
0	2	0	-1	1	0	1
0	1	1	-1	0	0	2
0	-1	0	1	0	1	1

Tableau 3

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	-1	0	0	0	-2	-6
0	1	0	0	1	1	2
0	0	1	0	0	1	3
0	-1	0	1	0	1	1

Resposta do Exercício 19 Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	u_2	u_6	u_3	10
$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	1
u_4	u_5	0	1	u_1

Onde, x_1 é não básica e x_4 é não básica, com isso, x_2 e x_3 são básicas. $x_3 = 1$, $x_2 = u_1$. E ainda, $\rightarrow u_2 = 0,\ u_5 = 1,\ u_6 = 0$.

Tableau 0

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	0	0	u_3	10
$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	1
u_4	1	0	1	$u_1 \rightarrow \frac{10}{3}$

$$10 = c_1x_1 + c_2x_2 = 3x_2 \rightarrow x_2 = \frac{10}{3}$$

Colocando x_4 na base tirar x_2.

x_1	x_2	x_3	x_4	b
$1 - u_4u_3$	$-u_3$	0	0	$10 - \frac{10}{3}u_3$
$\frac{3}{5} - \frac{u_4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
u_4	1	0	1	$\frac{10}{3}$

Com isso,

$$\begin{aligned} -u_3 &= -3 \rightarrow u_3 = 3 \\ 1 - u_4u_3 &= 1 - u_4 3 = -5 \\ &\rightarrow u_4 = \frac{-6}{-3} = 2 \end{aligned}$$

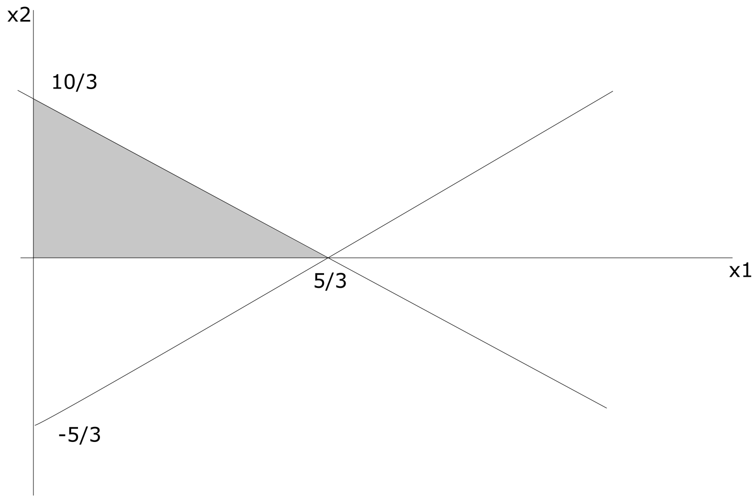
O tableau original é:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
-5	-3	0	0	0
$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{3}$
2	1	0	1	$\frac{10}{3}$

Problema original:

$$\max 5x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} \frac{1}{5}x_1 - \frac{1}{5}x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 2x_1 + x_2 \leq \frac{10}{3}, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Resposta do Exercício 20 Letra a)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \end{bmatrix}$$

Letra b)

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	-4	0	-4	-2	-40
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	-$\frac{1}{2}$	0	-$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	8	0	-2	-20
0	1	2	1	0	5
1	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
6	-2	10	0	0	0
0	1	2	1	0	5
3	-1	1	0	1	10

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \ c' = -\begin{bmatrix} 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tableau na forma padrão

0	$-(c_D - c_B' B^{-1} D)$	$c_B' B^{-1} b$
I	$B^{-1} D$	$B^{-1} b$

Verificação

$$B^{-1}D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_3 & x_1 & x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$c_B' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \end{array}, \ c_D' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$c_B' B^{-1} b = -\begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = -40$$

$$c_B' B^{-1} D = -\begin{bmatrix} 10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c_D' - c_D' B^{-1} D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Letra c)

$$c_{novo} = -\begin{bmatrix} 6 \\ \lambda \\ 12 \end{bmatrix} \to c_D' - c_B' B^{-1} D = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_2 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

tableau: $z_0 = -6 \times \frac{5}{2} - 12 \times \frac{5}{2} = -45$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	$\lambda - 3$	0	-5	-2	-45
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

Tableau ótimo para $\lambda \leq 3$. O caso $\lambda = 3$ gera infinitas soluções:

$$x^1 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \to z^1 = c' x^1 = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} = -45$$

Colocando x_2 na base

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-2	-6	-2	-50
0	1	2	1	0	5
1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5

$$x^2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \to z^2 = c'x^2 = -\begin{bmatrix} 6 & 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = -45$$

Soluções ótimas: $x^* = \zeta x^1 + (1-\zeta)x^2, \;\; 0 \leq \zeta \leq 1.$

Com $\lambda = 10$ vale a pena x_2 entrar na base. Pivotando,

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	7	0	-5	-2	-45
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{2}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	0	-14	-12	-2	-80
0	1	2	1	0	5
1	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	5

