

## CAPÍTULO 5. A CINEMÁTICA E A DINÂMICA DA TURBULÊNCIA A PARTIR DA APROXIMAÇÃO ESTATÍSTICA UTILIZANDO-SE AS EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS

### 5.1. Mecanismo da Turbulência

- Como analisar as equações do movimento em Mecânica dos Fluidos, levando em conta a turbulência como um processo aleatório?
- Como se mantém a energia cinética da turbulência?
- Como é o processo de produção, dissipação e transporte de turbulência?
- Quais são os parâmetros estatísticos importantes a serem determinados em um processo turbulento?
- Porque a vorticidade e o fenômeno de esticamento de vórtices (*vortex stretching process*) são importantes no processo de geração de turbulência?

Estas são perguntas importantes, procurando respondê-las ao longo desse capítulo.

Através da turbulência extrai-se energia do escoamento médio nas grandes escalas. De acordo com a teoria de Kolmogorov, conforme descrita no capítulo anterior, a turbulência é transferida em um processo de cascata as menores escalas, onde ocorre a dissipação de energia, o que leva a questão de transferência de energia das maiores para as menores escalas.

A interpretação de todo este processo, a partir das equações do movimento aplicadas à sinais aleatórios é o que será feito a seguir.

### 5.2. Aproximação Estatística da Turbulência

Em Mecânica dos Fluidos, um sinal aleatório (ou randômico) medido em um escoamento qualquer, pode ser representado pela superposição de dois movimentos: um movimento médio e um movimento flutuante em torno da média. Considerando-se valores de velocidade e pressão medidos instantaneamente em um escoamento turbulento qualquer, tem-se que:

$$\vec{V} = \vec{u}i + \vec{v}j + \vec{w}k \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= U + u \\
 \tilde{v} &= V + v \\
 \text{sendo: } \tilde{w} &= W + w \\
 \tilde{p} &= P + p
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

Em notação tensorial, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_i &= U_i + u_i \\
 \tilde{p} &= P + p
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

A figura abaixo mostra a representação gráfica desse processo de superposição de movimentos.

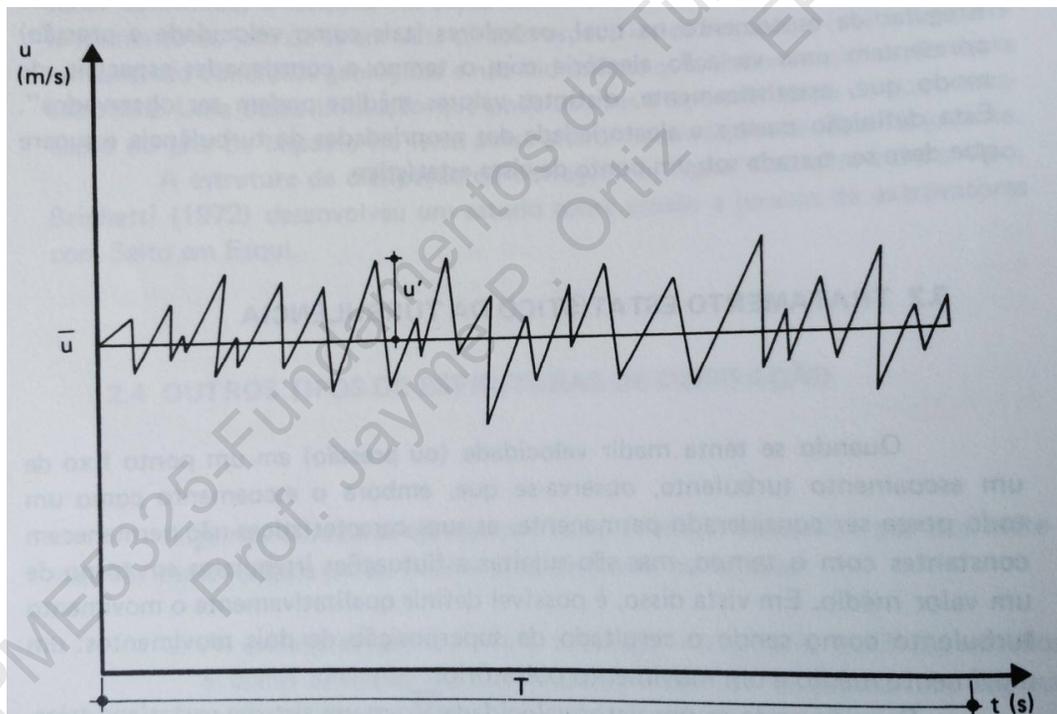


Figura 5.1. Representação esquemática de um sinal aleatório estacionário.

Define-se a média temporal de um sinal aleatório de velocidade pelas relações abaixo:

$$U_i = \lim \frac{1}{T} \int_0^t \tilde{u}(t) dt$$

$$\bar{u}_i = \lim \frac{1}{T} \int_0^t (\tilde{u}(t) - U) dt = 0$$
(5.4)

Na *figura 5.1* o sinal aleatório é estacionário, e nesse caso a média temporal pode ser dada por:

$$U_i = \frac{1}{T} \int_0^t \tilde{u}(t) dt$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_0^t (\tilde{u}(t) - U) dt = 0$$
(5.5)

sendo T um intervalo de registro do sinal, suficientemente longo, e determinado para cada condição experimental.

A *figura 5.2* mostra a determinação experimental do valor de T feita por *Ortiz (1982)* quando da medição da turbulência residual, a jusante de estruturas de dissipação por ressalto hidráulico. O instrumento utilizado foi um micromolinetete de 11 mm de diâmetro, de baixa resposta em frequência, mas que atendia as condições de medição em ressalto hidráulico, resultando para a aquisição de dados T = 500 s.

