CÁLCULO II - 10 - DERIVADAS IMPLÍCITAS

Seja $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar, algumas superfícies S imersas no espaço tridimensional podem ser descritas implicitamente através de equações da forma:

$$F(\mathbf{x}) = 0,$$

ou seja, a superfície S é o seguinte conjunto:

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid F(\mathbf{x}) = 0 \}$$

Em alguns casos particulares é possível resolver a equação $F(\mathbf{x}) = 0$ para uma das variáveis em termos das outras duas, por exemplo eliminando z em função de x e y, i.e.,

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow z = f(x,y) \mid F(x,y,f(x,y)) = 0$$

<u>Exemplo 10.1</u>: " Podemos representar uma esfera de raio $r \in \mathbb{R}_+$ e centro em $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ através da equação:

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 = r^2, \qquad F(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 - r^2$$

ou seja, tal esfera é o conjunto

$$S = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|^2 = r^2, \; r \in \mathbb{R}_+, \; \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 \}$$

Neste caso, existem duas soluções da equação que define a esfera implicitamente,

$$z = f_+(x,y) = \tilde{z} + \sqrt{r^2 - (x-\tilde{x})^2 - (y-\tilde{y})^2}$$

$$z = f_-(x,y) = \tilde{z} - \sqrt{r^2 - (x-\tilde{x})^2 - (y-\tilde{y})^2}$$

uma descrevendo o hemisfério superior e a outra o inferior."

Contudo, nem sempre é factível encontrar uma solução explícita para z em termos de x e y, como no caso da esfera. Por exemplo, não existe nenhum método simples para resolver a equação

$$y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$$

para z.

O teorema que demonstraremos a seguir possibita inferir propriedades sobre as derivadas parciais $\partial_x f$ e $\partial_y f$ sem que tenhamos que obter uma expressão explícita para $f(x,y)$.

<u>Teorema 10.2</u>: " Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo escalar diferenciável e suponha que a equação

$$F(x) = 0$$

defina a coordenada x_n implicitamente como uma função diferenciável de x_i, $1 \leq i \leq n-1$, i.e.,

$$\exists\, f : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_{n-1}) \longmapsto x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$$

onde $\tilde{D}$ é algum aberto tal que $\tilde{D} \subset D$. Então,

$$\partial_i f = -\frac{\partial_i F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\partial_n F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$\forall\, \mathbb{x} \in D$ tal que $\partial_n F(\mathbb{x}) \neq 0$."

<u>Demonstração</u>:

Seja $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n) \in D$ um ponto tal que $F(\mathbb{x}) = 0$. Por hipótese $\exists\, f : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ tal que $x_n = f(\tilde{\mathbb{x}})$ onde introduzimos o vetor $\tilde{\mathbb{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \tilde{D} \subset D$. Introduzimos, a seguir uma função

$$g : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{\mathbb{x}} \longmapsto g(\tilde{\mathbb{x}}) = F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(\tilde{\mathbb{x}})).$$

Naturalmente,

$$g(\tilde{\mathbb{x}}) = F(\tilde{\mathbb{x}}; f(\tilde{\mathbb{x}})) = 0, \quad \forall\, \tilde{\mathbb{x}} \in \tilde{D}.$$

Logo,

$$\frac{\partial g(\tilde{x})}{\partial x_i} = 0 \,, \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{D} \,, \quad 1 \leq i \leq n-1 \,.$$

Por outro lado, podemos calcular as derivadas de g invocando a regra da cadeia. Por simplicidade, escrevemos:

$$g(\tilde{x}) = F\left(u_1(\tilde{x}), u_2(\tilde{x}), \dots, u_n(\tilde{x})\right)$$

onde: $u_i(\tilde{x}) = x_i \,, \; 1 \leq i \leq n-1$ e $u_n(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$.

