Q1: _____

Q2: _____

Q3: _____

Nota: _____

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

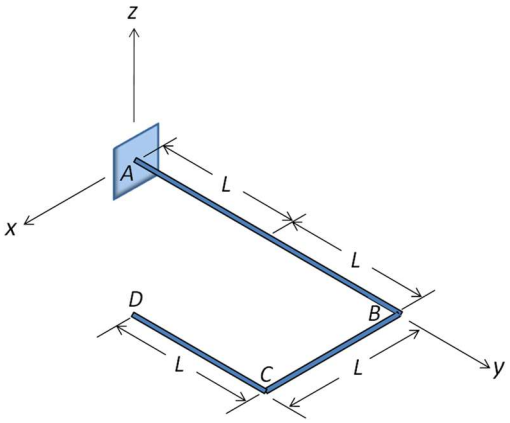
PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – 1ª Prova – 11/09/2019

Duração: 100 minutos

Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos durante a prova!

Nome: _____ N.USP: _____ Assinatura: _____

1ª Questão (3,0 pontos)

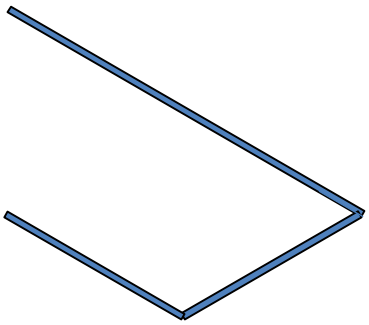


A viga *ABCD* da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por um arame com seção circular de raio *R*, dobrado em ângulos de 90°, e está engastada no ponto *A*. A viga está submetida apenas ao seu peso próprio *q* por unidade de comprimento. Pedem-se:

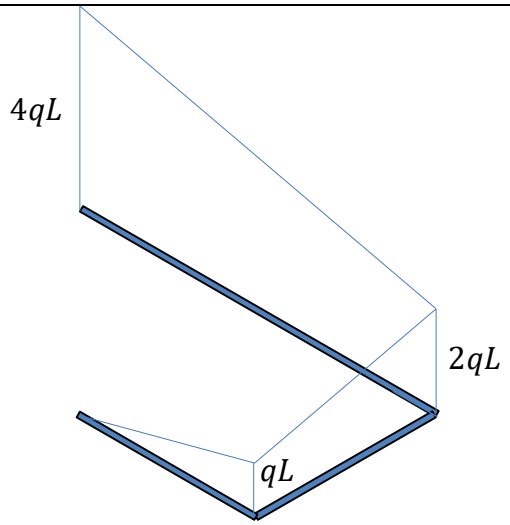
a) os diagramas de esforços solicitantes na viga;

b) o estado de tensões no ponto de coordenadas (0, 0, *R*) representado em um elemento cúbico orientado segundo os eixos *xyz*.

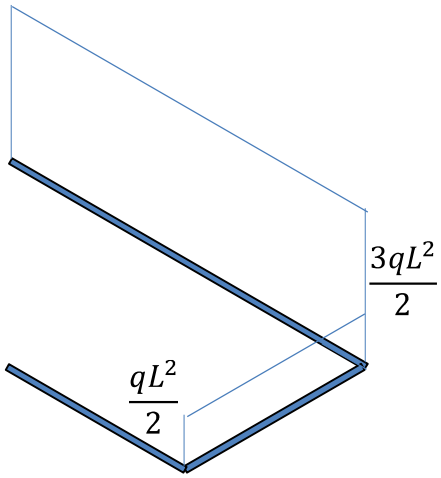
a)



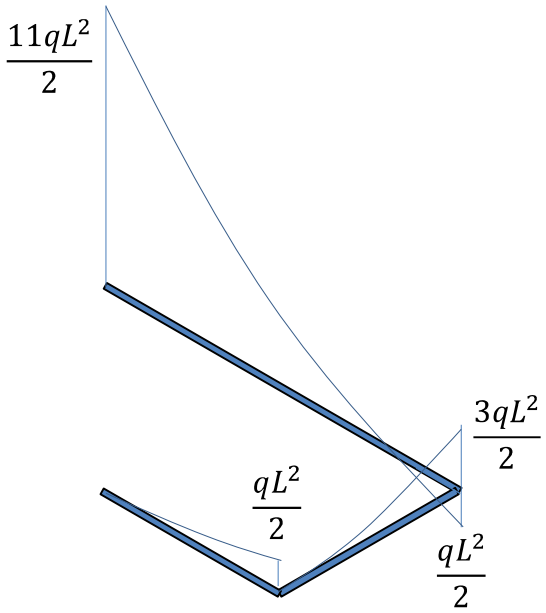
(N)