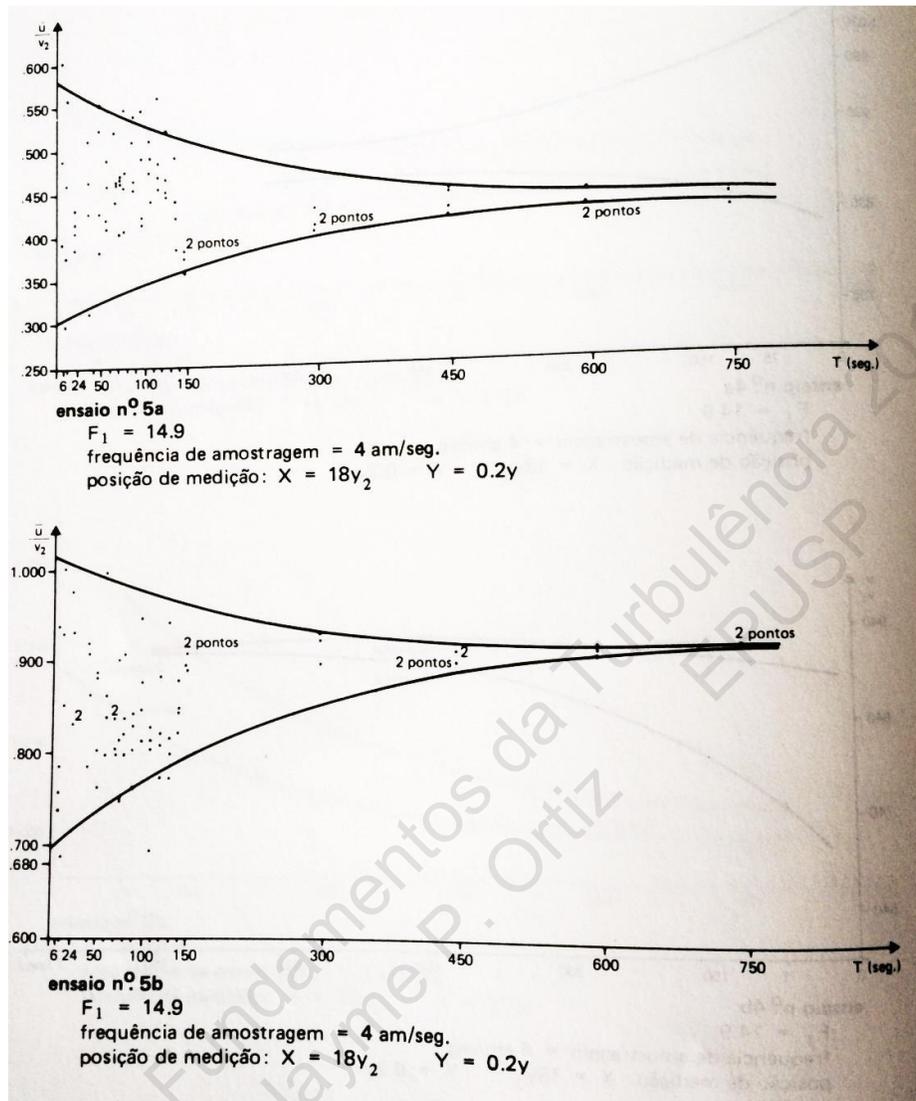


Figura 5.2. Determinação do tempo de registro ( $T$ ) de sinal instantâneo de velocidade a jusante de estruturas de dissipação por ressalto hidráulico (Fonte: ORTIZ, 1982).

Sob o ponto de vista estatístico, poderíamos representar a média estatística a partir da figura seguinte:

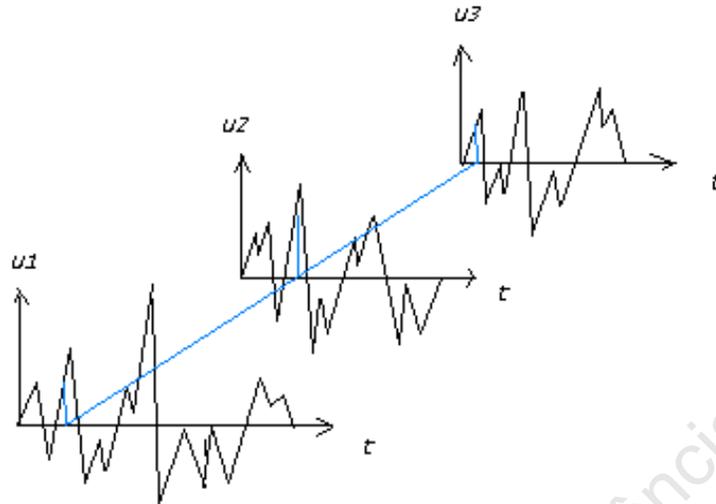


Figura 5.3. Representação esquemática de diversas amostras de sinais aleatórios de velocidade

A média estatística das flutuações de velocidade, neste caso, é dada por:

$$E[u(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_k(t) \quad (5.4)$$

Sendo o processo estocástico estacionário, o valor da média estatística não varia com o tempo, e sendo assim:

$$E[u(t)] = E[u] \quad (5.5)$$

Se o processo estocástico é estacionário, com a média temporal não variando de amostra para amostra, tem-se que a média temporal é igual à média estatística:

$$E[u_i] = U_i \quad (5.6)$$

Pode-se concluir, portanto, nesse caso, que uma única amostra representa o Universo e o processo é denominado de “*Processo Estocástico Estacionário e Ergódico – PEEE*” Nos escoamentos turbulentos incompressíveis adota-se, via de regra, a condição de *PEEE*.

### 5.3. A Equação da Continuidade

Admitindo-se escoamento permanente de fluido incompressível a equação da continuidade pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.7)$$

onde  $\tilde{u}_i$  representa o valor instantâneo da velocidade, usando-se notação tensorial.

Tirando-se a média da equação (5.7), e considerando-se a decomposição do movimento turbulento em dois movimentos (médio e flutuante em torno da média), resulta:

$$\overline{\frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_i}} = 0$$

Aplicando-se as regras da notação tensorial, resulta:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

O que implica que:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equação da continuidade para o escoamento médio} \quad (5.8)$$

Subtraindo a equação (5.8) da equação (5.7), resulta:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{equação da continuidade para as flutuações turbulentas} \quad (5.9)$$

#### 5.4. Equação da Quantidade de Movimento ou Equação de Reynolds

O campo de velocidades e pressões instantâneas para um escoamento incompressível e permanente pode ser representado pela equação de Navier-Stokes, usando-se notação tensorial, conforme escrito abaixo:

$$\tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j^2} \quad (5.10)$$

Multiplicando-se esta equação pela massa específica e tirando-se a média, tem-se que:

$$\overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = -\overline{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}} + \overline{\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}} \quad (5.11)$$

Analisando-se separadamente os termos desta equação, tem-se que:

$$\overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \overline{\rho(U_j + u_j) \frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_j}}$$

Pela propriedade do cálculo tensorial mencionada abaixo:

$$\overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = \overline{U_i U_j + u_i u_j}$$

Pode-se escrever a equação anterior como:

$$\overline{\rho \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \rho \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (5.12)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} \overline{\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}} &= \overline{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j}} = \overline{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_j}} = \overline{\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial(U_i + u_i)}{\partial x_j}} \\ \overline{\mu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}} &= \overline{\mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j}} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Finalmente:

$$\overline{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial(P + p)}{\partial x_i}} = \overline{\frac{\partial P}{\partial x_i}} \quad (5.14)$$

Substituindo-se as equações (5.12), (5.13) e (5.14) na equação (5.11), resulta:

$$\rho \left( U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (5.15)$$

ou, alternativamente:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 U_i \quad (5.16)$$

**I      II      III      IV**

**Termo I** → termo de aceleração convectiva do movimento médio;

**Termo II** → termo de aceleração convectiva das flutuações turbulentas;

**Termo III** → termo de pressão do escoamento médio;

**Termo IV** → termo de viscosidade do escoamento médio.

Usando-se regra de derivação, tem-se que:

$$\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Portanto:

$$\overline{\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}} = u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (5.17)$$

Substituindo a equação (5.17) na equação (5.15) e rearranjando os termos da equação, resulta:

$$\rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \overline{\rho u_i u_j} \right) \quad (5.18)$$

I
II
III
IV

A equação (5.18) corresponde à equação da quantidade de movimento obtida a partir da análise estatística, equação essa também conhecida por equação de Reynolds. O significado físico de cada termo desta equação está dado abaixo:

**Termo I** → termo de convecção de quantidade de movimento pelo escoamento médio;

**Termo II** → termo de gradiente de pressão do escoamento médio;

**Termo III** → termo de variação do escoamento médio pelas tensões viscosas;

**Termo IV** → termo de variação média das flutuações turbulentas.

Verifica-se, portanto, pela análise dos **termos III e IV**, o seguinte:

$$\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rightarrow \text{tensões viscosas, de acordo com a Lei de Newton da viscosidade}$$

(ver equação 2.17).

$$\overline{\rho u_i u_j} \rightarrow \text{tensões turbulentas, ou as chamadas Tensões de Reynolds, e que}$$

se traduzem em um tensor simétrico de segunda ordem.