Consequentemente,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \,, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Mas usando que

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \,, \quad 1 \leq i,j \leq n-1$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \,, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u_n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial u_j} \delta_{ij} + \frac{\partial F}{\partial u_n} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u_i} + \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Portanto,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_n}\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial u_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Finalmente, invocando a hipótese de que $\partial_n F = \dfrac{\partial F}{\partial u_n} \neq 0$,

concluímos que

$$\partial_i f(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\partial_i F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}))}{\partial_n F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}$$

$1 \leq i \leq n-1$.

■

<u>Exemplo 10.3</u>: " Seja $F: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$$

e suponha que a equação $F(x,y,z) = 0$ defina z implicitamente como uma função de x e y, i.e., $\exists f: \tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $z = f(x,y)$. Determine o valor da constante c tal que $f(0,e) = 2$, e calcule suas derivadas parciais no ponto $(0,e)$.

Solução: Para determinarmos a constante c notamos que:

$$f(0,e) = 2 \Leftrightarrow F(0,e,2) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^2 + 4 - e^2 - c = 0 \Leftrightarrow c = 4$$

Logo,

$$F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$$

Queremos então calcular as derivadas parciais de $f(x,y)$. Do teorema 10.2, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial_x F}{\partial_z F} = -\frac{z}{x + 2z - e^z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial_y F}{\partial_z F} = -\frac{2y}{x + 2z - e^z}$$

Fixando, $x = 0$, $y = e$, $z = 2$, concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{e^2 - 4} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2e}{e^2 - 4}$$

Uma possível generalização da situação que estudamos é quando temos, por exemplo, a representação implícita de uma curva γ dada pela interseção de duas superfícies, também representadas implicitamente. De uma forma mais concreta, sejam:

$$F : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad , \quad \text{diferenciáveis}$$

que determinam implicitamente duas superfícies através das equações:

$$F(x,y,z) = 0 \quad , \quad G(x,y,z) = 0$$

Se estas superfícies se interceptam ao longo de uma curva γ, podemos obter uma parametrização de γ ao resolvermos tais equações simultaneamente. Supondo que seja possível resolver tal sistema para x e y em função de z, i.e., que existam funções diferenciáveis

$$X : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad Y : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad \tilde{D} \subseteq D \text{ aberto}$$

tais que:

$$F(X(z), Y(z), z) = 0 \quad , \quad G(X(z), Y(z), z) = 0$$

obtemos uma parametrização da curva γ:

$$\gamma = \{ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{r}(t) = (X(t), Y(t), t) \ , \ \forall t \in \tilde{D} \}$$

O teorema que demonstraremos a seguir permite deduzir propriedades da curva γ, como seu vetor tangente, sem a necessidade de resolver explicitamente o sistema.

Definição 10.4: "Sejam $f_i : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ campos escalares diferenciáveis. Definimos o determinante Jacobiano como o determinante da matriz Jacobiana associada ao campo vetorial $\mathbb{F} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbb{F} = (f_1, \dots, f_n)$, i.e.

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det D\mathbb{F} = \det \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_n & \partial_2 f_n & \cdots & \partial_n f_n \end{bmatrix} ."$$

Teorema 10.5: "Sejam $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ campos escalares continuamente diferenciáveis no aberto D e suponha que o sistema de equações

$$F(x,y,z) = 0 , \quad G(x,y,z) = 0$$

defina implicitamente as coordenadas x e y como funções continuamente diferenciáveis de z, i.e.,

$$\exists\, X, Y : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R} , \quad z \longmapsto x = X(z) , \; y = Y(z) ,$$

onde $\tilde{D} \subseteq D$ é algum aberto. Então

$$X'(z) = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}} \quad , \quad Y'(z) = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

$\forall z \in \tilde{D}$ tal que $\partial(F,G)/\partial(x,y) \neq 0$."