(V)



(T)



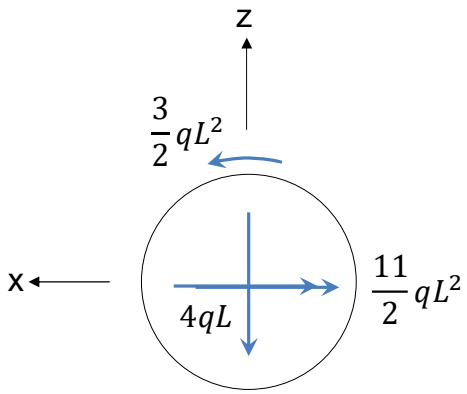
(M)

Obs:

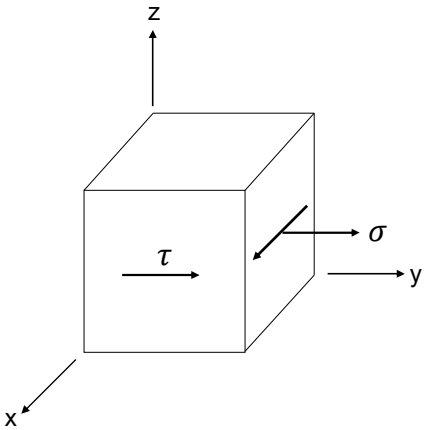
1) os momentos estão desenhados do lado tracionado
2) o diagrama é formado por trechos de parábolas

(1,5)

b) Na seção *A* atuam os esforços representados na figura:



No ponto de coordenadas (*0*, *0*, *R*) não há tensão de cisalhamento devida à força cortante, há apenas tensão de tração devida ao momento fletor e tensão de cisalhamento devida ao momento de torção. Assim, o estado de tensão nesse ponto pode ser representado pelo elemento cúbico:



onde:

$$\sigma = \frac{M}{I} R \Rightarrow \sigma = \frac{22}{\pi R^3} q L^2$$

e

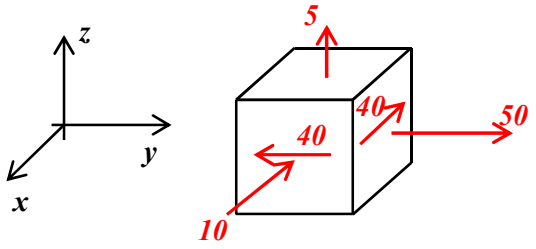
$$\tau = \frac{T}{I_p} R \Rightarrow \tau = \frac{3}{\pi R^3} q L^2$$

(1,5)

2ª Questão (3,5 pontos)

Os planos octaédricos são planos cujas normais formam ângulos iguais com as três direções principais de tensão em um dado ponto do sólido, de tal forma que existem ao todo, e para cada ponto do sólido, oito planos com esta característica (daí o nome plano octaédrico).

Para o estado tensional indicado na figura ao lado (com as tensões, em MPa, agindo nos sentidos indicados), pede-se determinar a tensão normal que atua em um plano octaédrico qualquer (a sua livre escolha).



Solução:

O tensor das tensões para o estado tensional dado, expresso na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, fica:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} -10 & -40 & 0 \\ -40 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

As tensões principais são obtidas da forma:

$$det([T] - \sigma.[I]) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad det\begin{bmatrix} -10-\sigma & -40 & 0 \\ -40 & 50-\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 5-\sigma \end{bmatrix} = 0$$

Resultando:

$$(5-\sigma).(\sigma^2 - 40\sigma - 2100) = 0$$

Assim:

(1,0 pto)

$$\sigma_1 = 70\ MPa, \quad \sigma_2 = 5\ MPa, \quad \sigma_3 = -30\ MPa$$

Direção principal associada à tensão principal σ_1:

$$\begin{bmatrix} -80 & -40 & 0 \\ -40 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -65 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Considerando apenas as equações linearmente independentes teremos:

$$2n_{x1} + n_{y1} = 0$$
$$n_{z1} = 0$$

Logo:

(0,5 pto)

$$\vec{n}_1 = \frac{(-1,2,0)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, 2\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)_b$$

A direção principal associada à tensão principal σ_2 é obviamente:

$$\vec{n}_2 = (0,0,1)_b$$

Desta forma:

(0,5 pto)

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(2\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)_b$$

