

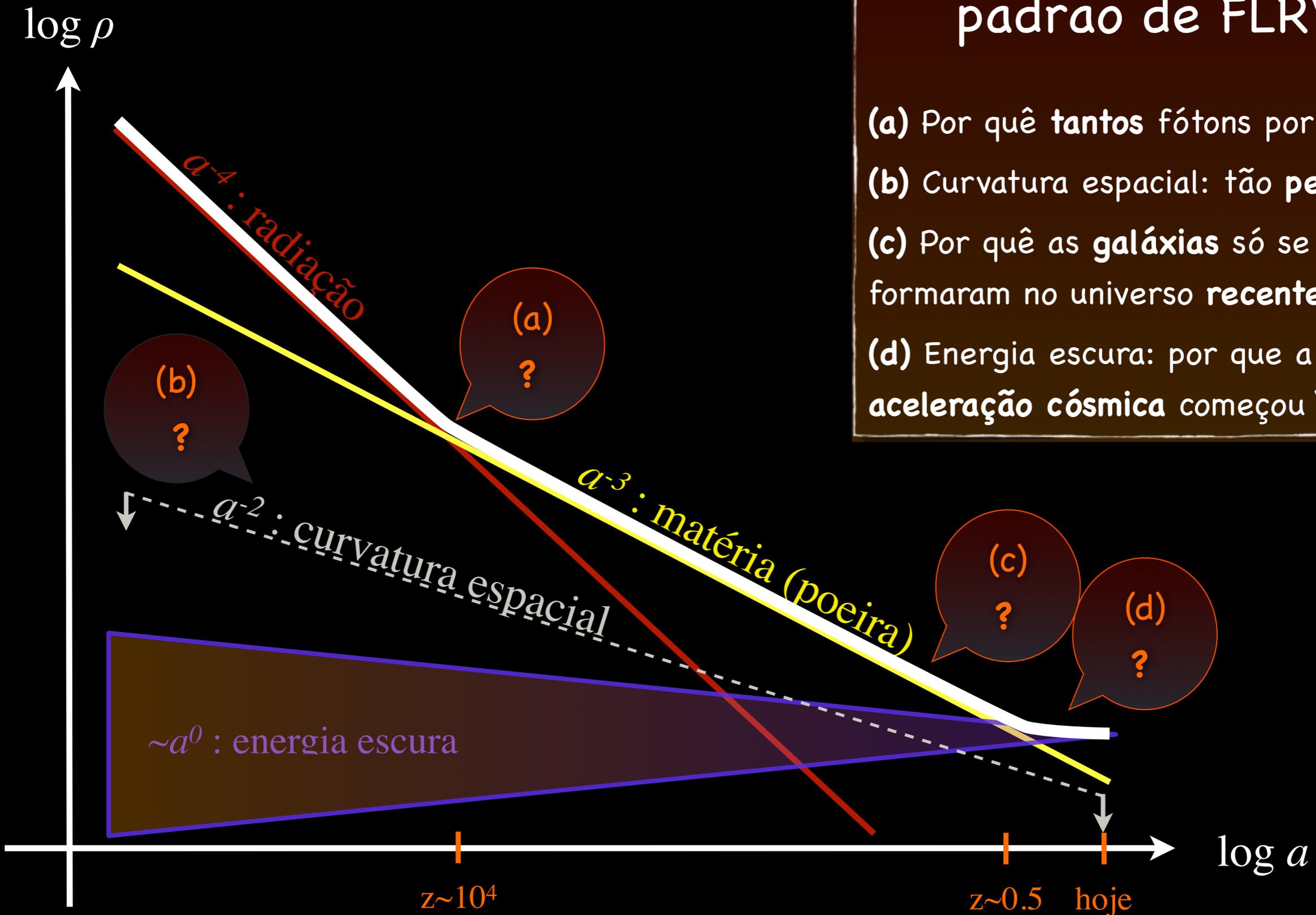
# Introdução à Cosmologia Física



## Problemas do “modelo padrão” de FLRW

- \* Planura (flatness)
- \* Horizontes cosmológicos
- \* Formação de estruturas no universo

## História da dominação cósmica



## Enigmas do modelo-padrão de FLRW

- (a) Por quê tantos fótons por bárion?
- (b) Curvatura espacial: tão pequena?
- (c) Por quê as galáxias só se formaram no universo recente?
- (d) Energia escura: por que a era da aceleração cósmica começou "hoje"?

## #1: Por quê a curvatura espacial é tão pequena?

$$\rho_k = -\frac{3k}{8\pi G a^2}$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{H^2 a^2} \quad \leftrightarrow \quad \Omega_k^0 = -\frac{k}{H_0^2}$$

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Os limites atuais (principalmente da RCF) implicam que o "raio de curvatura" ( $k^{-1/2}$ ) da seção espacial é muito maior ( $> 100 \times$ ) do que o "raio de Hubble" ( $\sim 3$  Gpc).

Como pode ser?

$$\frac{d}{dt} \Omega_k = -\frac{d}{dt} \frac{k}{H^2 a^2} = -\frac{d}{dt} \frac{k}{\dot{a}^2} = 2 \frac{k}{H^2 a^2} \frac{1}{H} \frac{\ddot{a}}{a} = -2\Omega_k \frac{1}{H} (-4\pi G)(\rho + 3p)$$

$$\implies \frac{d}{da} \log \Omega_k = \frac{1}{H^2} 8\pi G(\rho + 3p)$$

$\Omega_k$  cresce sempre, a menos que  $\rho + 3p < 0!$

# Introdução à Cosmologia Física

## Recordando: Dinâmica de um universo dominado por curvatura espacial

Vamos supor que temos apenas radiação, e que a curvatura espacial é negativa.

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_r^0 a^{-4} + \Omega_k^0 a^{-2}} \quad \Omega_r^0 + \Omega_k^0 = 1$$

Defina: 
$$a_* = \sqrt{\frac{\Omega_r^0}{-\Omega_k^0}} = \sqrt{\frac{\Omega_k^0 - 1}{\Omega_k^0}}$$

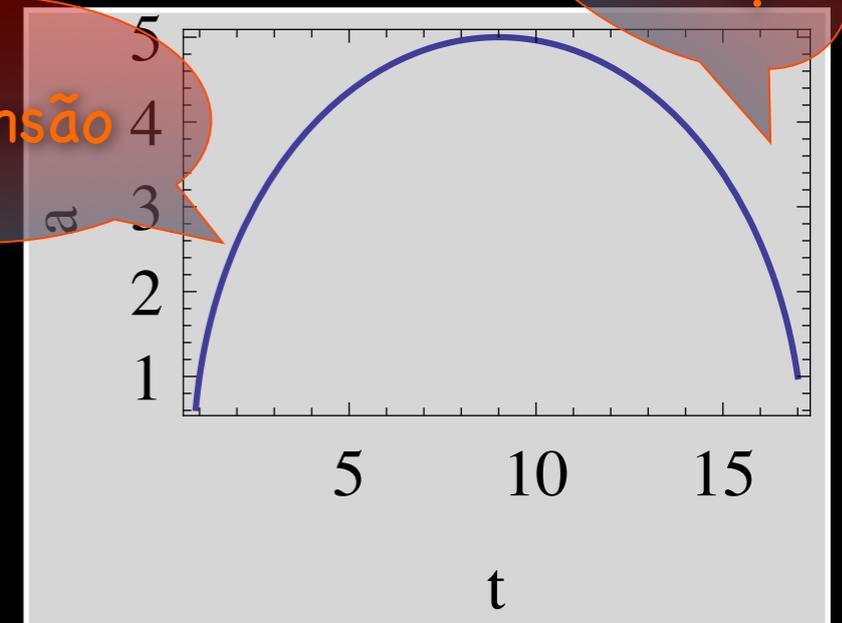
Podemos reescrever essa equação como: 
$$\frac{da}{a} \frac{a^2}{\sqrt{1 - a^2/a_*^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1 - a_*^{-2}}} dt$$

A solução é:

$$a = \left[ 1 + 2 H_0 (t - t_0) - \frac{1}{a_*^2 - 1} H_0^2 (t - t_0)^2 \right]^{1/2}$$

Essa função tem um máximo em:

$$t_* = t_0 + (a_*^2 - 1) H_0^{-1} \quad a(t_*) = a_*$$



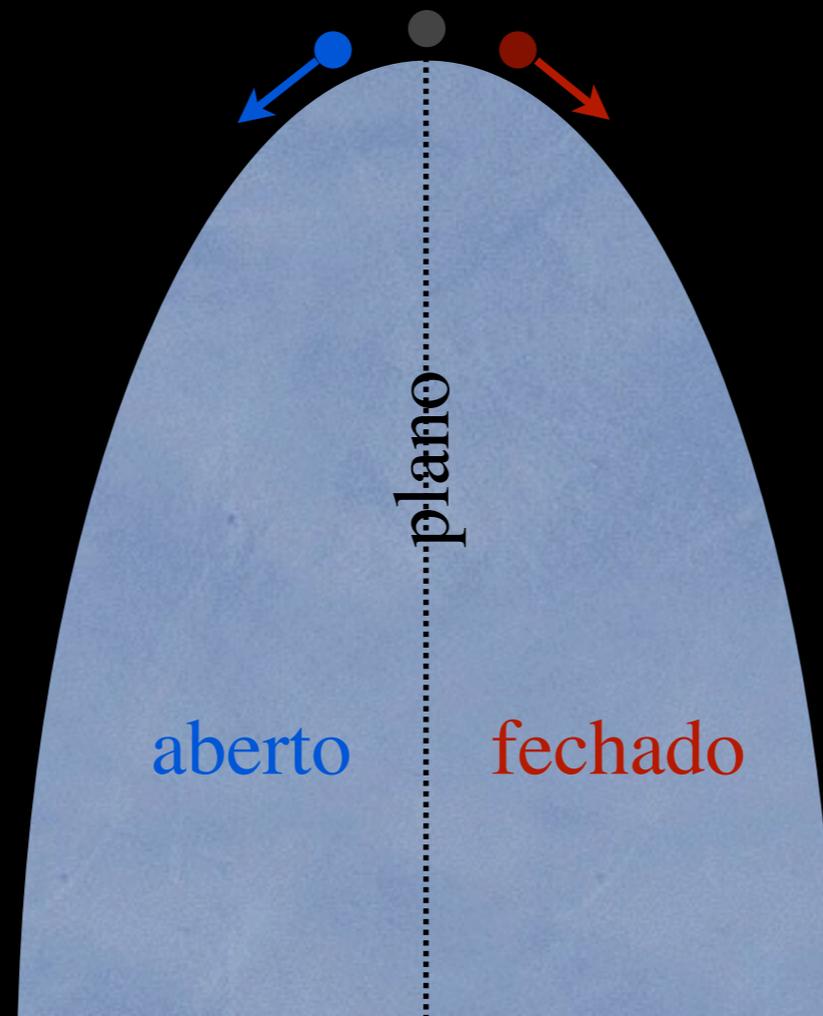
# Introdução à Cosmologia Física

Com matéria "normal" (poeira, radiação), a curvatura deveria dominar, eventualmente!