<u>Demonstração</u>:

Por hipótese, $x = X(z)$ e $y = Y(z)$ são soluções do sistema

$F(x,y,z) = 0$, $G(x,y,z) = 0$, $\forall z \in \tilde{D}$. Logo,

$$F(X(z), Y(z), z) = 0 \quad , \quad G(X(z), Y(z), z) = 0 \quad , \quad \forall z \in \tilde{D}.$$

Podemos calcular as derivadas $X'(z)$ e $Y'(z)$ a partir da regra da cadeia ao introduzirmos as seguintes funções auxiliares:

$$f(z) := F(X(z), Y(z), z) \quad ; \quad g(z) := G(X(z), Y(z), z)$$

cujas derivadas se anulam identicamente $\forall z \in \tilde{D}$. Logo,

$$0 = \partial_z f(z) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= \partial_1 F \; X'(z) + \partial_2 F \; Y'(z) + \partial_3 F$$

Similarmente,

$$0 = \partial_1 G\, X'(z) + \partial_2 G\, Y'(z) + \partial_3 G.$$

Portanto, para determinarmos $X'(z)$ e $Y'(z)$ precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} \partial_1 F\, X'(z) + \partial_2 F\, Y'(z) = -\partial_3 F \\ \partial_1 G\, X'(z) + \partial_2 F\, Y'(z) = -\partial_3 G \end{cases}$$

Como por hipótese: $\det \begin{bmatrix} \partial_1 F & \partial_2 F \\ \partial_1 G & \partial_2 G \end{bmatrix} = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \neq 0$, $\forall z \in \mathring{D}$

existe uma única solução do sistema acima, que é dada pela regra de Cramer

$$X'(z) = -\frac{\det \begin{bmatrix} \partial_3 F & \partial_2 F \\ \partial_3 G & \partial_2 G \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \partial_1 F & \partial_2 F \\ \partial_1 G & \partial_2 G \end{bmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

$$Y'(z) = -\frac{\det \begin{bmatrix} \partial_1 F & \partial_3 F \\ \partial_1 G & \partial_3 G \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} \partial_1 F & \partial_2 F \\ \partial_1 G & \partial_2 G \end{bmatrix}} = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}$$

$\blacksquare$

O teorema 10.5 pode ser generalizado para situações nas quais temos m equações em n variáveis, com $m < n$. Neste caso resolvemos o sistema em questão para as primeiras m variáveis em função das $(n-m)$ variáveis remanescentes. As derivadas parciais das funções assim definidas podem similarmente ser escritas como quocientes de determinantes Jacobianos.

Exercício 10.6: "Enuncie e demonstre um teorema que generaliza o resultado do teorema 10.5 para o sistema $F(x) = 0$, $G(x) = 0$, onde $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$."

Exemplo 10.7: "Sejam $Y, Z : \tilde{D} \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$ implicitamente definidas pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}, \quad z > 0$$

Determine as derivadas $Y'(x)$ e $Z'(x)$.

Solução: As funções dadas são definidas implicitamente como soluções do sistema:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

onde $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$, são definidas pelas relações:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \\ G(x,y,z) = x + y - 2 \end{cases}$$

O teorema 10.5 nos diz que se tais funções $y(x)$, $z(x)$ existirem suas derivadas são dadas por (shift cíclico $x \to y \to z \to x$)

$$y'(x) = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad , \quad z'(x) = \frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}$$

se $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$.

Calculemos os determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \det\begin{bmatrix} \partial_y F & \partial_z F \\ \partial_y G & \partial_z G \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2y & -2z \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2z$$

Logo, $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} \neq 0$, $\forall x \in D \mid z \neq 0$. Como:

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \det\begin{bmatrix} \partial_z F & \partial_x F \\ \partial_z G & \partial_x G \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -2z & 2x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -2z$$