Seja o plano octaédrico de normal:

(0,5 pto)

$$\vec{n}_o = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3}{\|\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3\|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 3\frac{\sqrt{5}}{5}, 1\right)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)_b$$

Desta forma, o vetor tensão atuando neste plano octaédrico será:

(0,5 pto)

$$\{\vec{\rho}_o\}_b = [T]_b.\{\vec{n}_o\}_b = \begin{bmatrix} -10 & -40 & 0 \\ -40 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \sqrt{15}/15 \\ \sqrt{15}/5 \\ \sqrt{3}/3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26\sqrt{15}/3 \\ 22\sqrt{15}/3 \\ 5\sqrt{3}/3 \end{Bmatrix}$$

E a tensão normal atuante neste plano será:

$$\sigma_o = \vec{\rho}_o \cdot \vec{n}_o = -\frac{26}{3} + 22 + \frac{5}{3} = 15\ MPa$$

(0,5 pto)

Logo a tensão normal atuante no plano octaédrico será de 15 MPa.

Obs: Pode-se mostrar que a tensão normal atuante no plano octaédrico será sempre igual a:

$$\sigma_o = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3}$$

onde $I_1 = tr(T)$ é o primeiro invariante do tensor das tensões.

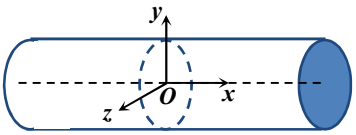
3ª Questão (3,5 pontos)

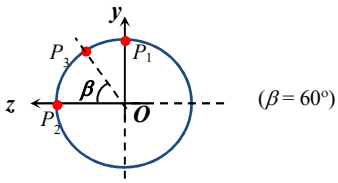
O vaso de pressão cilíndrico e fechado por tampos planos ilustrado na figura ao lado possui raio médio R = 200 mm e espessura t = 5 mm, estando submetido a uma pressão interna p = 2 MPa. A figura também ilustra três pontos, denominados P_1, P_2 e P_3, situados sobre a superfície externa do vaso e contidos no plano *Oyz* à meia distância entre os dois tampos. Pede-se:

a) Obter a matriz do tensor das tensões, na base $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z) = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ para os pontos indicados;

b) Desenhar os círculos de Mohr das tensões para o ponto P_3 e indicar as normais aos planos onde atua a maior tensão de cisalhamento neste ponto.

Obs: utilize sempre o <u>raio médio</u> para o cálculo das tensões nos pontos solicitados.





<u>Solução:</u>

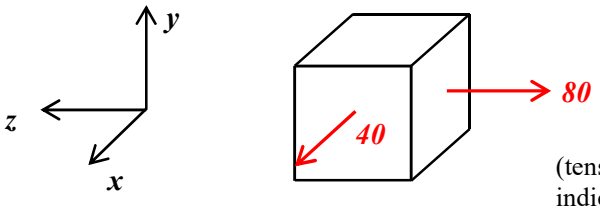
Determinamos, inicialmente, a tensão circunferencial e a tensão longitudinal atuantes no vaso:

(0,5 pto)

$$\sigma_c = \frac{pR}{t} = \frac{2\times200}{5} = 80\ MPa$$

$$\sigma_L = \frac{pR}{2t} = \frac{2\times200}{10} = 40\ MPa$$

Desta forma o estado tensional atuante no ponto P_1 fica:



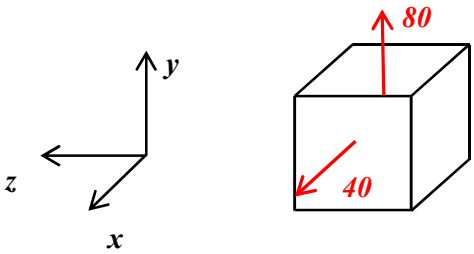
(tensões em MPa, indicadas apenas nas faces visíveis)

Logo, para o ponto P_1:

(0,5 pto)

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

Analogamente, o estado tensional no ponto P_2 fica:



(tensões em MPa, indicadas apenas nas faces visíveis)

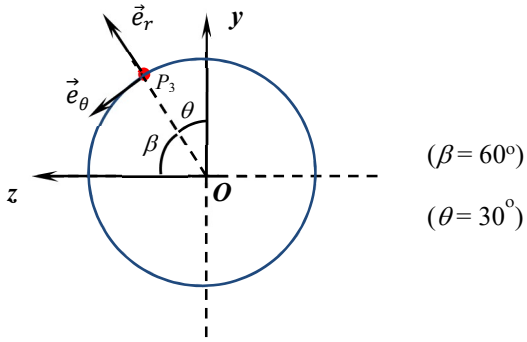
Logo, para o ponto P_2:

(0,5 pto)

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

Para o ponto P_3, é mais simples expressarmos (inicialmente) seu estado tensional numa base auxiliar dada por:

$b_1 = (\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$



O tensor das tensões para o ponto P_3 nesta base auxiliar b_1 será:

$$[T]_{b_1} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

Utilizando esta nova base, determinaremos o vetor tensão e suas componentes no plano de normal externa:

$$\vec{n} = \vec{e}_z = cos\beta . \vec{e}_r + sen\beta . \vec{e}_\theta = (0, cos\beta, sen\beta)_{b_1}$$

Assim:

$$\{\vec{\rho}\}_{b_1} = [T]_{b_1} . \{\vec{n}\}_{b_1} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} 0 \\ cos\beta \\ sen\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 sen\beta \end{Bmatrix}$$

A componente normal deste vetor tensão será a tensão normal σ_z procurada:

$$\sigma_z = \{\vec{\rho}\}_{b_1} \cdot \{\vec{n}\}_{b_1} = 80 sen^2\beta = 80 \times \frac{3}{4} = 60\ MPa$$

A componente cisalhante do mesmo vetor tensão será a tensão cisalhante τ_{zy} procurada:

$$\tau_{zy} = \{\vec{\rho}\}_{b_1} \cdot \{\vec{e}_y\}_{b_1}$$

Onde,

$$\{\vec{e}_y\}_{b_1} = sen\beta . \vec{e}_r - cos\beta . \vec{e}_\theta = (0, sen\beta, -cos\beta)_{b_1}$$

Logo:

$$\tau_{zy} = -80 . sen\beta . cos\beta = -80 \frac{\sqrt{3}}{4} = -20\sqrt{3}\ MPa$$

A tensão normal σ_y pode ser determinada pela propriedade de invariância do tensor das tensões:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_x + \sigma_r + \sigma_\theta$$

Logo:

$$\sigma_y + 60 = 80 \iff \sigma_y = 20\ MPa$$

Assim, o tensor das tensões no ponto P_3 na base inicial $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fica:

(1,0 pto)

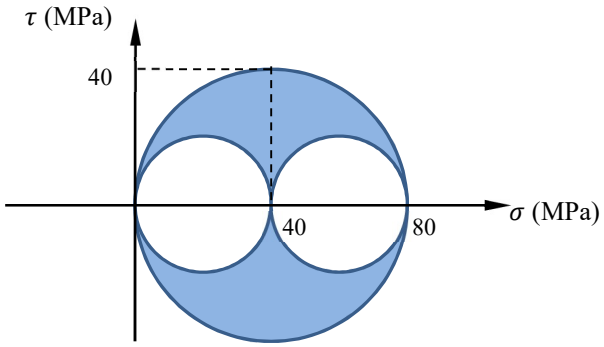
$$[T]_b = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -20\sqrt{3} \\ 0 & -20\sqrt{3} & 60 \end{bmatrix} \quad (MPa)$$

b) É imediato verificar que as tensões principais em P_3 são as mesmas que as dos pontos P_1 e P_2. Logo:

$$\sigma_1 = \sigma_\theta = 80\ MPa, \quad \sigma_2 = \sigma_x = 40\ MPa, \quad \sigma_3 = \sigma_r = 0$$

Logo, os círculos de Mohr das tensões para o ponto P_3 ficam:

(0,5 pto)



De onde podemos ver que:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 40\ MPa$$

Sendo que $\tau_{máx}$ atua nos planos de normais:

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{n}_1 + \vec{n}_3}{\|\vec{n}_1 + \vec{n}_3\|} = \frac{\vec{e}_\theta + \vec{e}_r}{\|\vec{e}_\theta + \vec{e}_r\|}$$

E

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{n}_1 - \vec{n}_3}{\|\vec{n}_1 - \vec{n}_3\|} = \frac{\vec{e}_\theta - \vec{e}_r}{\|\vec{e}_\theta - \vec{e}_r\|}$$

Mas,

$$\vec{e}_\theta = -sen\theta\vec{e}_y + cos\theta\vec{e}_z = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)_b$$

$$\vec{e}_r = cos\theta\vec{e}_y + sen\theta\vec{e}_z = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)_b$$

Logo:

(0,5 pto)

$$\vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)_b$$

$$\vec{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)_b$$