ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Q1: ____________
Q2: ____________
Q3: ____________
Nota: __________

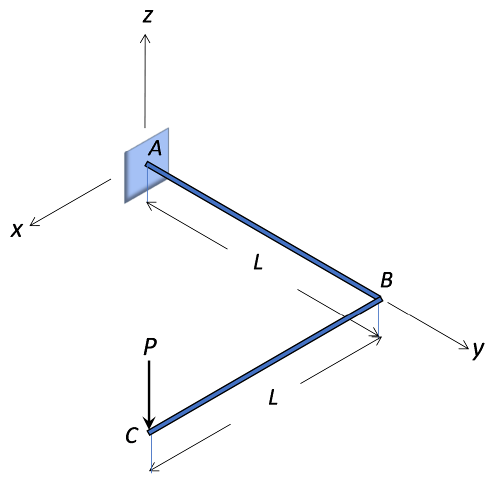
PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – 3ª Prova – 27/11/2019

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: ___________________________________ N.USP: __________ Assinatura: __________________

1ª Questão (3,0 pontos)



A estrutura *ABC* da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra de seção circular cheia, de raio *R*, dobrada em ângulo de 90°, e engastada no ponto *A*. A estrutura está submetida apenas à força vertical *P* aplicada ao ponto *C*. É dada a rigidez flexional da viga EI. Pedem-se:

a) o deslocamento vertical do ponto *C*;

b) a rotação do ponto *C* em torno da direção *x*;

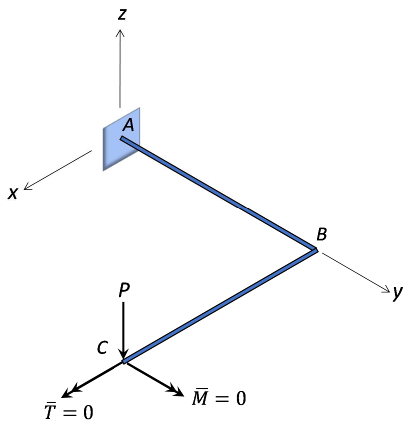
c) a rotação do ponto *C* em torno da direção *y*.

***Notas*:**

1) Desprezar a contribuição das forças cortantes à energia complementar.
2) Usar $GI_P = \frac{4}{5}EI$.

Resolução:

A questão é resolvida com o auxílio dos momentos fictícios $\bar{M}$ e $\bar{T}$ indicados na figura:



Assim, o deslocamento vertical do nó *C* será:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P}$$

a rotação de *C* em torno da direção *x* será:

$$\phi = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}}\right)_{\bar{T}=0}$$

e a rotação de *C* em torno da direção *y* será:

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}}\right)_{\bar{M}=0}$$

Desprezando o efeito da força cortante, a energia complementar será a soma das parcelas devidas à flexão e à torção. Usando o índice 1 para representar o trecho *CB* e 2 para representar o trecho *BA* podemos montar a tabela para auxiliar o cálculo:

$M_1(x) = -(\bar{M} + Px)$	$\dfrac{\partial M_1}{\partial P} = -x$	$\dfrac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = -1$	$\dfrac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} = 0$
$M_2(x) = \bar{T} - Px$	$\dfrac{\partial M_2}{\partial P} = -x$	$\dfrac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = 0$	$\dfrac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} = 1$
$T_1(x) = \bar{T}$	$\dfrac{\partial T_1}{\partial P} = 0$	$\dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} = 0$	$\dfrac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} = 1$
$T_2(x) = \bar{M} + PL$	$\dfrac{\partial T_2}{\partial P} = L$	$\dfrac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} = 1$	$\dfrac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} = 0$

O deslocamento vertical do nó *C* será:

$$\delta = \frac{1}{EI}\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \frac{1}{EI}\int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial P} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} dx$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\delta = \frac{23}{12}\frac{PL^3}{EI}$$

(1,0)

A rotação do ponto *C* em torno da direção *x* será:

$$\phi = \left(\frac{1}{EI}\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{1}{EI}\int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} dx\right)_{\bar{T}=0}$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\phi = -\frac{PL^2}{2EI}$$

(o sinal negativo significa sentido contrário ao do momento fictício adotado) (1,0)

A rotação do ponto *C* em torno da direção *y* será:

$$\theta = \left(\frac{1}{EI}\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI}\int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{5}{4EI}\int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} dx\right)_{\bar{M}=0}$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\theta = \frac{7}{4}\frac{PL^2}{EI}$$