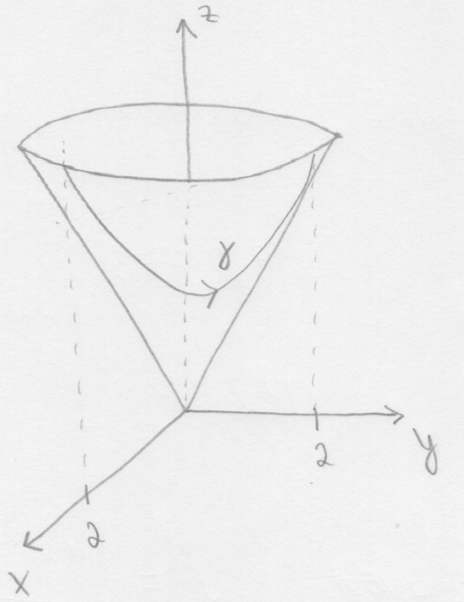
$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \det\begin{bmatrix} \partial_x F & \partial_y F \\ \partial_x G & \partial_y F \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2x - 2y$$

Conseqüentemente,

$$y'(x) = -\frac{2z}{2z} = -1 \quad , \quad z'(x) = \frac{2x-2y}{2z} = \frac{x-y}{z} \text{ .''}$$

É importante notar que no <u>exemplo 10.7</u> o sistema define implicitamente uma curva γ como a interseção do cone $x^2+y^2-z^2=0$, $z>0$ com o plano $x+y-2=0$ através da parametrização

$$\mathbb{r}(t) = (t, y(t), z(t)) , \; t \in \tilde{D}$$



Claramente, não é qualquer sistema de equações que admite representarmos sua solução como um campo escalar diferenciável de forma a tornar aplicáveis os resultados dos teoremas 10.2 e 10.5.

Existe um resultado conhecido como teorema da função implícita que determina condições suficientes para que tal solução exista. Por simplicidade, vamos nos ater ao caso onde consideramos um campo escalar bidimensional.

Teorema 10.8 " Seja $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}$, para algum aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e considere um ponto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in D$ tal que $F(\mathbf{x}_0) = 0$. Se $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, então existem intervalos abertos $I, J \subseteq \mathbb{R}$ tais que $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ e para cada $x \in I$ existe um único $y = g(x) \in J$ com $F(x, g(x)) = 0$. A função $g : I \longrightarrow J$ é diferenciável e satisfaz

$$g'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, g(x))}{\partial_2 F(x, g(x))} \; ."$$

Demonstração: Vamos dividir a demonstração em três partes:

(i) Existência e unicidade de g; (ii) continuidade de g; (iii)

(iii) diferenciabilidade de g.

Antes de atacarmos a parte (i), notamos que podemos supor sem perda de generalidade que $\partial_y F(x_0,y_0) > 0$, pois caso tal não fosse verdade bastaria considerarmos o oposto de F.

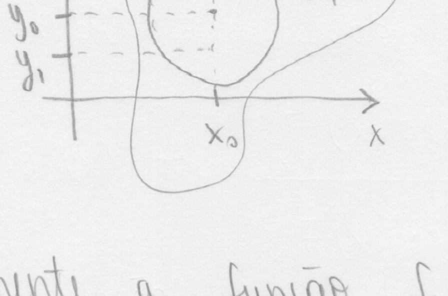
(i) Existência e unicidade:

Por hipótese F é de classe $\mathcal{C}^1$, logo, $\partial_y F$ é contínua. Como $\partial_y F(x_0,y_0) > 0$, a continuidade da derivada garante a existência de uma bola aberta $B(\mathbb{x}_0, r) \subset D$, $r > 0$, na qual

$$\partial_y F(\mathbb{x}) > 0 \quad , \quad \forall \mathbb{x} \in B(\mathbb{x}_0, r).$$

Sejam então $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$y_1 < y_0 < y_2 \quad \text{com} \quad (x_0,y_1), (x_0 y_2) \in B(\mathbb{x}_0, r).$$



Naturalmente a função $f_0 : [y_1, y_2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f_0(y) = F(x_0, y)$ é estritamente crescente em $[y_1, y_2]$, pois