Solução ótima única: $x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; z^* = -80$

Outra maneira de verificar que o tableau é ótimo para $\lambda \leq 3$:

$$c_{novo} = -\begin{pmatrix} 6 \\ \lambda \\ 10 \end{pmatrix} = c + \begin{pmatrix} 0 \\ -2-\lambda \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} B \quad D \\ \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & a_2 & a_4 & a_5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B^{-1}D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \; B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$c'_B = \begin{bmatrix} c_3 & c_1 \end{bmatrix}, \; c'_D = \begin{bmatrix} c_2 & c_4 & c_5 \end{bmatrix}, \; c'_B B^{-1}D - c'_D = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Como c_{novo} mudou para c_2 e c_3 temos que

$$\begin{aligned} c'_{Bnovo}B^{-1}D - c'_{Dnovo} &= \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3+\lambda & -5 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Letra d) Vamos mostrar que o ótimo não muda para $\lambda \geq 3$, sendo ótimo degenerado para $\lambda = 3$. Temos que:

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ \lambda \end{bmatrix} \rightarrow B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 + \frac{\lambda}{3} \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$$

Outra maneira:

$$b_{novo} = b + \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda - 10 \end{bmatrix}, \quad B^{-1}b_{novo} = B^{-1}b + B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda - 10 \end{bmatrix} = \dots$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}(\lambda - 10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{\lambda}{3} - 1 \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 3.$$

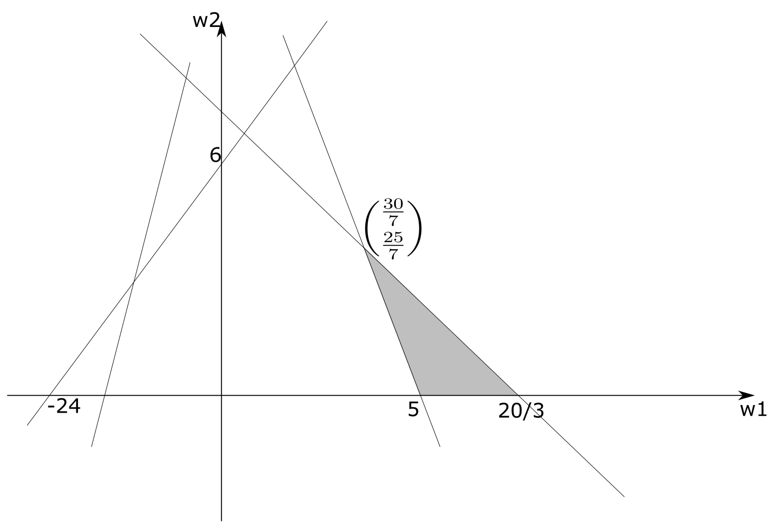
Solução ótima é: $x_1^* = \frac{\lambda}{3} - 1$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 3$, $z^* = -6(\frac{\lambda}{3} - 1) - 10 \times 3 = -24 - 2\lambda$.

Resposta do Exercício 21 O problema na forma primal é

$$\min 10x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 20x_4 - 25x_5$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 \leq 19 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2_4 + x_5 \leq 57 \\ 8x_2 + 9x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Agora na forma Dual temos,

$$\max -19w_1 - 57w_2 - 2w_3$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} -w_1 - 2w_2 - 8w_3 \leq 10 \\ -w_1 + 4w_2 \leq 24 \\ -2w_1 - 3w_2 - 9w_3 \leq 20 \\ 3w_1 + 2w_2 \leq 20 \\ -5w_1 - w_2 \leq -25 \end{cases}$$



O ótimo é quando $w_3 = 0$ (por inspeção) e com isso os três pontos extremos são:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 19 \times 5 = -95 \; otimo$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 19 \times \frac{20}{3} = -126.67$$
$$e_3 = \begin{pmatrix} \frac{30}{7} \\ \frac{25}{7} \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-19 \times 30 - 57 \times 25}{7} = -285$$

Restrições com folga no dual no ponto ótimo

$1^o) - w_1 - 2w_2 - 8w_3 < 0 \leftrightarrow x_1^* = 0$
$2^o) - w_1 - 4w_2 < 24 \leftrightarrow x_2^* = 0$
$3^o) - 2w_1 - 3w_2 - 9w_3 < 20 \leftrightarrow x_3^* = 0$
$4^o) - 3w_1 - 2w_2 < 20 \leftrightarrow x_4^* = 0$
$5^o) - w_1 - 2w_2 - 8w_3 < 0 \leftrightarrow x_6^* = 0$
$6^o) \; w_1 > 0 \leftrightarrow x_8 * = 0$