$$\frac{d}{da} \log \Omega_k = \frac{1}{H^2} 8\pi G(\rho + 3p)$$

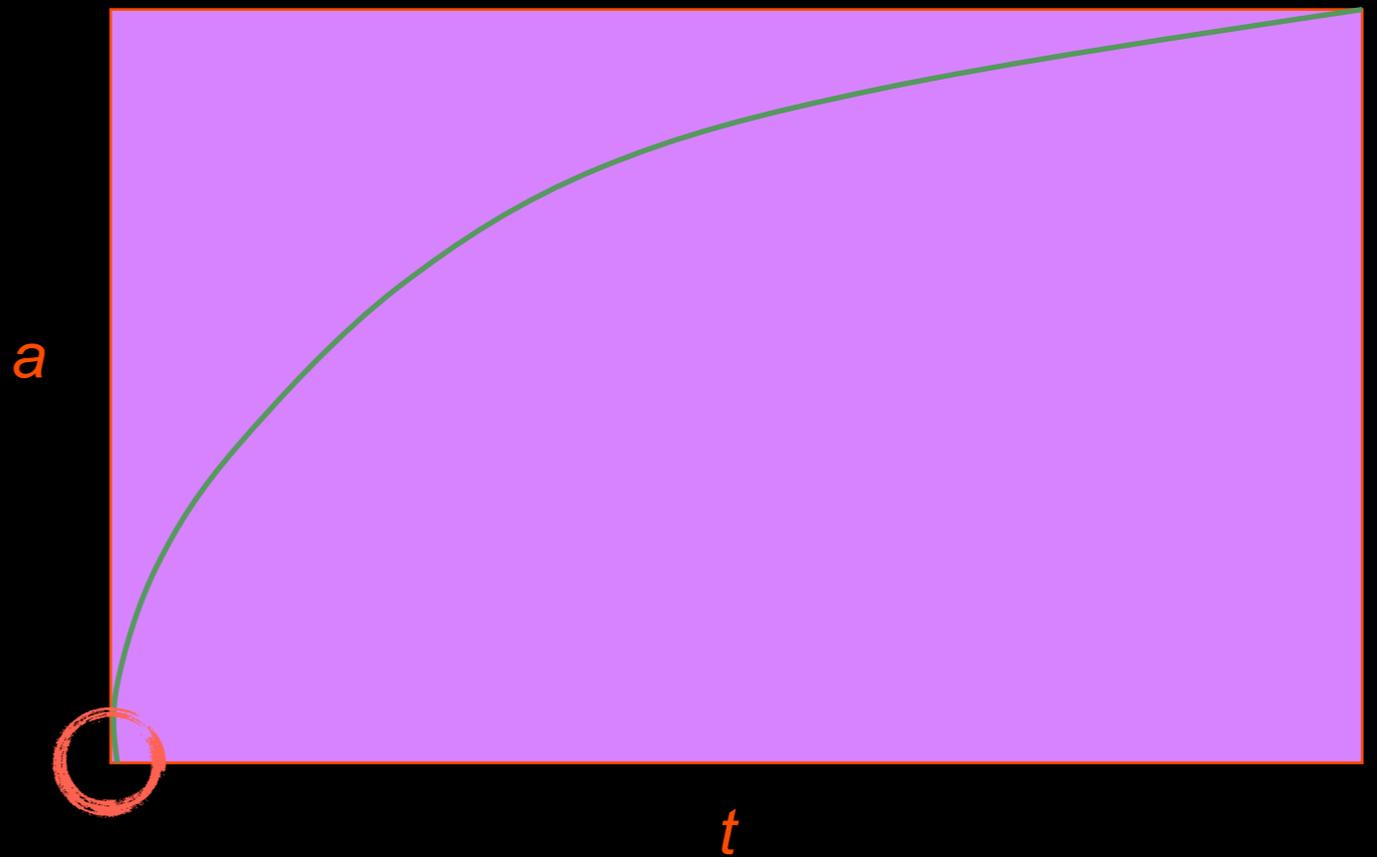
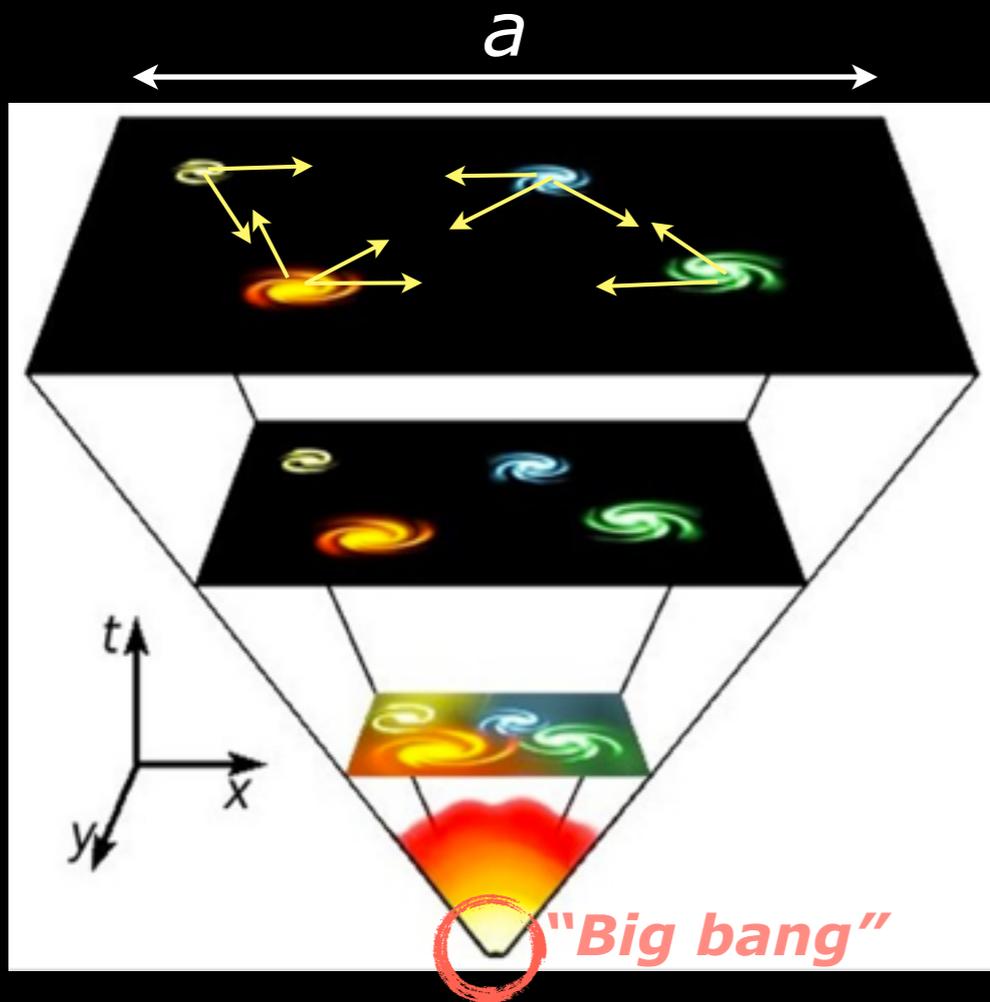
Curvatura pequena hoje  $\Rightarrow$  Curvatura **muito pequena** no universo primordial!

Por quê?



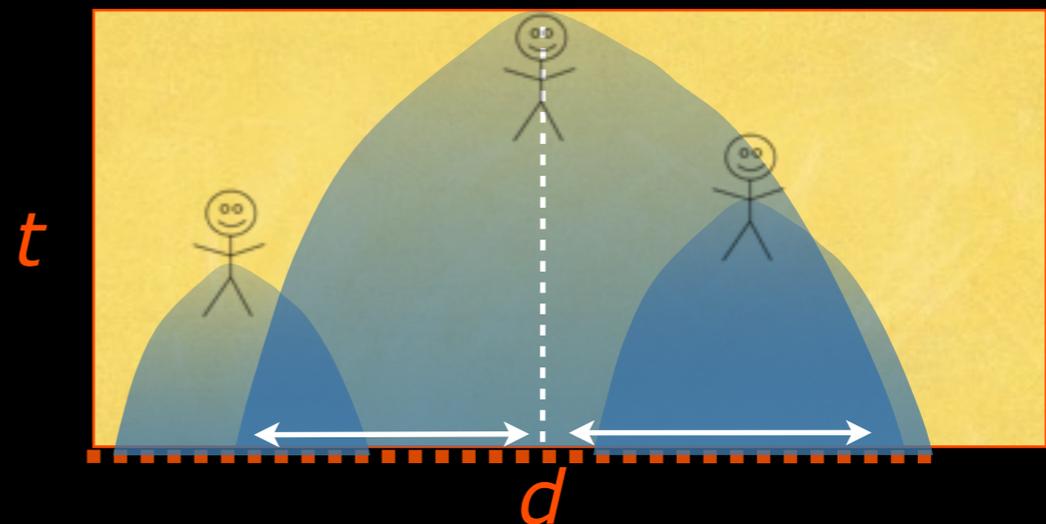
## #2: Horizontes num universo em expansão

Gravidade  $\Rightarrow$  força atrativa  $\Rightarrow$  expansão desacelerada



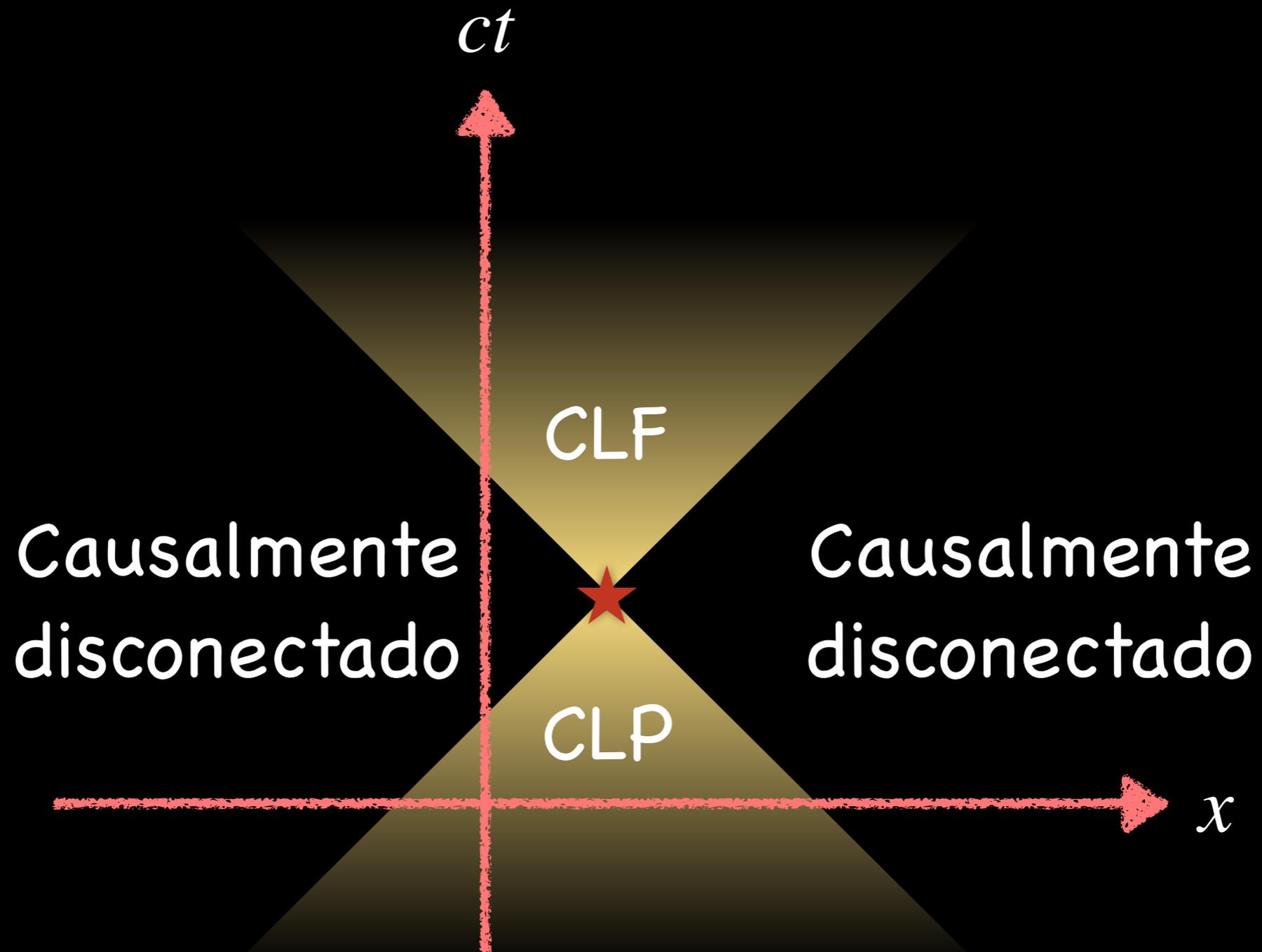
Há uma **distância máxima** que pode ser percorrida por um raio de luz que foi emitido num instante qualquer no passado, até um instante  $t$ .