Portanto a análise da equação da quantidade de movimento aplicada a um escoamento turbulento, permanente e incompressível, usando-se a aproximação estatística, leva ao aparecimento das tensões de Reynolds, com seis novos termos adicionais, o que implica na impossibilidade do fechamento do sistema clássico de

equações (equação de Navier- Stokes em três direções e equação da continuidade), recaindo-se assim no chamado “*closure problem*” mencionado na literatura. A partir desse ponto surgem os chamados modelos de turbulência que tem o objetivo de fornecer equações auxiliares que permitam calcular as tensões de Reynolds.

Os primeiros modelos de turbulência surgiram a partir dos trabalhos de Boussinesq em torno de 1870, aplicados a escoamentos em canais, quando foi proposta uma relação entre as tensões cisalhantes e a taxa de deformação de um escoamento médio unidimensional. Prandtl em 1925 incorporou essas idéias introduzindo o conceito de comprimento de mistura para definir a viscosidade turbulenta como:

$$\nu_t = l_m u = l_m l_m \left| \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right| \quad (5.19)$$

sendo:  $l_m \rightarrow$  o comprimento de mistura em que ocorre a troca de quantidade de movimento, estabelecendo-se uma analogia com o movimento livre molecular da teoria cinética dos gases;

$u \rightarrow$  a escala de velocidade.

Admite-se, portanto, nesses modelos simplificados, que as tensões turbulentas poderiam ser obtidas a partir da seguinte equação:

$$\tau_{turb} = \mu_t \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (5.20)$$

equação essa, que procura estabelecer uma analogia entre o movimento molecular e o movimento turbulento, o que muitas vezes tem sido criticado pela literatura (*ver BRADSHAW, 1990*), onde  $\mu_t$  representa a viscosidade turbulenta (*eddy viscosity*) que, conforme já discutido, é uma propriedade física do escoamento e não do fluido.

Mais precisamente, poderíamos estabelecer essa analogia, utilizando-se a Hipótese de Boussinesq apresentada abaixo, que relaciona tensões com taxas de deformações, conforme discutido no capítulo 2:

$$\tau_{turb} = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad (5.21)$$

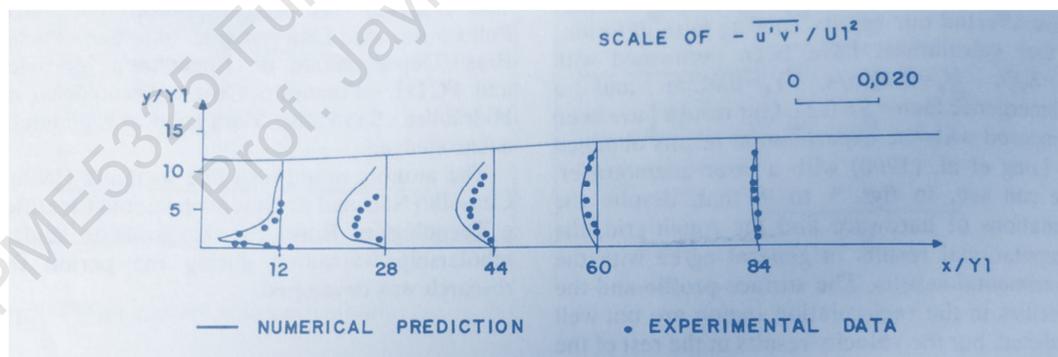
sendo:  $\delta_{ij} \rightarrow$  delta de Kronecker que vale 1 para  $i=j$  e zero para  $i \neq j$ ;

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} = \frac{1}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) \rightarrow \text{energia cinética das flutuações turbulentas.}$$

A determinação experimental das tensões de Reynolds é uma das chaves do conhecimento do processo de transferência de quantidade de movimento e conseqüentemente do processo de turbulência. A falta de correlação entre as flutuações de velocidade em duas direções indica, por exemplo, um movimento unidimensional, que não caracteriza processo de transferência de quantidade de movimento ou formação de turbulência. Por outro lado, os turbilhões, para manterem sua energia, necessitam das tensões de deformação, sugerindo altos valores de correlação entre as flutuações de velocidade.

Uma discussão mais detalhada dos diversos modelos de turbulência apresentados na literatura foge ao escopo dessa publicação.

A *figura 5.4* foi extraída de Saltara & Ortiz (1994) e mostra os resultados de tensões de Reynolds normalizados com a velocidade na entrada do ressalto, a jusante de um ressalto hidráulico afogado. Os valores plotados correspondem a valores experimentais medidos com sistema *LDA* comparados com valores obtidos através de simulação numérica. Observa-se que as tensões de Reynolds são muito mais significativas junto ao fundo, na região crítica do ressalto ( $x/Y_1=12$ ), mostrando o escoamento de retorno do perfil de velocidades, tensões essas que diminuem bastante a jusante e tendem a zero na saída do ressalto hidráulico ( $x/Y_1=84$ ), o que caracteriza intensa turbulência no interior do ressalto que tende a se dissipar a jusante.



*Figura 5.4. Representação das tensões de Reynolds ao longo de um ressalto hidráulico afogado com  $Fr_1=8,19$  (Fonte: SALTARA e ORTIZ, 1994).*

A *figura 5.5* mostra o comportamento anisotrópico das flutuações de velocidade junto à parede em um escoamento turbulento, podendo-se observar a tendência à isotropia, ao afastar-se da parede.

A figura 5.6 extraída de Vilalta e Ortiz (2000) mostra o comportamento das tensões de Reynolds junto à parede de um canal utilizando-se água e solução polimérica (polímero Iqapol de baixo peso molecular e polímero Iqapac de alto peso molecular). Observa-se que ocorre um amortecimento das tensões de Reynolds junto à parede quando da injeção de qualquer dos polímeros e essa tendência é mais significativa com o incremento da concentração. Portanto os efeitos das tensões viscosas passam a ser sentidos em posições mais afastadas da parede, com a indução de efeitos anisotrópicos nas componentes  $u$  e  $v$ , verificando-se uma perda de correlação entre as mesmas e, em conseqüência, uma diminuição dos processos de transferência de energia.