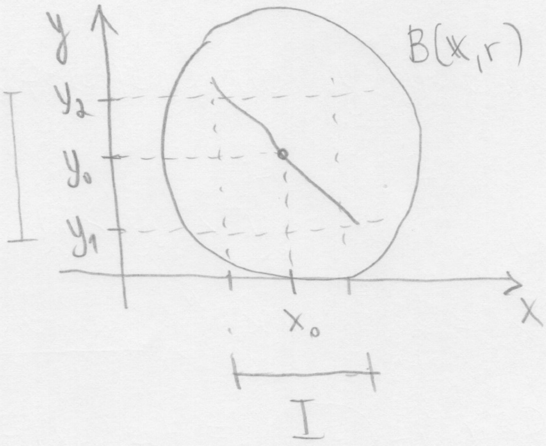
$$f_0'(y) = \partial_y F(x_0, y) > 0 \quad , \quad \forall y \in [y_1, y_2].$$

Agora, como $F(x_0, y_0) = f(y_0) = 0$, podemos concluir que

$$F(x_0, y_1) = f_0(y_1) < 0 \quad \text{e} \quad F(x_0, y_2) = f_0(y_2) > 0$$

Por outro lado, o fato de $f(y)$ ser estritamente crescente em $J = (y_1, y_2)$ implica que $y_0 = g(x_0)$ é o único número em J tal que $F(x_0, y_0) = 0$.

Invocando a continuidade de F, garantimos a existência de um intervalo aberto I centrado em x_0 tal que $(x, y_1), (x, y_2) \in B(x_0, r)$ com $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$, $\forall x \in I$.



A função: $f : [y_1, y_2] \to \mathbb{R}^2$, definida por $f(y) = F(x, y)$ para algum $x \in I$ fixo é estritamente crescente, pois

$$f'(y) = \partial_y F(x, y) > 0,$$

e satisfaz $F(x, y_1) < 0$ e $F(x, y_2) > 0$. Logo, pelo <u>teorema do</u>

valor intermediário existe um único $y = g(x) \in (y_1, y_2)$ tal que

$F(x, g(x)) = 0$.

Portanto, construímos a função $g: I \to J$ definida implicitamente pela equação $F(x,y) = 0$.

(ii) Continuidade: Sejam $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ tais que $y_1 < \tilde{y}_1 < y_0 < \tilde{y}_2 < y_2$, procedendo como anteriormente, deduzimos que existe um intervalo $\tilde{I}_0 \subset I$ tal que $x_0 \in \tilde{I}_0$ e $g(x) \in (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, $\forall x \in \tilde{I}_0$, ou seja, para toda bola aberta centrada em $y_0 = g(x_0)$, i.e., $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$, existe uma bola aberta centrada em x_0, i.e., $\tilde{I}_0$, demonstrando que $g(x)$ é contínua em x_0.

Agora como, $\forall x \in I$, $\exists!\ J \ni y = g(x)$ tal que $F(x,y) = 0$, basta proceder como acima para demonstrar que g é contínua em I.

(iii) Diferenciabilidade: Seja $x \in I$ e considere $h \in \mathbb{R}$ pequeno o suficiente para que $(x+h) \in I$. Claramente,

$$F(x, g(x)) = 0 \quad e \quad F(x+h, g(x+h)) = 0$$

Logo, podemos aplicar o teorema do valor médio para escrever

$$0 = F(x+h, g(x+h)) - F(x, g(x)) = \nabla F(\bar{x}, \bar{y}) \cdot (h, g(x+h) - g(x))$$

$$= h\, \partial_1 F(\bar{x}, \bar{y}) + [g(x+h) - g(x)]\, \partial_2 F(\bar{x}, \bar{y})$$

Como $\partial_1 F$ e $\partial_2 F$ são contínuas e $\partial_2 F(x) \neq 0$, $\forall x \in B(x_0, r)$, podemos invocar a continuidade de g, que garante que $(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{h \to 0} (x, g(x))$, para escrever

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{\partial_1 F(\bar{x}, \bar{y})}{\partial_2 F(\bar{x}, \bar{y})}$$

$$\Rightarrow \quad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = -\frac{\partial_1 F(x, g(x))}{\partial_2 F(x, g(x))}.$$

$\blacksquare$