Em outras palavras, o **cone de luz passado**, nesse caso, está limitado!



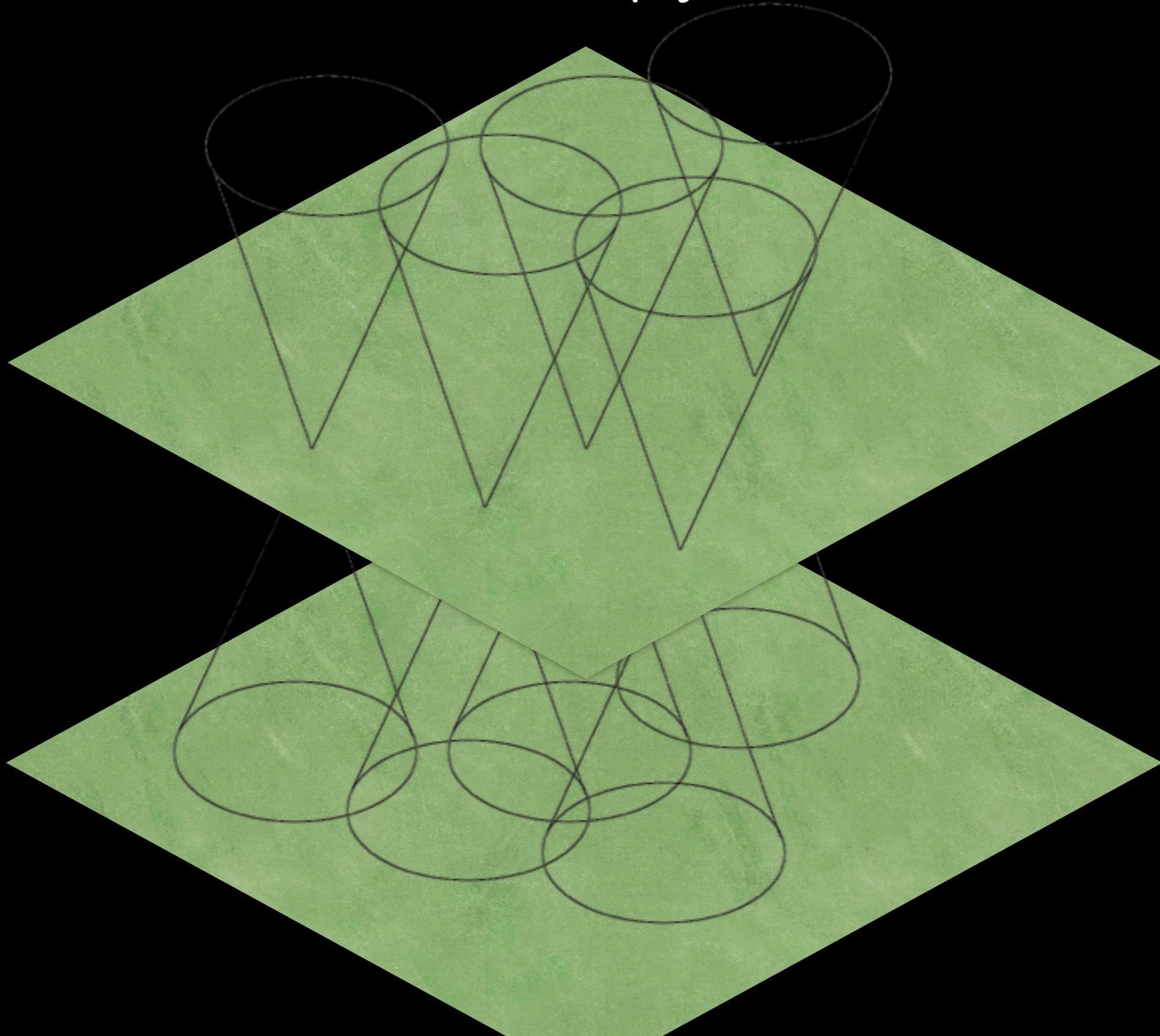
# Introdução à Cosmologia Física

O cone de luz, no espaço de Minkowski (Relatividade Restrita) é:

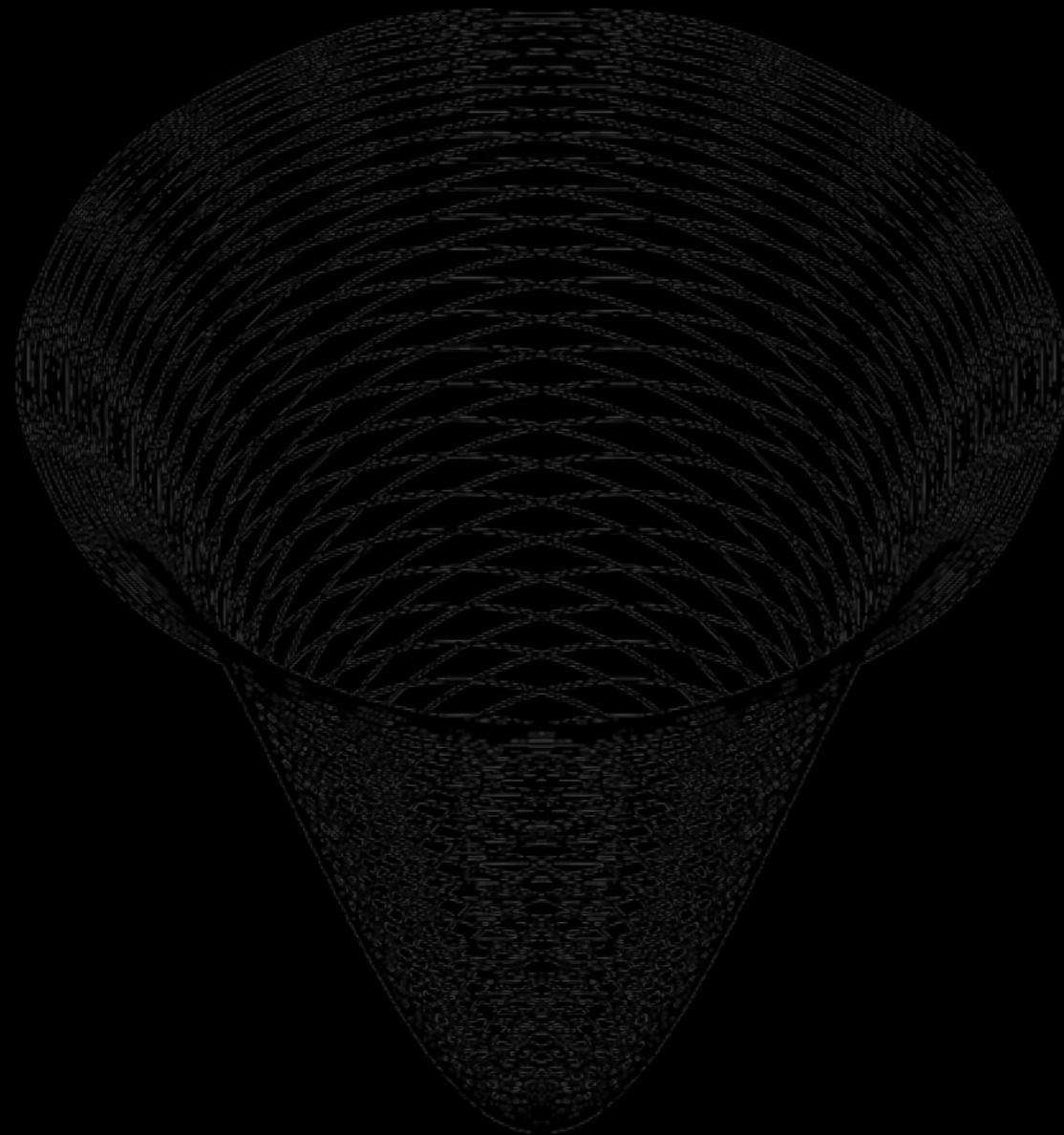


# Introdução à Cosmologia Física

Vários cones de luz de eventos em  $t=0$  no espaço de Minkowski, 2+1 dimensões:



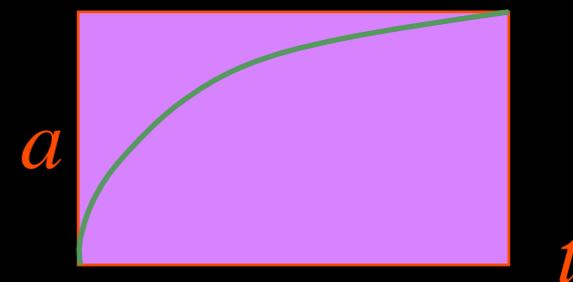
# Introdução à Cosmologia Física



# Introdução à Cosmologia Física

- Em FLRW, distâncias percorridas por sinais de luz podem ser **finitas** mesmo quando o tempo durante o qual esse sinal viajou se estende até arbitrariamente no passado ou no futuro. Por exemplo, vamos tomar um espaço-tempo FLRW desacelerado:

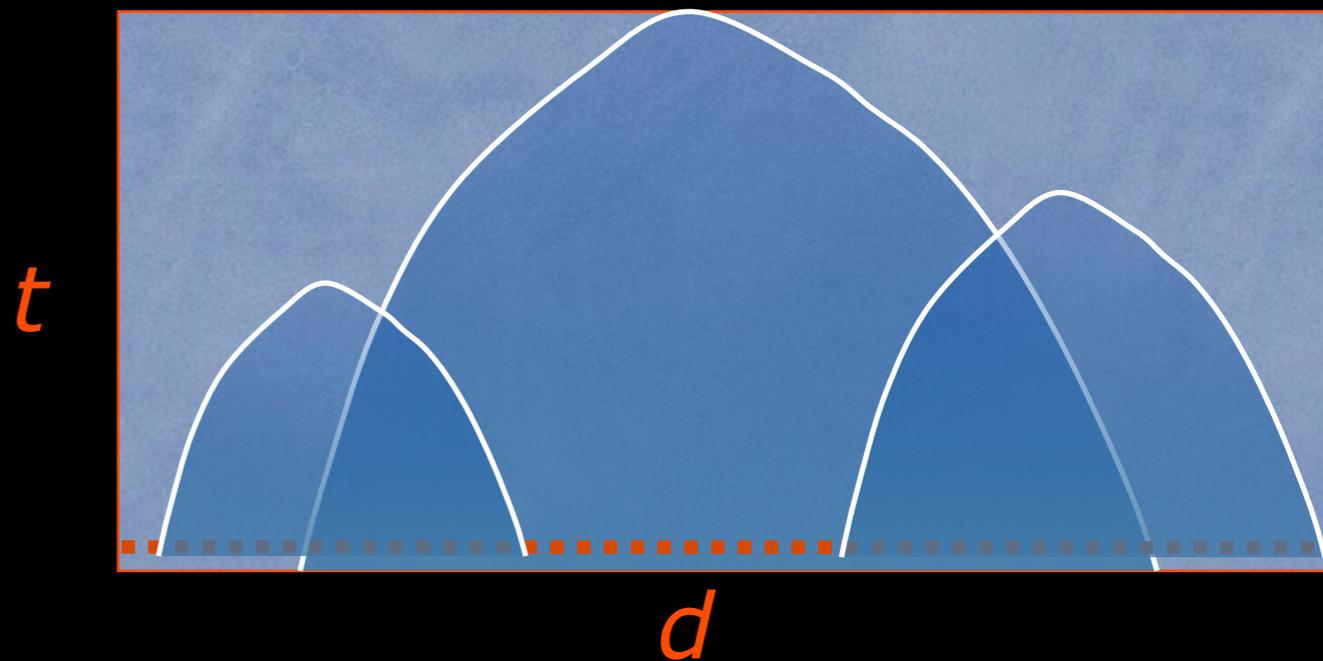
$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^p, \quad 0 < p < 1$$



Esse espaço-tempo pode ser continuado para o passado, até o instante  $t=0$  (quando  $a=0$ ). Então:

$$\begin{aligned} d_{pH}(t) &= a(t) \int \frac{dt'}{a(t')} = \left( \frac{t}{t_0} \right)^p \int_0^t dt' \left( \frac{t'}{t_0} \right)^{-p} \\ &= \frac{1}{1-p} t = \frac{p}{1-p} H^{-1}(t) \end{aligned}$$

$d_{Hp}$  é a distância física máxima que um raio de luz pode viajar se ele foi emitido no primeiro instante possível. Isso significa que o **cone de luz passado** nesse cenário é limitado.



# Introdução à Cosmologia Física

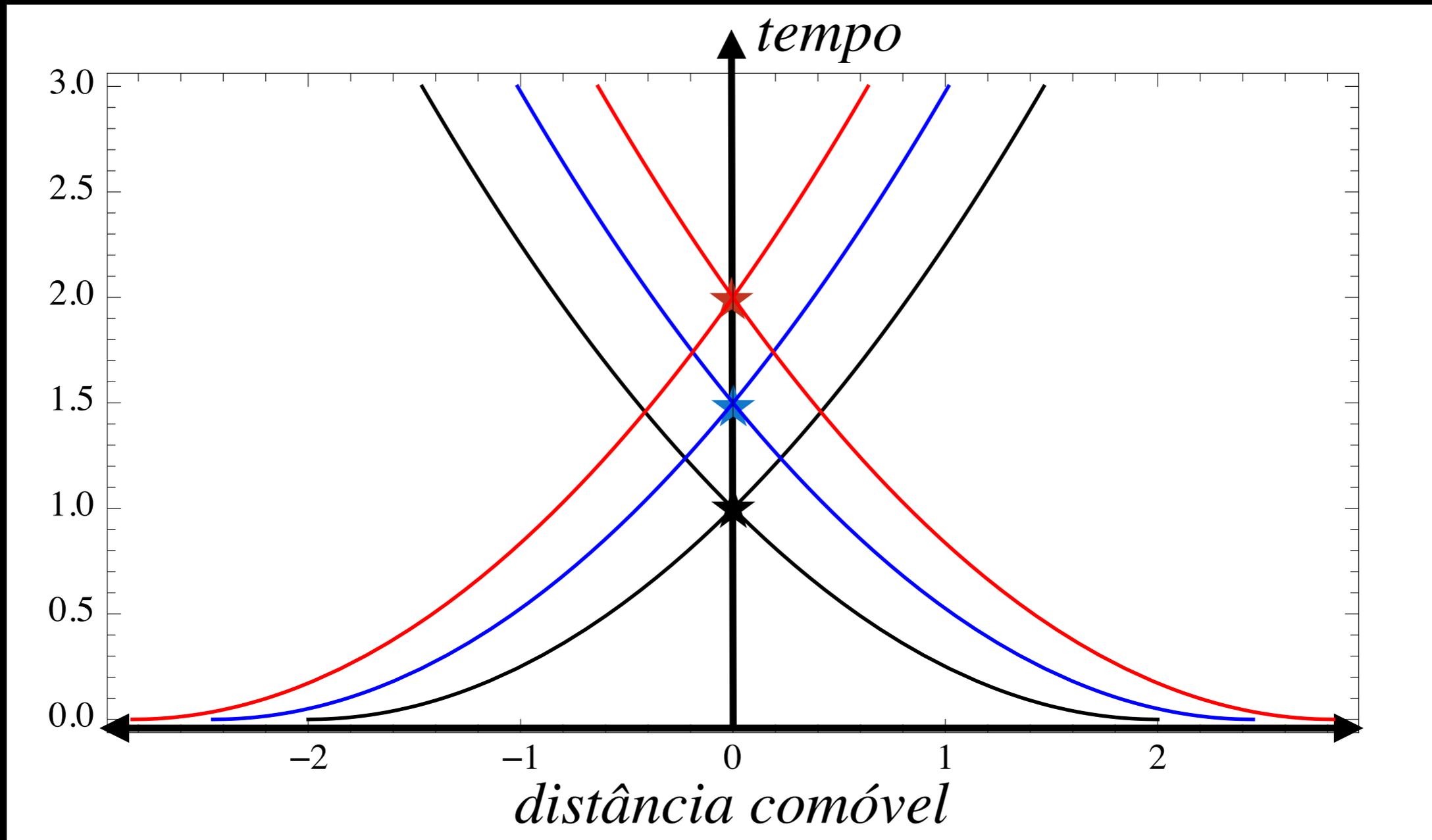
- Essa **distância máxima** é chamada de **horizonte**. Como nesse caso ( $p < 1$ ) o horizonte se refere a uma truncagem no CLP, trata-se de um horizonte do tipo-passado, ou seja, um **horizonte de partículas**. Esse horizonte é geralmente bem aproximado pelo **raio de curvatura** de FLRW,  $r \sim 1/R^{-1/2} \sim H^{-1}$  - o "raio de Hubble"!
- O horizonte de partículas separa observadores que **nunca tiveram contato causal até o instante  $t$** . Portanto, quando um universo possui um horizonte de partículas, ele possui regiões que são (até o momento  $t$ ) **causalmente desconectadas**
- Como o nosso universo foi, durante boa parte da sua história, dominado seja por radiação ( $p=1/2$ ) ou por "poeira" ( $p=2/3$ ), se isso for verdade até o instante  $t=0$ , então o horizonte de partículas **hoje** seria:

$$d_{Hp}(0) = 1/(1-p) c t_0 \approx 40 \text{ Gly}$$

- E a coisa fica ainda **pior no passado**: no instante do desacoplamento (quando se forma a RCF), o horizonte de partículas seria  $d_H(z=1100) \sim 230 \text{ kpc}$  ! **(Calcule!)**

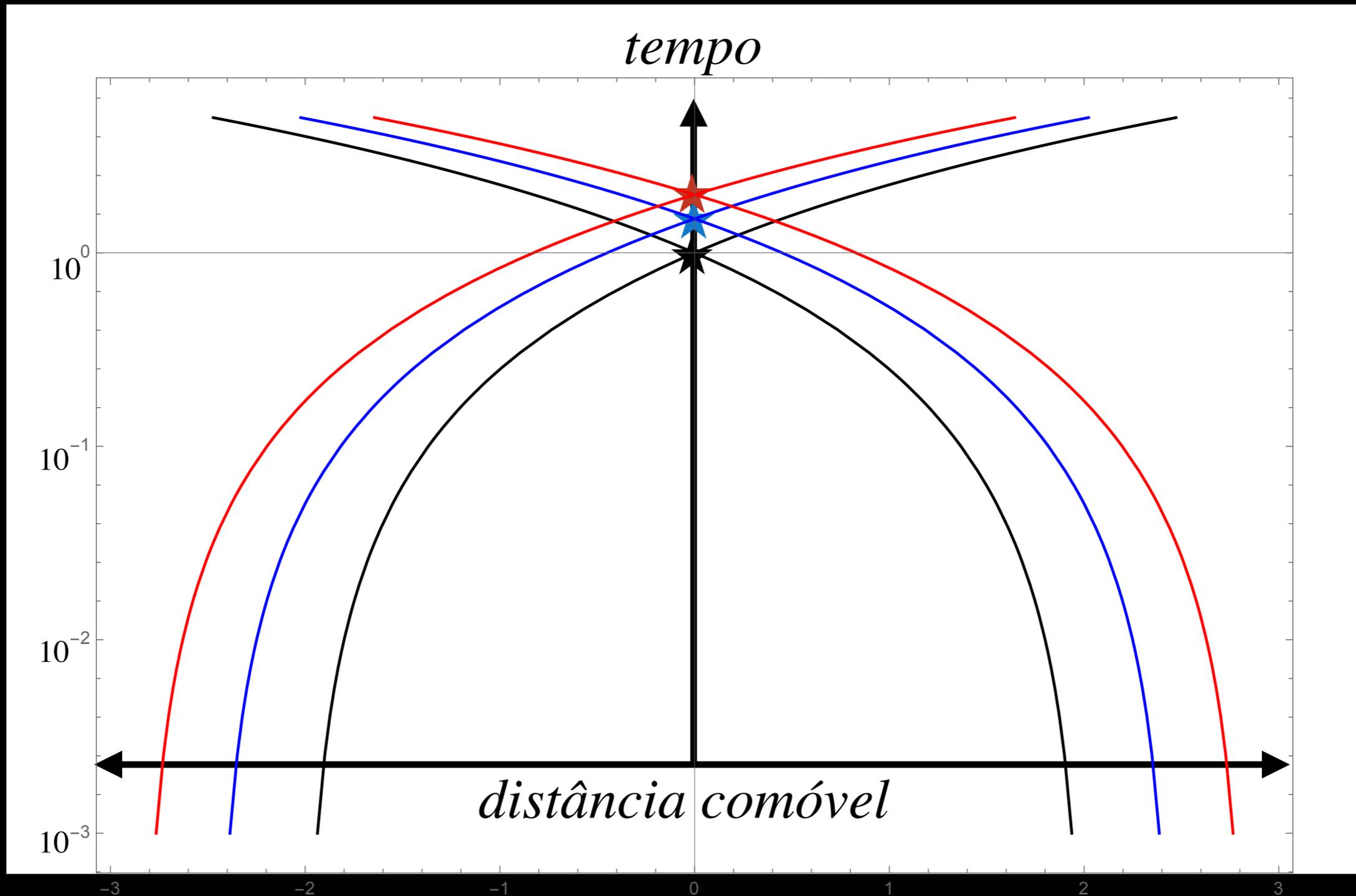
# Introdução à Cosmologia Física

- Muitas vezes é mais fácil visualizar o **cone de luz** (e o **horizonte de partículas**) em termos de **distâncias comóveis**. O cálculo exato nos dá, para  $p=1/2$  e vários "eventos" em  $x=0$  e  $t=1, 1.5$  e  $2$ :