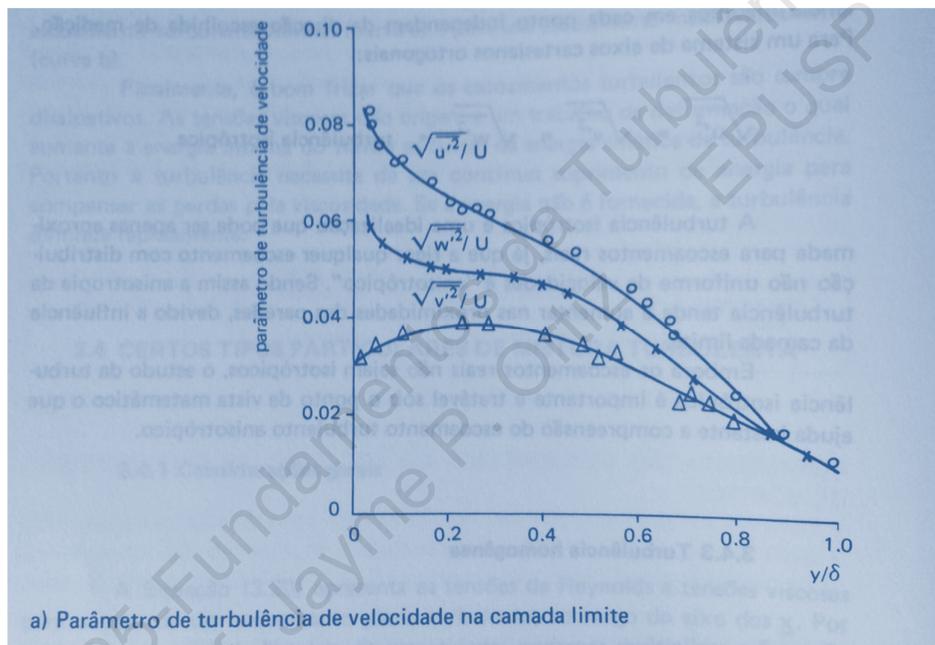


Figura 5.5. Flutuações de velocidade junto à parede de um escoamento turbulento.

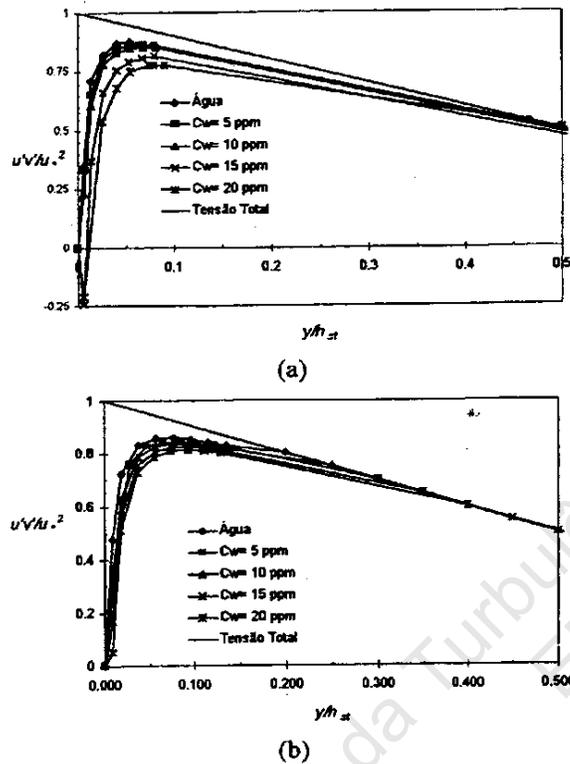


Figura 5.6 .Perfis de tensões de Reynolds para escoamento de água pura e de solução polimérica em canal com  $Re_0 = 8 \times 10^3$  e  $Re_1 = 1,2 \times 10^4$ , respectivamente (Fonte: VILALTA e ORTIZ, 2000).

### 5.5. Equação da Energia Cinética do Escoamento Médio

No item anterior deduziu-se a equação de Reynolds da quantidade de movimento, representada pela equação 5.18, considerando escoamento permanente de fluido incompressível e admitindo força de campo desprezível. Essa equação também pode ser escrita na seguinte forma:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-P + \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j}) \quad (5.18a)$$

ou, utilizando-se a propriedade de simetria de tensores e a definição de tensor simétrico de deformação:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-P \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \overline{\rho u_i u_j}) \quad (5.22)$$

Utilizando a nomenclatura de Tennekes & Lumley (1972):

$$T_{ij} = -P + \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \quad (5.23)$$

Portanto:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad (5.24)$$

$T_{ij}$  → tensões médias totais no escoamento turbulento.

Multiplicando a equação (5.24) por  $U_i$ , resulta em energia cinética por unidade de massa:

$$U_i U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = U_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} \quad (5.25)$$

Mas, pela regra de cadeia de derivação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left( U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) = U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i T_{ij}}{\rho} \right) &= U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{T_{ij}}{\rho} \right) + \frac{T_{ij}}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i T_{ij}}{\rho} \right) - \frac{T_{ij}}{\rho} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{T_{ij}}{\rho} \right) = U_i U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note que:

$$\begin{aligned} T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= T_{ji} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} T_{ji} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} T_{ij} \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \\ T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= T_{ij} S_{ij} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Substituindo a equação 5.27 na equação 5.26, resulta:

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i T_{ij}}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} T_{ij} S_{ij} \quad (5.28)$$

ou, alternativamente:

$$\rho U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i T_{ij}) - T_{ij} S_{ij} \quad (5.29)$$

I            II            III

A equação 5.29 corresponde a Equação da Energia do Escoamento Médio, sendo:

**Termo II** → transporte de energia do escoamento médio, pelas tensões médias totais do escoamento turbulento.

**Termo III** → trabalho de deformação do escoamento médio pelas tensões médias totais do escoamento turbulento.

**Termo I** → variação da energia de turbulência do escoamento médio, por unidade de volume.

A distinção entre a transferência espacial de energia e o trabalho de deformação é crucial para o entendimento da dinâmica da turbulência.

Utilizando-se os conceitos das equações 5.22 e 5.23, resulta:

$$T_{ij}S_{ij} = [-P\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \overline{\rho u_i u_j}]S_{ij} \quad (5.30)$$

Portanto:

$$T_{ij}S_{ij} = 2\mu S_{ij}S_{ij} - \overline{\rho u_i u_j}S_{ij} \quad (5.31)$$

**I      II**

onde:

$$P\delta_{ij}S_{ij} = P\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right) = 0$$

representa a contribuição nula da pressão para o trabalho de deformação em um fluido incompressível.

Na equação 5.31:

$termoI = 2\mu S_{ij}S_{ij}$  → representa a contribuição das tensões viscosas ao trabalho de deformação, o que significa uma dissipação viscosa. Portanto a dissipação está relacionada a uma taxa de deformação.

$termoII = -\overline{\rho u_i u_j}S_{ij}$  → representa a contribuição das tensões de Reynolds ao trabalho de deformação (produção de energia turbulenta).