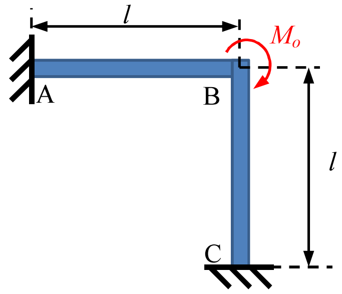
(1,0)

2ª Questão (3,5 pontos)

A estrutura ABC indicada na figura é formada pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento (l) e mesma rigidez flexional (EI), engastada nas seções A e C e rigidamente ligadas em B. Sobre a seção B é aplicado um binário de intensidade M_o no sentido indicado. Pede-se:

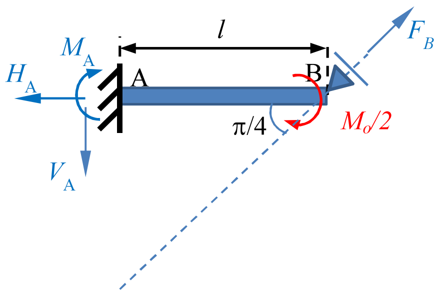
a) o D.C.L. final da estrutura com as indicações corretas dos valores e dos sentidos das reações de apoio em A e em C;

b) a rotação em B, em função dos dados fornecidos.



Resolução:

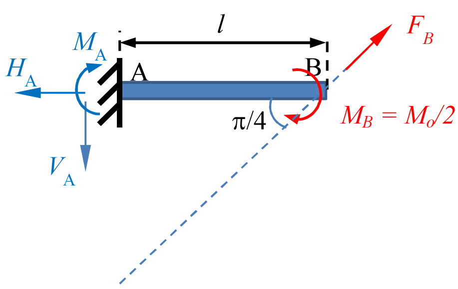
a) Trata-se de uma estrutura simétrica sob carregamento antissimétrico, de tal modo que os esforços de natureza simétrica são nulos no plano de simetria da estrutura, restando apenas uma força de natureza antissimétrica atuando no plano de simetria, conforme ilustra a figura a seguir:



O grau de hiperestaticidade estrutural após a simplificação decorrente da aplicação dos conceitos de simetria é dado por:

$$g = 4\ (reações) - 3\ (equações\ de\ equilíbrio) = 1$$

Tomando a reação F_B como incógnita hiperestática teremos a seguite EIF (estrutura isostática fundamental):



Para determinarmos a incógnita hiperestática, basta aplicarmos o Princípio da Energia Complementar Mínima. Desprezando as parcelas da energia complementar devidas às forças cortantes e forças normais (que são pequenas frente à parcela da energia complementar devida à flexão), teremos:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial F_B}dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2}F_B x - \frac{M_0}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)dx = 0$$

Ou seja:

$$F_B = \frac{3\sqrt{2}}{4}\frac{M_0}{l}$$

$\boxed{\text{(1,5 pto)}}$

Das equações de equilíbrio estático, resultam diretamente:

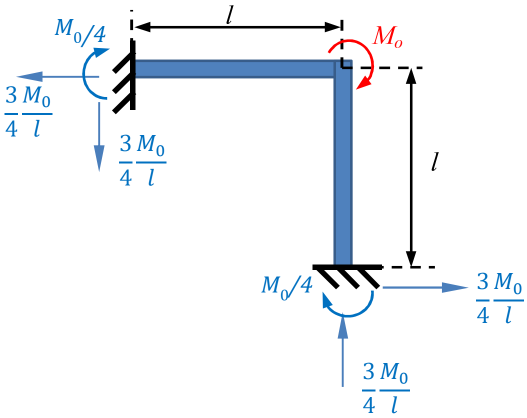
$$H_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = \frac{3}{4}\frac{M_0}{l}$$

$$V_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = \frac{3}{4}\frac{M_0}{l}$$

$$M_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B l - \frac{M_0}{2} = \frac{M_0}{4}$$

Obs.: Os sinais positivos indicam que os sentidos indicados na figura estão todos corretos.

Segue, portanto, o D.C.L. final (note que as reações também são antissimétricas):



(1,0 pto)

b) Para a determinação da rotação em B, basta aplicar o Teorema de Crotti-Engesser à EIF ilustrada na página anterior:

$$\theta_B = \frac{\partial U^*}{\partial M_B} = \int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_B} dx = \frac{1}{EI}\int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - M_B\right)(-1) dx$$

$$\theta_B = \frac{M_B l}{EI} - \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{F_B l^2}{EI}$$

Como $M_B = M_0/2$ e $F_B = 3\sqrt{2}M_0/4l$, virá:

$$\theta_B = \frac{1}{8}\frac{M_0 l}{EI}$$

(1,0 pto)