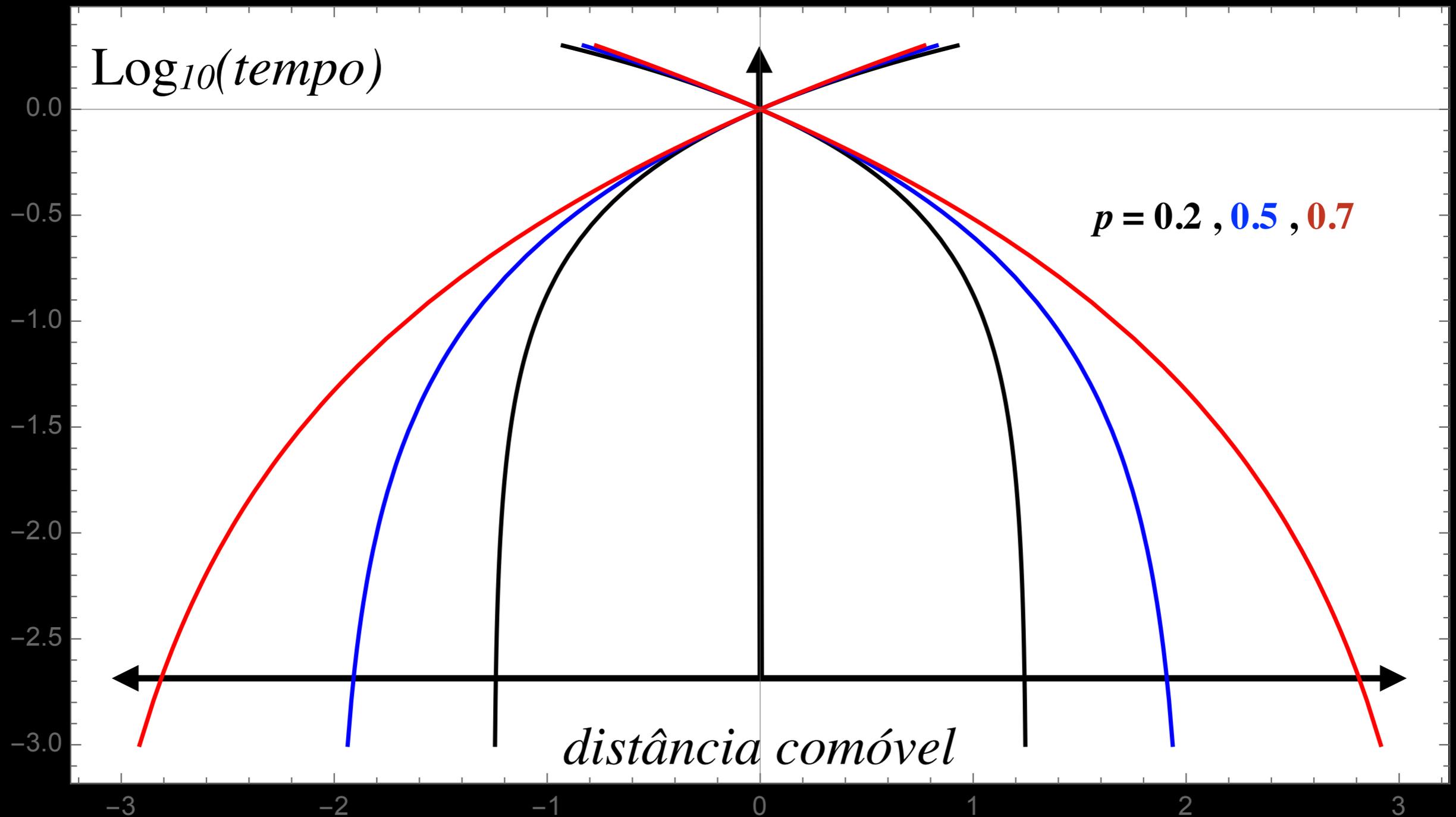
# Introdução à Cosmologia Física

- Numa escala logarítmica, para  $p=1/2$  e vários "eventos" em  $x=0$  e  $t=1, 1.5$  e  $2$ :



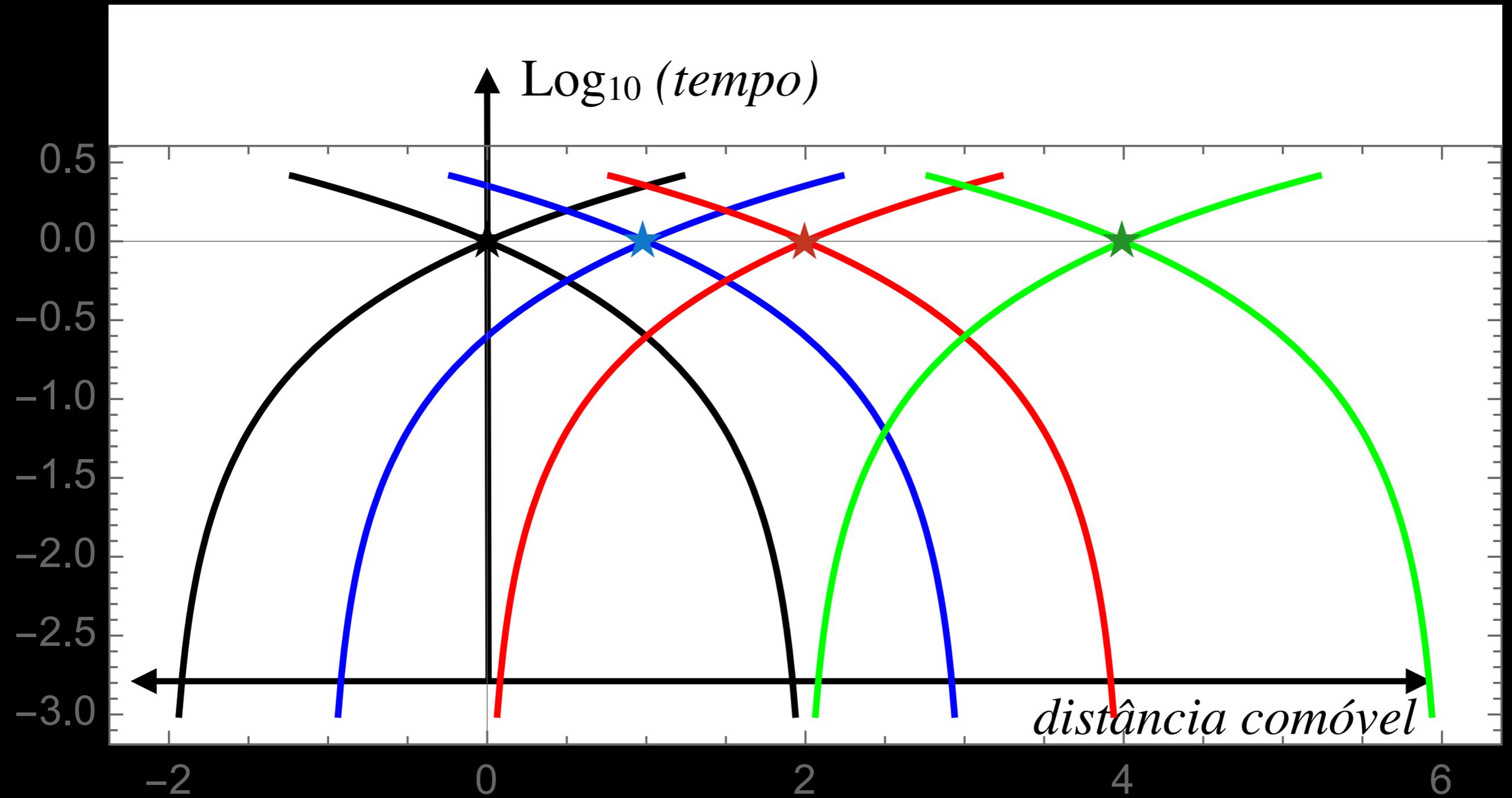
# Introdução à Cosmologia Física

- Vamos agora ver como a lei de potência muda o cone de luz. Abaixo temos o resultado para  $p = 0.2$ ,  $0.5$  e  $0.7$ , para um evento em  $x=0$  e  $t=1$ :



# Introdução à Cosmologia Física

- Para  $p = 0.5$ , eventos em  $t = 1$  e  $x = 0, 1, 2, 4$  possuem o seguinte cone de luz:



## Tempo conforme e diagramas espaço-tempo em FLRW

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ d\chi^2 + \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen} \left( \sqrt{k}\chi \right) d^2\Omega \right]$$

$$\text{DEF. : } d\eta \equiv \frac{dt}{a} \quad \Leftrightarrow \quad a d\eta = dt$$