A substituição da equação 5.30 na equação 5.29, resulta:

$$\rho U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{U_i U_i}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -P U_i + 2\mu U_i S_{ij} - \overline{\rho u_i u_j} U_i \right) - 2\mu S_{ij} S_{ij} + \overline{\rho u_i u_j} S_{ij} \quad (5.32)$$

**I                  II                  III                  IV                  V**

onde:

**Termo I** → associado ao transporte (ou distribuição) de pressão do escoamento médio;

**Termo II** → associado ao transporte de energia do escoamento médio pelas tensões viscosas;

**Termo III** → associado ao transporte de energia do escoamento médio pelas tensões de Reynolds;

**Termo IV** → associado à dissipação viscosa direta do escoamento médio;

**Termo V** → associado à produção de turbulência do escoamento médio.

Em termos de ordem de grandeza, tem-se o seguinte, para os termos da equação 5.32:

$$\begin{aligned} \overline{u_i u_j} &\approx u^2 \\ S_{ij} &\approx \frac{u}{l} \end{aligned} \rightarrow \text{relações que são válidas se a turbulência é caracterizada somente pelas escalas } u \text{ e } l.$$

Sendo assim:

$$\text{TermoV} = \rho \overline{u_i u_j} S_{ij} \approx \rho u^2 S_{ij} \approx \rho u l S_{ij} S_{ij} = TP \rightarrow \text{termo de produção de turbulência.}$$

$$\text{TermoIII} = \rho \overline{u_i u_j} U_i \approx \rho u^2 U_i \approx \rho u l U_i S_{ij} = TET \rightarrow \text{termo de transporte de energia do escoamento médio pelas tensões de Reynolds.}$$

$$\text{TermoIV} = 2 \mu S_{ij} S_{ij} = TD \rightarrow \text{termo dissipativo.}$$

$$\text{TermoII} = 2 \mu U_i S_{ij} \approx TEV \rightarrow \text{termo de transporte de energia do escoamento médio pelas tensões viscosas.}$$

$$\frac{TP}{TD} \approx \frac{\rho u l S_{ij} S_{ij}}{2 \mu S_{ij} S_{ij}} \approx \frac{ul}{\nu} = Re$$

No escoamento turbulento o número de Reynolds é alto e, portanto,  $TP \gg TD$  e sendo assim a produção de turbulência, a partir do escoamento médio, é muito superior a dissipação viscosa direta a partir das maiores escalas.

$$\frac{TET}{TEV} \approx \frac{\rho u l U_i S_{ij}}{2\mu U_i S_{ij}} \approx \frac{ul}{\nu} = \text{Re}$$

Portanto os termos de transporte de energia do escoamento médio pelas tensões turbulentas e o termo de produção de turbulência são importantes mecanismos na taxa de variação ou mudança de energia cinética média.

Embora a equação da energia do escoamento médio (equação 5.32) auxilie na interpretação da dinâmica do movimento turbulento, ela não contém mais informação que a equação da quantidade de movimento, já que foi obtida a partir dessa, por mera manipulação.

### 5.6. Equação da Energia Cinética da Turbulência

A equação que governa a energia cinética das flutuações turbulentas é obtida multiplicando a equação de Navier-Stokes para valores instantâneos por  $\tilde{u}_i$ , tomando-se a média de todos os termos e subtraindo-se a equação que governa a energia cinética do escoamento médio (equação anterior). Portanto, resulta:

$$\rho U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \text{I} - \overline{p u_j} - 2\overline{\mu u_i s_{ij}} + \frac{1}{2} \overline{\rho u_i u_i u_j} \right) - 2\overline{\mu s_{ij} s_{ij}} - \overline{\rho u_i u_j} S_{ij} \quad (5.33)$$

**I      II      III                  IV      V**

**Termo I** → trabalho devido ao gradiente de flutuações de pressão;

**Termo II** → transporte de energia pelas tensões viscosas;

**Termo III** → transporte de energia pelas flutuações turbulentas de velocidade;

**Termo IV** → termo de dissipação viscosa das flutuações turbulentas;

**Termo V** → termo de produção de turbulência.

Os termos **I, II e III** estão associados a termos de transporte e representam a energia que entra ou sai do volume de controle. Estes termos, simplesmente redistribuem a energia de um ponto para outro do escoamento.

Os termos **IV e V** estão associados a termos de deformação do escoamento. Observa-se que o termo de produção de turbulência na equação 5.32 tem sinal positivo e

na equação 5.33 tem sinal negativo, o que corresponde à transferência de energia cinética do escoamento médio para a turbulência e vice-versa (cascata invertida). O termo de dissipação na equação 5.32 é desprezível comparado com o termo de dissipação da equação 5.33, onde a dissipação é a partir das menores escalas.

Admitindo-se em primeira aproximação produção da ordem da dissipação da energia, podemos estabelecer uma ordem de grandeza para os termos da equação 5.33:

$$P = \overline{\rho u_i u_j S_{ij}} \approx \overline{\mu s_{ij} s_{ij}}$$

$$\rho u^2 S_{ij} \approx \mu s_{ij} s_{ij}$$

$$\frac{\rho}{\mu} u l S_{ij} S_{ij} \approx s_{ij} s_{ij}$$

$$\frac{s_{ij} s_{ij}}{S_{ij} S_{ij}} \approx \text{Re}$$

Para altos valores de  $\text{Re} \Rightarrow s_{ij} s_{ij} \gg S_{ij} S_{ij}$  o que significa que a taxa de deformação das flutuações turbulentas é muito mais rápida que a taxa de deformação do escoamento médio, o que justifica a independência estatística entre as menores escalas (isotropia) e as maiores escalas, cujos movimentos não são comandados pela mesma faixa de frequência. Sendo assim, as pequenas escalas de turbulência tendem a ser independentes dos efeitos de orientações introduzidos pelas tensões médias de deformação, o que explica a isotropia nas pequenas escalas (isotropia local).

### 5.7. Equação da Vorticidade

No capítulo 2 a equação da vorticidade, na forma tensorial, foi apresentada da seguinte maneira:

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} \quad (2.35)$$

Por essa equação percebe-se que a vorticidade de um elemento fluido pode ser modificada seja pelo *stretching* do elemento, seja pelas tensões viscosas.

Adotando-se a decomposição de Reynolds para a vorticidade, tem-se:

$$\tilde{\omega}_i = \Omega_i + \omega_i \quad (5.34)$$

A substituição da equação 5.34 na equação 2.35, tirando-se a média dessa equação, conduz às equações da vorticidade média  $(\overline{\Omega_i}, \overline{\Omega_i})$  e das flutuações de vorticidade  $(\omega_i, \omega_i)$ , respectivamente representadas abaixo:

$$\begin{aligned}
 U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{\Omega_i \Omega_i} \right) &= \overset{\text{I}}{-\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\Omega_i \omega_i u_i})} + \overset{\text{II}}{\overline{u_j \omega_i} \frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial x_j}} + \overset{\text{III}}{\overline{\Omega_i \Omega_j} S_{ij}} + \overset{\text{IV}}{\overline{\Omega_i \omega_j s_{ij}}} + \\
 \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{\Omega_i \Omega_i} \right) &- \nu \frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial x_j} \\
 \text{V} & \qquad \qquad \text{VI}
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

**I** = termo de transporte pelas interações velocidade-vorticidade;

**II** = termo análogo à produção de turbulência na equação de energia;

**III** = termo relativo ao esticamento (*stretching*) ou encolhimento (*shrinking*) dos vórtices pela taxa de deformação média;