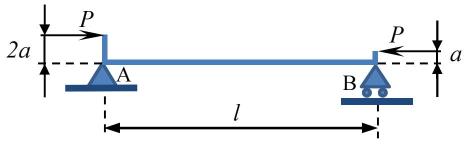
3ª Questão (3,5 pontos)

A viga AB indicada abaixo possui comprimento l e rigidez flexional EI. Seu peso próprio é desprezível e ela está submetida unicamente à ação de forças de compressão iguais e opostas, de intensidade P, cujas linhas de ação estão distantes $2a$ (para a extremidade A) e a (para a extremidade B) em relação ao eixo centroidal (onde a é um valor característico de excentricidade do carregamento de forma que $a/l \ll 1$). Pede-se:

a) a equação da linha elástica, $v(x)$, considerando o efeito dos momentos de 2ª ordem causados pelas forças de compressão, mas considerando válidas as hipóteses de pequenos deslocamentos e de comportamento elástico-linear do material;

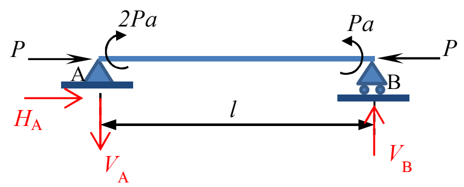
b) Considerando o caso em que a = 1 mm, determine os valores numéricos do deslocamento transversal na seção situada a meio vão para os casos abaixo. Comente os resultados obtidos!

$$(b.1)\ P \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{9l^2} \qquad (b.2)\ P \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \qquad (b.3)\ P \rightarrow \frac{4\pi^2 EI}{9l^2} \qquad (b.4)\ P \rightarrow \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



Resolução:

O diagrama de corpo livre da viga, considerando a hipótese de pequenos deslocamentos fica:



Pelas equações de equilíbrio estático, resultam:

$$H_A = 0$$

$$V_B l + Pa - 2Pa = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$-V_A + V_B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V_A = \frac{Pa}{l}$$

(0,5 pto)

O momento fletor a uma distância x do apoio A (e considerando o efeito dos momentos de 2ª ordem causados pelas forças de compressão) fica dado por:

$$M(x) = 2Pa - Pv(x) - \frac{Pa}{l}x$$

Logo, pela E.D.O. de 2ª ordem que relaciona a expressão linearizada da curvatura ao momento fletor:

$$EIv''(x) = M(x) = 2Pa - Pv(x) - \frac{Pa}{l}x$$

Ou:

(1,0 pto)

$$v''(x) + k^2 v(x) = 2k^2 a - k^2 \frac{a}{l}x$$

Onde:

$$k^2 = \frac{P}{EI} > 0$$

A solução da E.D.O. fica dada por:

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x)$$

Onde $v_h(x)$ corresponde à solução da equação homogênea e $v_h(x)$ corresponde à solução particular.

Assim:

$$v_h(x) = Asen(kx) + B\cos(kx)$$

E

$$v_p(x) = 2a - \frac{a}{l}x$$

Logo:

$$v(x) = Asen(kx) + B\cos(kx) + 2a - \frac{a}{l}x$$

(0,5 pto)

Aplicando as condições de contorno teremos:

$$v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = -2a$$

$$v(l) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Asen(kl) - 2a\cos(kl) + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = -a\frac{(1 - 2\cos(kl))}{sen(kl)}$$

Portanto a equação da linha elástica fica dada por:

$$v(x) = -a\frac{(1 - 2\cos(kl))}{sen(kl)}sen(kx) + 2a(1 - \cos(kx)) - \frac{a}{l}x$$

(1,0 pto)

b) Para $a = 1mm$ e $x = l/2$, teremos:

$$Para\ \ P \to \frac{\pi^2 EI}{9l^2} \quad \Rightarrow \quad kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \to \frac{\pi}{3} \qquad Daí:\ \ v(l/2) \to \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) mm \cong -0{,}23mm$$

$$Para\ \ P \to \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad \Rightarrow \quad kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \to \frac{\pi}{2} \qquad Daí:\ \ v(l/2) \to \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) mm \cong -0{,}62mm$$

$$Para\ \ P \to \frac{4\pi^2 EI}{9l^2} \quad \Rightarrow \quad kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \to \frac{2\pi}{3} \qquad Daí:\ \ v(l/2) \to -1{,}50\ mm$$

$$Para\ \ P \to \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad \Rightarrow \quad kl = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI}} \to \pi \qquad Daí:\ \ v(l/2) \to -\infty$$

(0,5 pto)

Verifica-se, assim, que conforme $P \to P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, os deslocamentos transversais aumentam cada vez mais, mesmo para pequenos valores de excentricidade do carregamento.