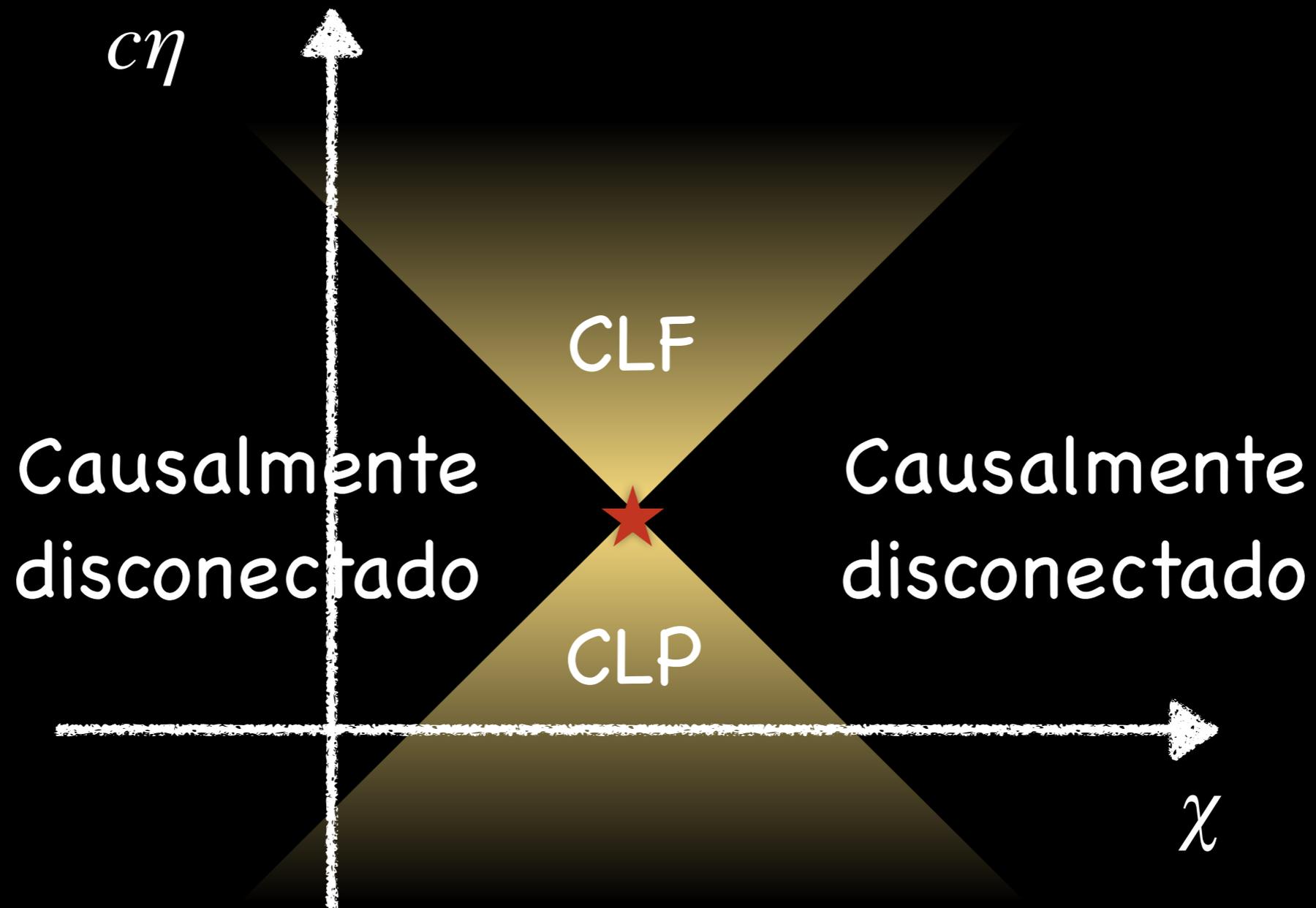
$$\Rightarrow ds^2 = a^2 \left[ -c^2 d\eta^2 + d\chi^2 + \frac{1}{\sqrt{k}} \text{sen} \left( \sqrt{k}\chi \right) d^2\Omega \right]$$

**Raios de luz "radiais" (geodésicas nulas radiais):  $ds^2 = 0$**

$$c d\eta = d\chi \quad \Leftrightarrow \quad c \Delta\eta = \Delta\chi$$

# Introdução à Cosmologia Física

Com o tempo conforme, o cone de luz em FLRW é... o cone de luz!



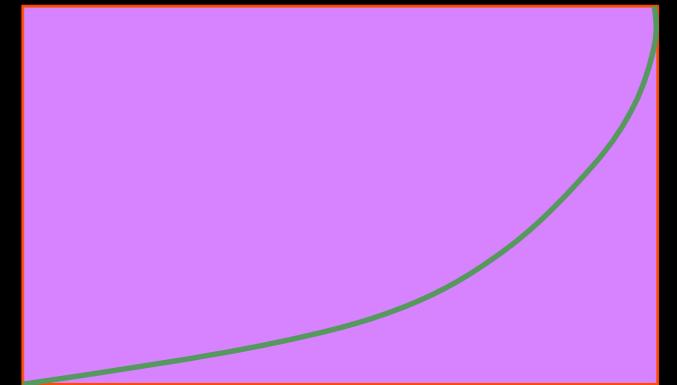
# Introdução à Cosmologia Física

Vamos brincar um pouco mais com os horizontes.

Considere agora um modelo FLRW acelerado:

$$a(t) = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^p, \quad p > 1$$

$a$



Nós ainda temos um instante inicial  $t=0$ . Mas:

$$d(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^p \int_{t_i}^t dt' \left( \frac{t'}{t_0} \right)^{-p}$$

é agora uma distância **arbitrariamente grande** à medida que tomamos o limite

$t_i \rightarrow 0$ . Portanto, nesse caso **não há um horizonte de partículas!**

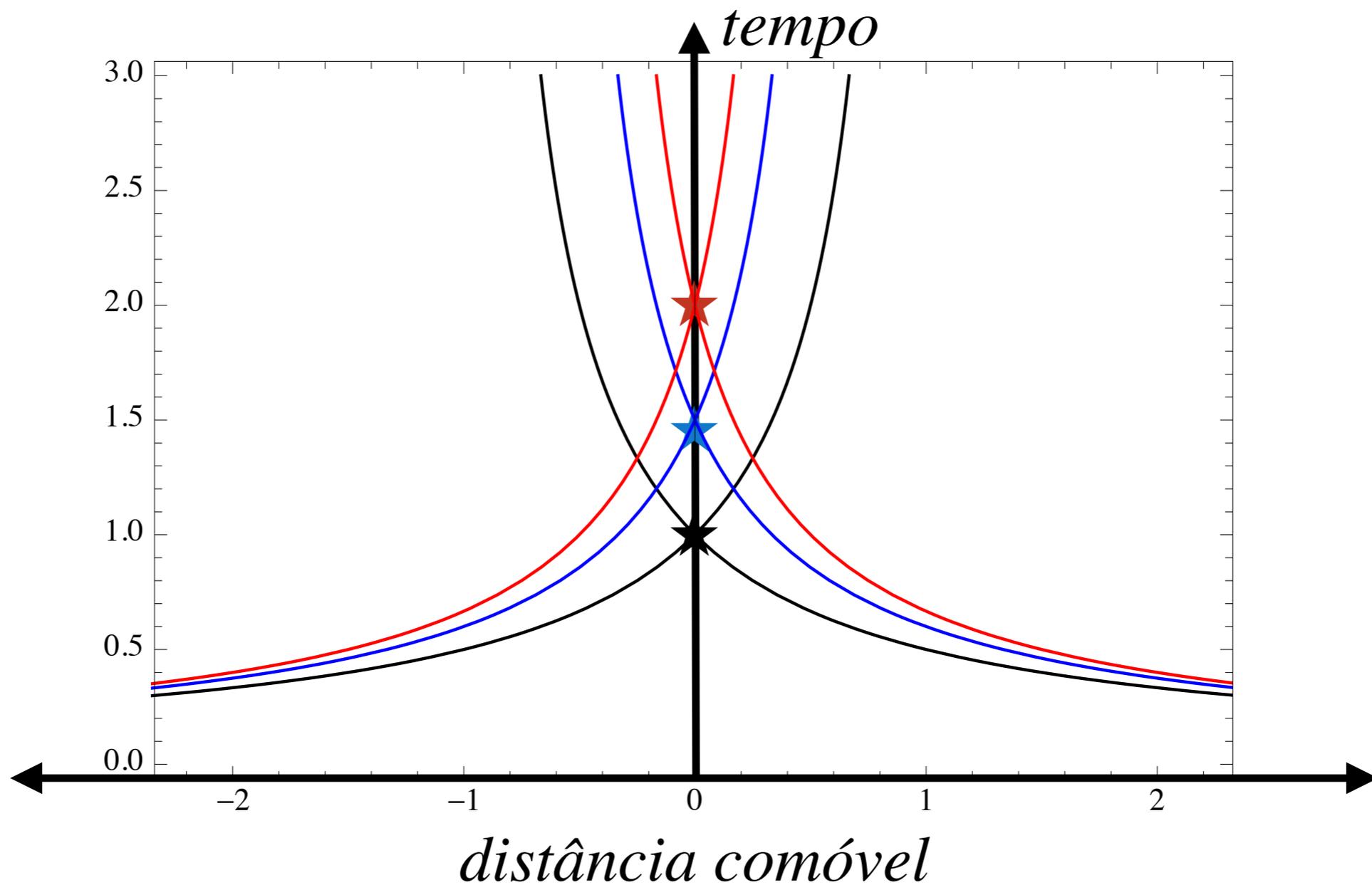
Porém, considere, o que ocorre se o **limite superior** for tomado  $t_f \rightarrow \infty$ , e deixe o limite inferior ser o instante  $t$ .

Essa distância então corresponde a um **comprimento máximo** que separa dois objetos, tal que eles nunca mais poderão trocar um sinal de luz que fôr emitido no instante  $t$ . Se essa distância não for **infinita**, então dizemos que há um **HORIZONTE DE EVENTOS**:

$$d_{eH}(t) = \left( \frac{t}{t_0} \right)^p \int_t^\infty dt' \left( \frac{t'}{t_0} \right)^{-p} = \frac{1}{p-1} t = \frac{p}{p-1} H^{-1}(t)$$