**IV** = amplificação ou atenuação por *stretching* das componentes de flutuação pelas taxas de deformação das flutuações;

**V** = transporte viscoso;

**VI** = dissipação.

$$\begin{aligned}
 U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i} \right) &= \overset{\text{I}}{-u_j \omega_i \frac{\partial \overline{\Omega_i}}{\partial x_j}} - \overset{\text{II}}{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_j \omega_i \omega_i})} + \overset{\text{III}}{\overline{\omega_i \omega_j} S_{ij}} + \overset{\text{IV}}{\overline{\omega_i \omega_j} S_{ij}} + \overset{\text{V}}{\overline{\Omega_j \omega_i s_{ij}}} \\
 + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left( \frac{1}{2} \overline{\omega_i \omega_i} \right) &- \nu \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\omega_i}}{\partial x_j} \\
 \text{VI} & \qquad \qquad \text{VII}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Onde:

**I** = gradiente do termo de produção;

**II** = transporte de vorticidade pelas flutuações turbulentas;

**III** = termo de *stretching* pelas flutuações turbulentas;

**IV** = termo de *stretching* pelas deformação do escoamento médio;

**V** = termo misto de produção;

VI = transporte viscoso;

VII = dissipação.

### 5.8. Função de Densidade de Probabilidade de um Sinal Aleatório

Considerando que um sinal turbulento pode ser classificado como um processo estocástico estacionário ergódico, o universo pode ser representado por uma única amostra, conforme esquematizado abaixo:

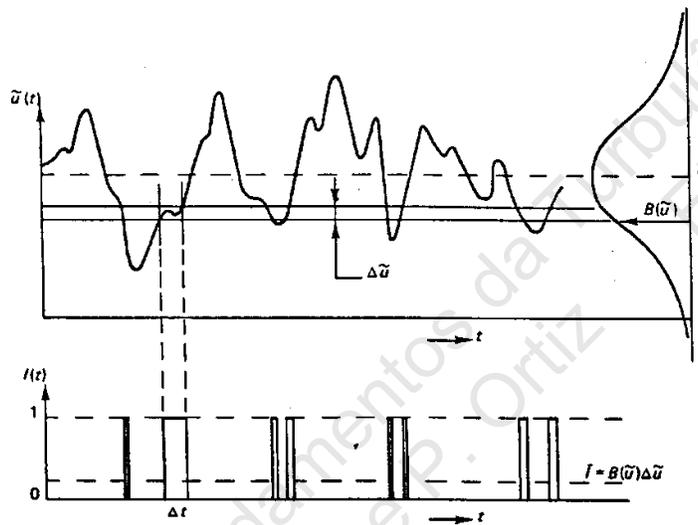


Figura 5.7 Representação esquemática de uma série temporal de um sinal aleatório e de sua função de densidade de probabilidade.

Durante o intervalo  $T$ , o sinal aleatório  $\tilde{u}(t)$  cai na banda de valores  $\tilde{u}$  e  $\tilde{u} + d\tilde{u}$  em um tempo total de  $\sum dt$ , de modo que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum dt}{T} \cong \frac{\sum dt}{T} \cong B(\tilde{u}) d\tilde{u} \quad (5.34)$$

que, para ser matematicamente válida tem-se que para  $T \rightarrow \infty$ ,  $B(\tilde{u}) d\tilde{u} \rightarrow 1$  e que corresponde ao intervalo de tempo em que  $-\infty \leq B(\tilde{u}) \leq \infty$ .

Pode-se escrever ainda:

$$P(u \leq u(t) \leq u + du) = B(u) du \quad (5.35)$$

Tomando-se a definição da média temporal para T suficientemente grande, conforme equação 5.5, tem-se que :

$$U_i = \frac{1}{T} \int_0^t \tilde{u}(t) dt = \int_0^t \tilde{u}(t) \frac{dt}{T} = \sum \tilde{u}(t) \frac{dt}{T} = \sum \tilde{u} [B(\tilde{u}) d\tilde{u}]$$

No limite para  $T \rightarrow \infty$ , pode-se escrever:

$$U_i = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} B(\tilde{u}) d\tilde{u} \quad (5.36)$$

definição da média a partir do conceito de função de densidade de probabilidade.

Analogamente poderíamos estender este conceito para os momentos de ordem superior, resultando:

$$\overline{f(\tilde{u})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{u}) B(\tilde{u}) d\tilde{u} \quad (5.37)$$

### 5.9. Momentos de Diversas Ordens de um Sinal Aleatório

A equação 5.37 permite o cálculo dos momentos de diversas ordens de um valor aleatório de velocidade instantânea. Removendo-se a média resulta a equação para os valores de flutuação de velocidade:

$$\overline{f(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) B(u) du \quad (5.39)$$

Sendo assim, temos para:

**-momento de primeira ordem (média temporal):**

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} u B(u) du = 0$$

**- momento de segunda ordem (variância):**

A variância é definida por:

$$\sigma_u^2 = E(u^2) - [E(u)]^2 = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = \overline{u^2}$$

Portanto:

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 B(u) du \quad (5.40)$$

Que representa a média quadrática da flutuação de velocidade, cuja raiz quadrada é o desvio padrão (*RMS*) do sinal aleatório. O momento de segunda ordem não detecta uma eventual falta de simetria da função de densidade de probabilidade.

- **momento de terceira ordem (assimetria)**

$$\overline{u^3} = \int_{-\infty}^{\infty} u^3 B(u) du \quad (5.41)$$

Nesta função representa-se a assimetria da função de densidade de probabilidade com relação a origem, conforme mostrado na *figura 5.8*. Nessa figura a assimetria está normalizada, resultando o coeficiente de assimetria:

$$S = \frac{\overline{u^3}}{\sigma_u^3} \quad (5.42)$$

Observa-se que na *figura 5.8* a assimetria é positiva, porque grandes valores positivos de flutuações de velocidade são mais frequentes do que valores negativos.

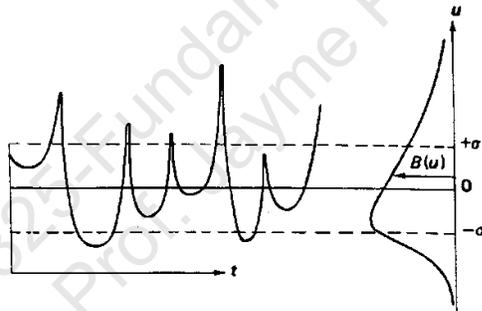


Figura 5.8 Função de densidade de probabilidade com assimetria positiva (Fonte: TENNEKES & LUMLEY, 1987).