Com isso temos que as variáveis básicas na solução ótima do primal são: x_5 , x_7, x_8. Resolvendo para essa base encontramos:

$$\begin{cases} 5x_5^* = 19 \\ x_5^* + x_7^* = 57 \\ x_8^* = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_5^* = \frac{19}{5} \\ x_7^* = 57 - \frac{19}{5} = \frac{266}{5} \\ x_8^* = 2 \end{cases} \quad z^* = -25\frac{19}{5} = -95$$

Resposta do Exercício 22 Seja x^* uma solução ótima finita de

$$\min c'x$$
$$\text{s.a.} \; \begin{cases} Ax = b, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Então pelo teorema da dualidade, existe uma solução ótima finita w^* do problema dual.

$$\max w'b$$
$$\text{s.a.} \; \begin{cases} w'A = c'. \end{cases}$$

Consider agora o novo problema

$$\min c'x$$
$$\text{s.a.} \; \begin{cases} Ax = \hat{b}, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Se o novo problema não é factível, obviamente ele não é ilimitado. Como w^* é factível para o dual (pois factibilidade nesse caso só depende do vetor c) para qualquer solução factível x temos que $c'x \geq (w^*)'\hat{b}$, o que mostra que o novo problema não pode ser ilimitado.

Resposta do Exercício 23

$$\min c'x$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0 \end{cases}$$
$$\max w'b$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} w'A \leq c' \end{cases}$$
$$c'x^* = w'\lambda$$

onde x^* solução do primal e $\lambda \to$ solução do dual.

Letra a)

$$\begin{cases} a_1x = b_1 \\ \vdots \\ a_kx = b_k \\ \vdots \\ a_mx = b_m \end{cases} \to \text{novo problema} \begin{cases} a_1x = b_1 \\ \vdots \\ \mu a_kx = \mu b_k \\ \vdots \\ a_mx = b_m \end{cases} \to A_{novo}x^* = b$$

Dual:

$$\max w_1 + \cdots + w_kb_k + \cdots + w_mb_m$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} a_{11}w_1 + \cdots + \mu a_{k1}w_k + \cdots + a_{m1}w_m \leq c_1 \\ \ldots \\ a_{1n}w_1 + \cdots + \mu a_{kn}w_k + \cdots + a_{mn}w_m \leq c_n \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \frac{\lambda_k}{\mu} \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \to \lambda'_{novo}A_{novo} = \lambda'A \leq c' \text{ é factível}$$

$$\lambda'_{novo}b_{novo} = \lambda'b = c'x^* \text{ é ótimo}$$

Letra b)

$$\begin{cases} a_1x = b_1 \\ \vdots \\ a_kx = b_k \\ \vdots \\ a_rx = b_r \\ \vdots \\ a_mx = b_m \end{cases} \to \begin{cases} a_1x = b_1 \\ \vdots \\ a_kx = b_k \\ \vdots \\ (a_r + \mu a_k)x = (b_r + \mu b_k) \\ \vdots \\ a_mx = b_m \end{cases} \to A_{novo}x^* = b$$

Dual:

$$\max wb_1 + \cdots + w_h b_h + \cdots + w_r(b_r + \mu b_h) + w_m b_m$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} a_1 w_1 + \cdots + a_{k1} w_k + \cdots + (a_{r1} + \mu a_{k1}) w_r + \cdots + a_{m1} w_m \leq e_1 \\ \vdots \leq \vdots \\ a_{1n} w_1 + \cdots + a_{kn} w_k + \cdots + (a_{rn} + \mu a_{kn}) w_r + \cdots + a_{mn} w_{mn} \leq c_n \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k - \mu\lambda_r \\ \vdots \\ \lambda_r \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\lambda'_{novo} A_{novo} = \lambda' A \leq c' \rightarrow \text{ satisfaz os restrições}$$
$$\lambda'_{novo} b_{novo} = \lambda' b = c' x^* \rightarrow \text{é ótimo}$$

Letra c)

$$\min c'x$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\min(c' + \mu a_k)x = \min(c'x) + \mu b_k$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} a_1 x = b_1 \\ \vdots \\ a_k x = b_k \\ \vdots \\ a_m x = b_m \end{cases}$$

Dual

$$\max w_1 b_1 + \cdots + w_k b_k + \cdots + w_m b_m$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} w_1 a_{11} + \cdots + w_k a_{k1} + \cdots + w_m b_{m1} \leq c_1 + \mu a_{k1} \\ \quad \vdots \\ w_1 a_{1n} \cdots + w_k a_{kn} + \cdots + w_m b_{mn} \leq c_n + \mu a_{kn} \end{cases}$$

$$\lambda_{novo} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k + \mu \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \lambda'_{novo} A &\leq c' + \mu a_k \rightarrow \text{satisfaz as restrições} \\ \lambda'_{novo} b &= \lambda_1 b_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu) b_k + \cdots + \lambda_m b_m \\ &= \lambda' b + \mu b_k = c' x^* + \mu b_k \rightarrow \text{ótimo} \end{aligned}$$

——— *BOA SORTE :D* ———