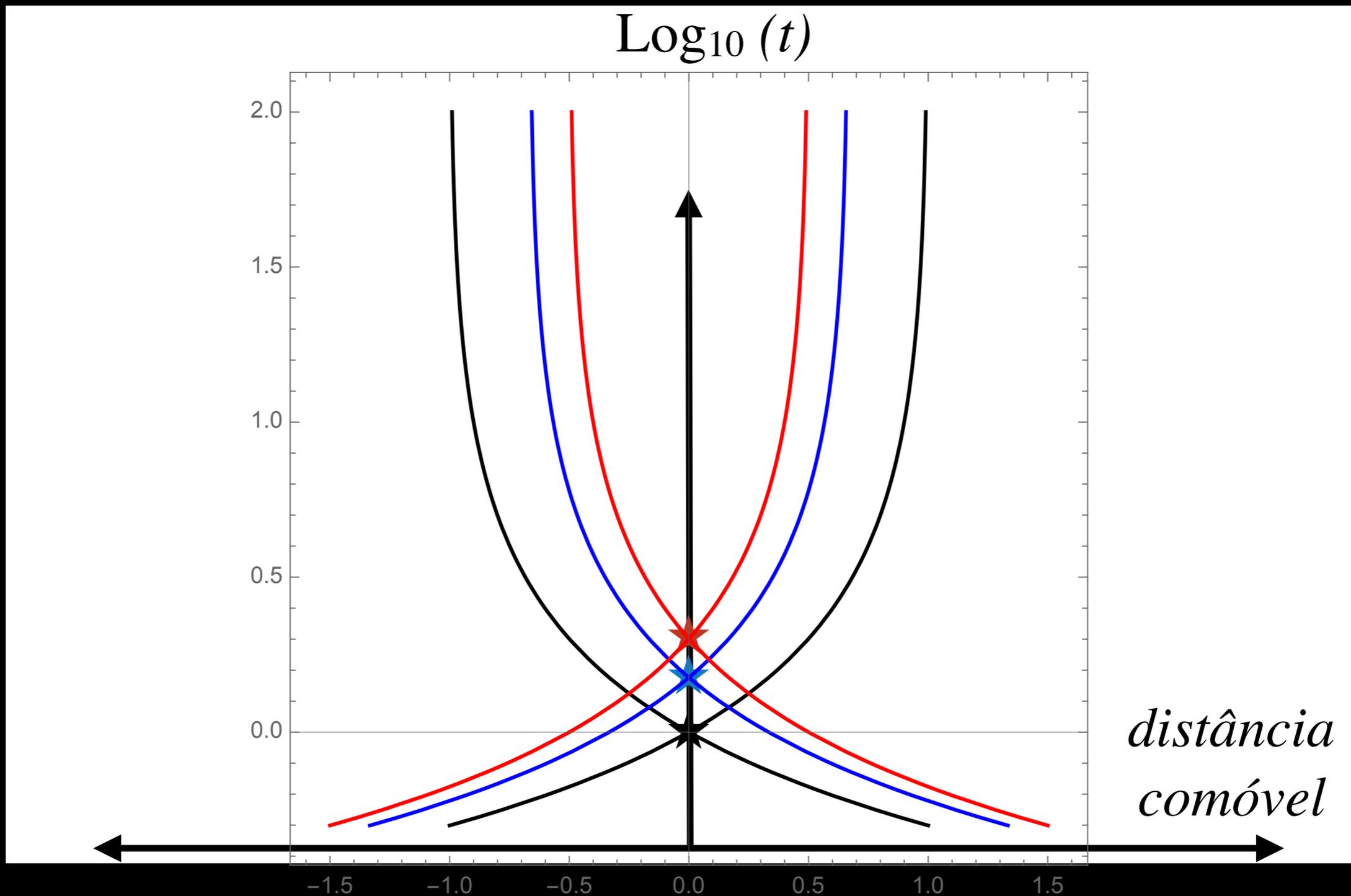
# Introdução à Cosmologia Física

- Vamos fazer os mesmos gráficos que foram feitos acima, mas agora para o cone de luz com  $p > 1$ . A novidade é o aparecimento de um **horizonte de eventos** (tipo "futuro"). Para  $p=2$  e vários "eventos" em  $x=0$  e  $t=1, 1.5$  e  $2$ , temos:



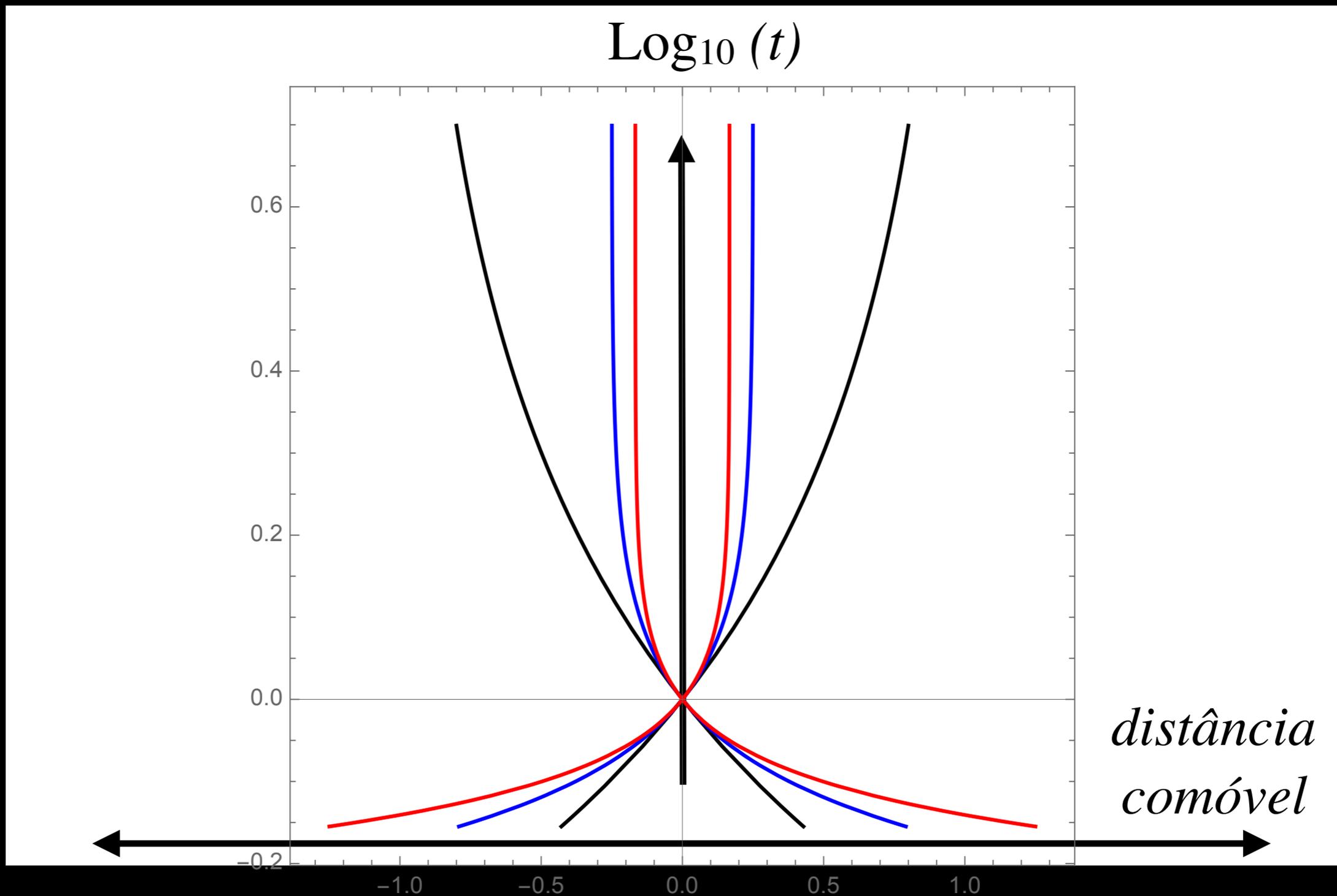
# Introdução à Cosmologia Física

- O mesmo gráfico ( $p=2$  e vários "eventos" em  $x=0$  e  $t=1, 1.5$  e  $2$ ) em escala logarítmica:



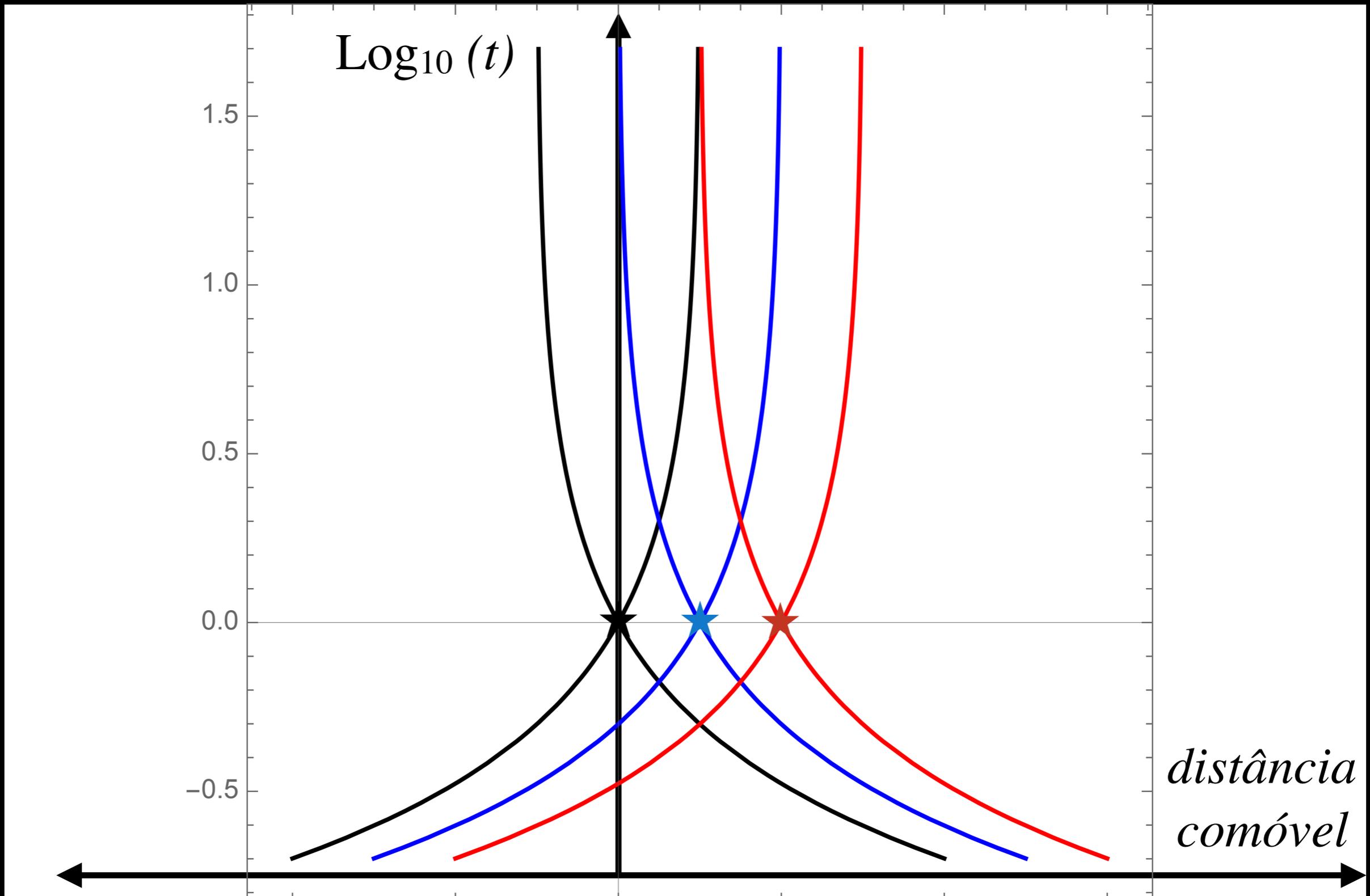
# Introdução à Cosmologia Física

- Vamos agora ver como a lei de potência muda o cone de luz nesses casos. Abaixo temos o resultado para  $p=2$ ,  $5$  e  $7$ , para um evento em  $x=0$  e  $t=1$ :