- **momento de quarta ordem (curtose)**

$$\overline{u^4} = \int_{-\infty}^{\infty} u^4 B(u) du \quad (5.43)$$

O valor de curtose é grande se o valor de  $B(u)$  é significativo na cauda da função de probabilidade, conforme mostrado na *figura 5.9*, sendo uma medida de quanto tempo

o sinal varia em níveis de grande flutuação. Na figura utiliza-se o coeficiente de curtose, normalizado como:

$$K = \frac{\overline{u^4}}{\sigma_u^4} \quad (5.44)$$

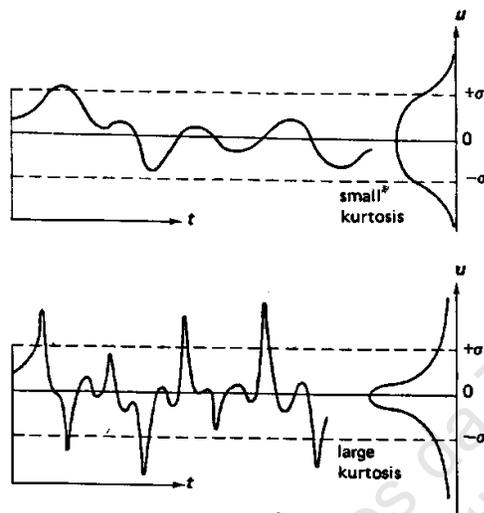


Figura 5.9 Função de densidade de probabilidade com pequena curtose e com grande curtose (Fonte: TENNEKES & LUMLEY, 1987).

### 5.10. Função de Densidade de Probabilidade Conjunta

A função de densidade de probabilidade conjunta define a probabilidade de que uma variável aleatória ( $u$ ) caia no intervalo  $u$  e  $u+du$ , e, simultaneamente, uma variável aleatória  $v$  caia no intervalo  $v$  e  $v+dv$ . Matematicamente, tem-se que:

$$P(u \leq u(t) \leq u + du \text{ e } v \leq v(t) \leq v + dv) = B(u, v) du dv \quad (5.45)$$

Se os valores de  $v$  para um valor específico de  $u$  são combinados, teoricamente tem-se :

$$B(u) = \int_{-\infty}^{\infty} B(u, v) dv \quad (5.46)$$

Ou, fixando-se o valor de  $v$ , tem-se:

$$B(v) = \int_{-\infty}^{\infty} B(u, v) du \quad (5.47)$$

Portanto a função de densidade de probabilidade de primeira ordem pode ser obtida a partir da função de densidade de probabilidade conjunta de acordo com as equações acima.

A representação gráfica da função de densidade de probabilidade conjunta é dada na *figura 5.10*, podendo-se perceber que é representada por uma superfície bidimensional.

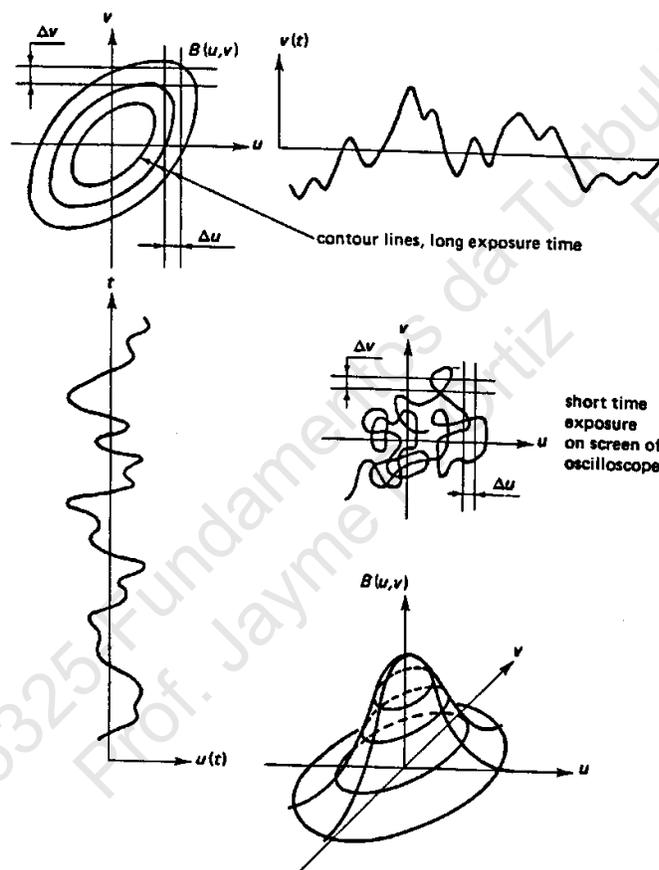


Figura 5.10 Representação esquemática da função de probabilidade conjunta (Fonte: TENNEKES & LUMLEY, 1987).

### 5.11. Função de Correlação ou Covariância

Partindo-se da definição de função de densidade de probabilidade conjunta, pode-se definir a covariância entre dois sinais de flutuações de velocidade como

$$\overline{uv} = \iint_{-\infty}^{\infty} uv B(u)B(v)dudv \quad (5.48)$$

O coeficiente de correlação pode ser obtido normalizando a covariância da seguinte forma:

$$\rho_{xy} = \frac{\overline{uv}}{\left(\overline{u^2} \overline{v^2}\right)^{1/2}} \quad (5.49)$$

Com:  $-1 \leq \rho_{xy} \leq 1$ ; sendo  $\rho_{xy} = 0$  não há correlação nenhuma entre as flutuações de velocidades; sendo  $\rho_{xy} = 1$ , as flutuações estão perfeitamente correlacionadas; sendo  $\rho_{xy} = -1$ , as flutuações estão perfeita e negativamente correlacionadas. A figura 5.11 representa graficamente esses resultados.

No caso de  $u$  e  $v$  serem estatisticamente independentes, tem-se:

$$\overline{uv} = \int_{-\infty}^{\infty} uB(u)du \int_{-\infty}^{\infty} vB(v)dv = \bar{u} * \bar{v} = 0 \quad (5.50)$$

e as flutuações de velocidade não se correlacionam.

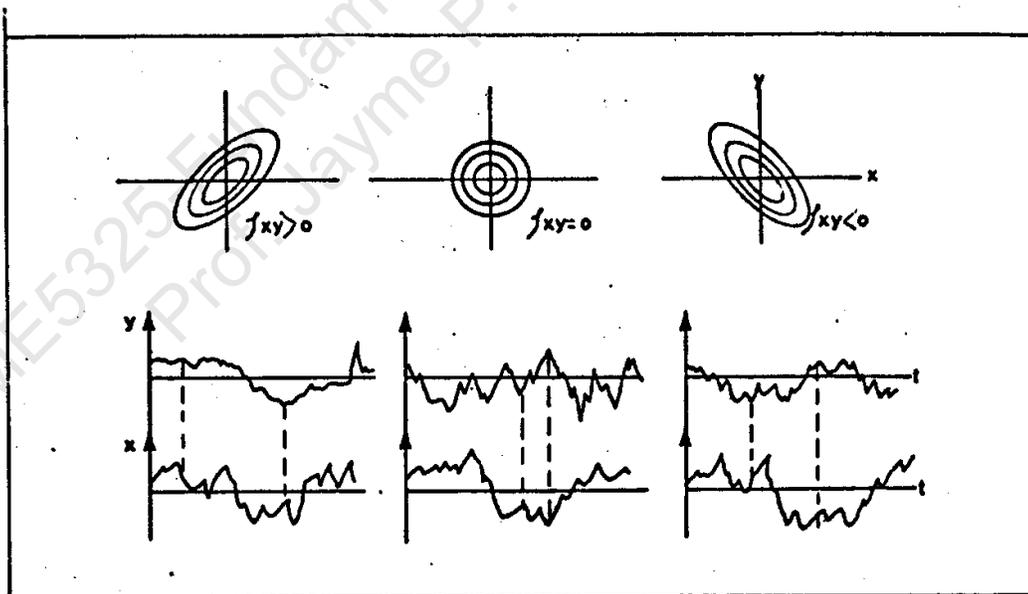


Figura 5.11. Representação gráfica de valores de covariância de sinais de flutuação de velocidades

## 5.12. Função de Autocorrelação

Enquanto a autocovariância é uma medida de assimetria da função de densidade de probabilidade conjunta, a autocorrelação revela a presença de periodicidade em um sinal aleatório.

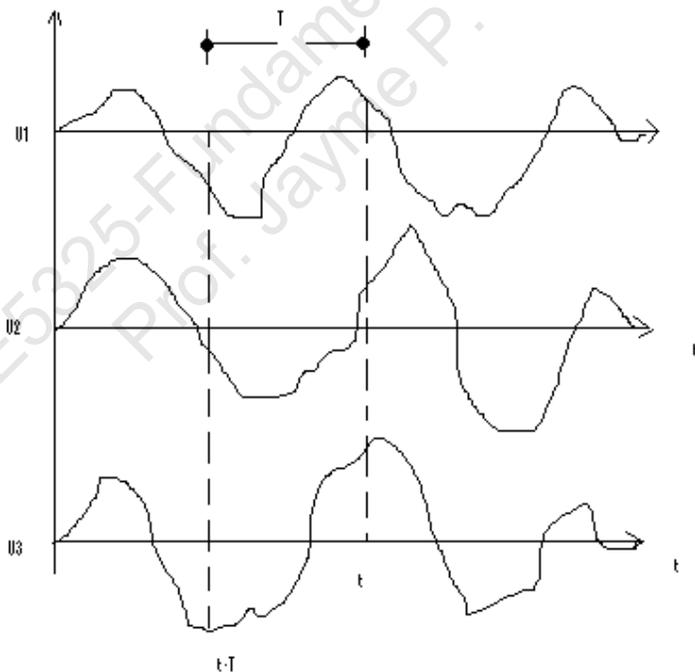
Estatisticamente, a autocorrelação é definida como:

$$E[u(t)u(t-\tau)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i(t)u_i(t-\tau) \quad (5.51)$$

Admitindo-se Processo Estocástico Estacionário Ergódico (intervalo de tempo de amostragem suficientemente grande), resulta para a autocorrelação:

$$\overline{u_i(t)u_i(t-\tau)} = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t)u_i(t-\tau)dt \quad (5.52)$$

E, nesse caso, a autocorrelação depende apenas no intervalo ( $\tau$ ), como mostrado na *figura 5.12*.



*Figura 5.12. Amostras de um sinal aleatório de velocidade mostrando os valores de flutuações nos instantes  $t$  e  $t-\tau$*

A normalização da equação 5.52 leva ao coeficiente de autocorrelação:

$$\frac{\overline{u_i(t)u_i(t-\tau)}}{u_i^2} = \rho(\tau) = \rho(-\tau) \quad (5.53)$$

As propriedades da função de autocorrelação de um processo estocástico estacionário ergódico, estão expressas abaixo:

- Só depende do intervalo  $\tau$ ;
- $R_u(\tau) = R_u(-\tau) \Rightarrow$  função par;
- $R_u(0) \geq |R_u(\tau)|$ ;
- $R_u(0) = \sigma_u^2 + (\bar{u})^2 = \sigma_u^2 = \overline{u^2}$ ;
- A função de autocorrelação pode ser negativa.

### 5.13. Escala Integral de Tempo

Estatisticamente a escala integral de tempo é uma medida do intervalo sobre o qual a flutuação de um sinal turbulento  $u(t)$ , correlaciona-se com ele mesmo, conforme expresso na equação abaixo:

$$\mathfrak{S} = \int_0^{\infty} \rho(\tau) d\tau \quad (5.54)$$

Como em turbulência assume-se sempre que a escala integral é finita, tem-se, na prática:

$$\mathfrak{S} = \int_0^{\tau} \rho(\tau) d\tau \quad (5.55)$$

Na figura abaixo a escala integral de tempo  $\mathfrak{S}$  é dada pelo retângulo equivalente a área relativa ao primeiro cruzamento com o zero do coeficiente de autocorrelação.

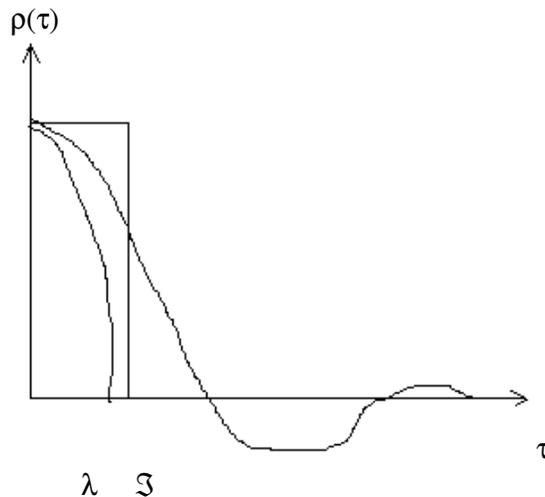


Figura 5.13. Representação esquemática da escala integral de tempo e da micro-escala de Taylor.

#### 5.14. Correlação Espacial e Escala Integral Espacial

Pode-se definir a correlação espacial (ou cruzada) para  $\tau = 0$ , admitindo-se uma única dimensão, como:

$$R_u(\xi) = \overline{u(x)u(x+\xi)} \quad (5.56)$$

derivando a definição do coeficiente de correlação espacial, ou cruzada:

$$C(\xi) = \frac{\overline{u(x)u(x+\xi)}}{u^2} \quad (5.57)$$

Analogamente à escala integral de tempo, pode-se definir a escala integral espacial, que para um tempo finito, e considerando unidimensionalidade é dada por:

$$L = \int_0^L C(\xi) d\xi \quad (5.58)$$

Novamente  $L$  deve corresponder a um retângulo de área equivalente à área relativa ao primeiro cruzamento com o zero do coeficiente de correlação cruzada (espacial) e deve corresponder ao tamanho aproximado do turbilhão na direção da medida.

Se admitirmos que as perturbações turbulentas são transportadas pelo escoamento médio sem distorção (independentemente do tempo), pode-se argumentar que:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right)_{\text{medição}} \cong U_c \left. \frac{\partial}{\partial x} \right)_{\text{campo}} \quad (5.59)$$

sendo  $U_c$  a velocidade de convecção da turbulência. A hipótese apresentada na equação 5.59, corresponde a chamada Hipótese de Taylor, conhecida na literatura por Turbulência Congelada.

O cálculo das escalas integrais apresentado nas equações acima poderia ser obtido, alternativamente, utilizando os sinais de flutuações de pressão, como será visto no capítulo seguinte.