# Introdução à Cosmologia Física

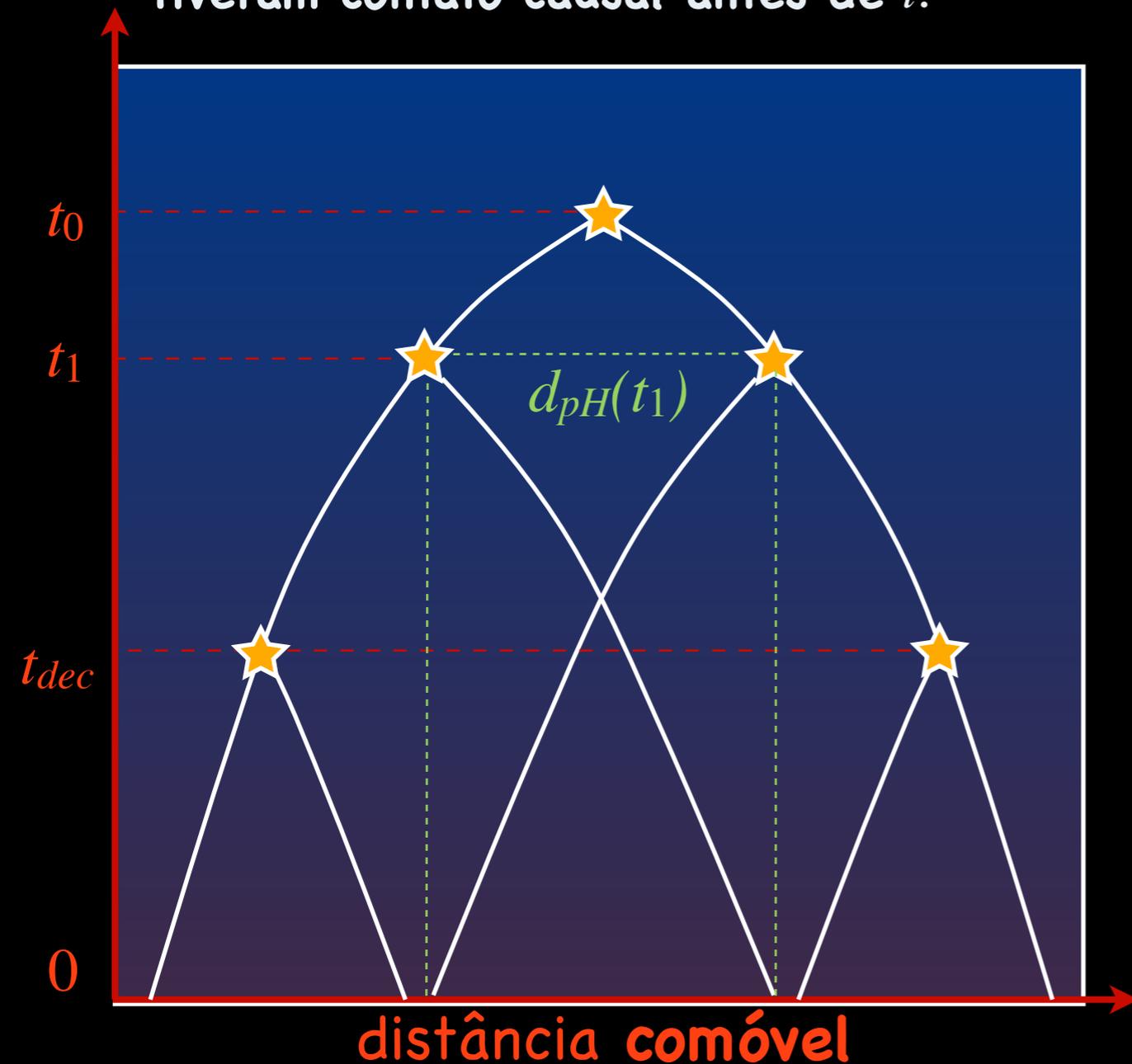
- Cone de luz no caso  $p=2$ , e observadores em  $t=1$ ,  $x=0, 1, 2$  e  $4$ :



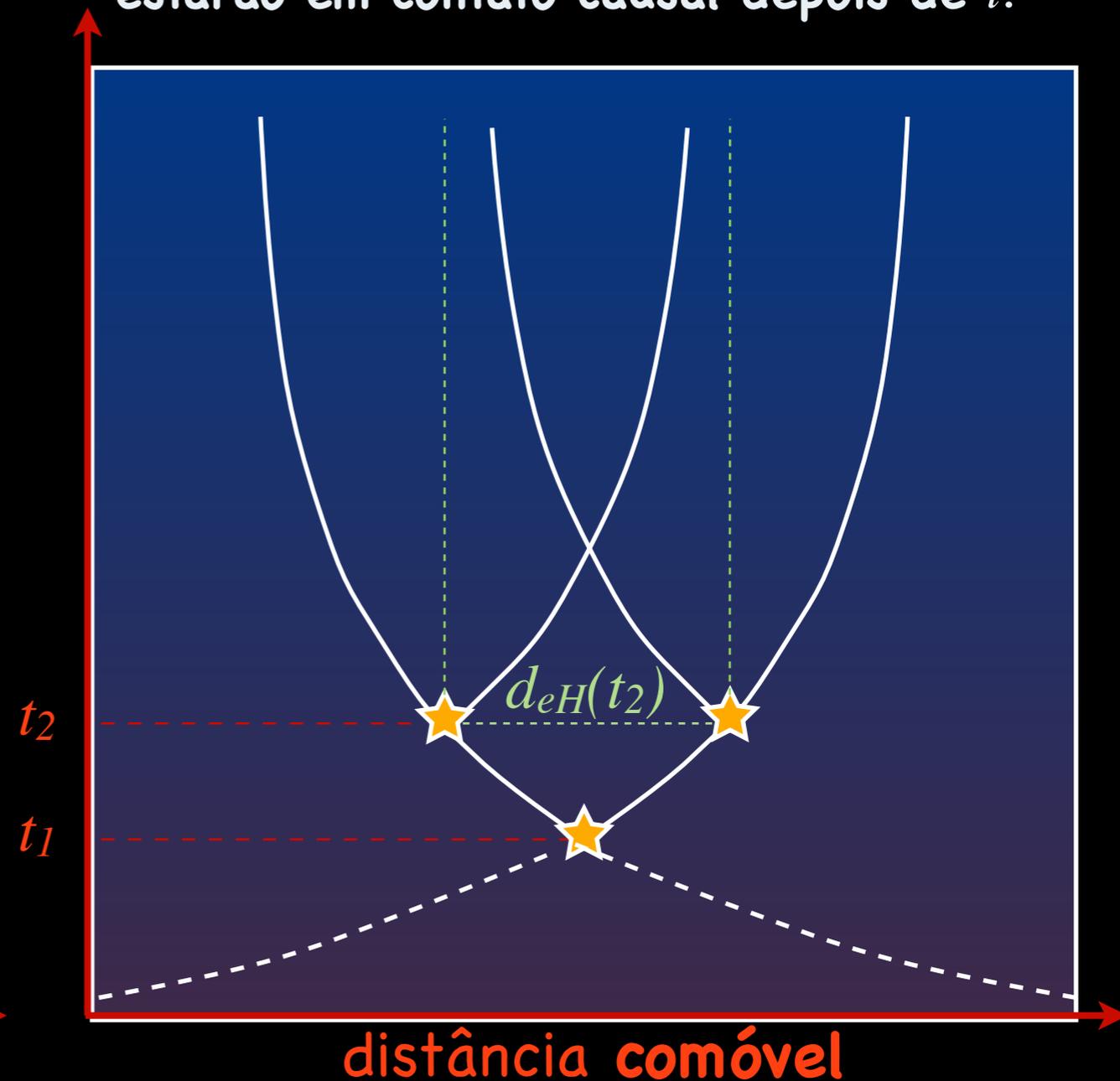
# Introdução à Cosmologia Física

- O significado físico de um **horizonte** é profundo: ele demarca as **fronteiras causais**

⇒ Um **horizonte de partículas** limita o CLP de observadores em um instante  $t$ : pares de observadores separados por distâncias maiores do que  $d_{pH}$  no tempo  $t$  nunca tiveram contato causal antes de  $t$ .

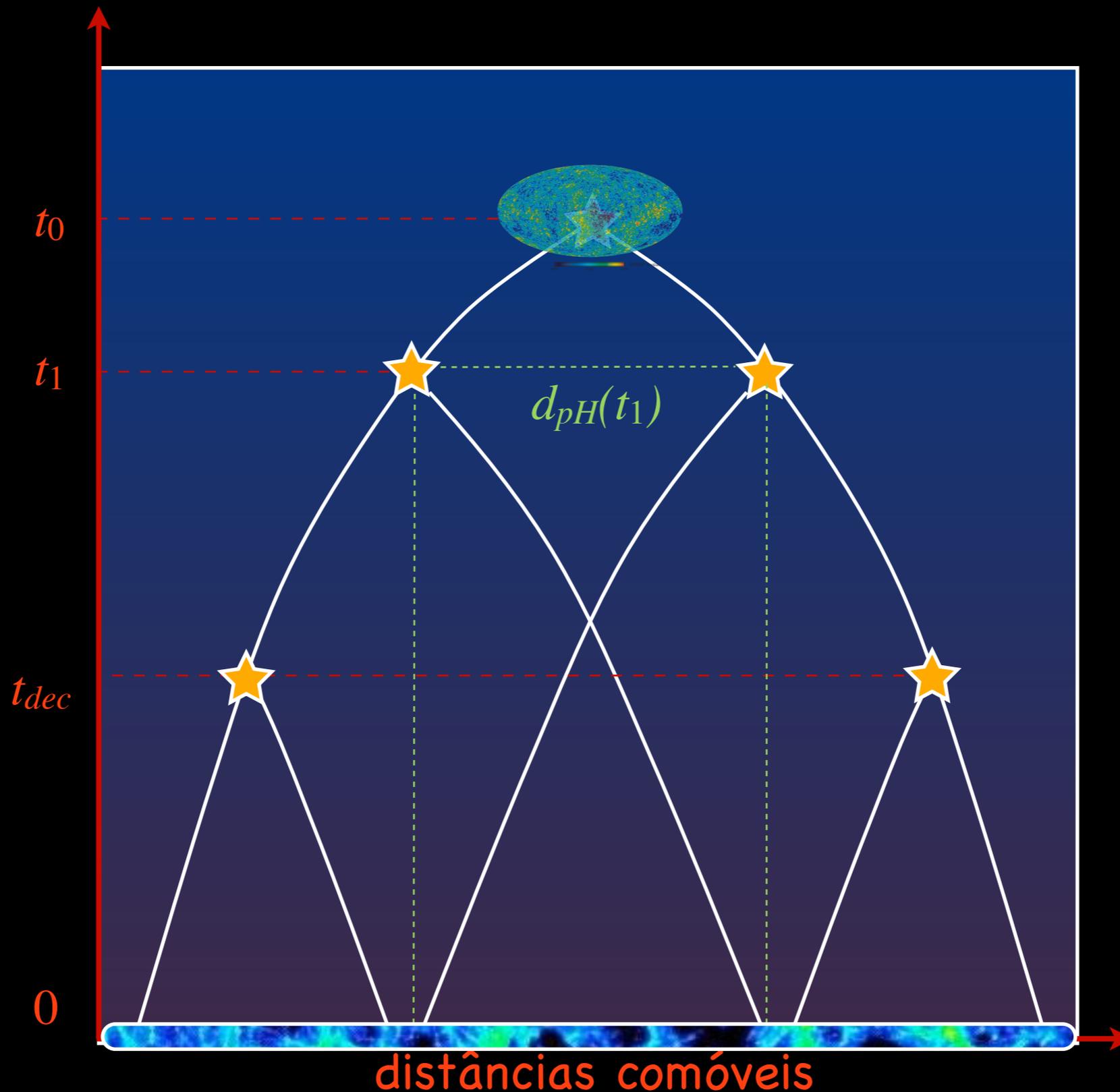


⇒ Um **horizonte de eventos** limita o CLF de observadores em um instante  $t$ : pares de observadores separados por distâncias maiores do que  $d_{eH}$  no tempo  $t$  nunca mais estarão em contato causal depois de  $t$ .



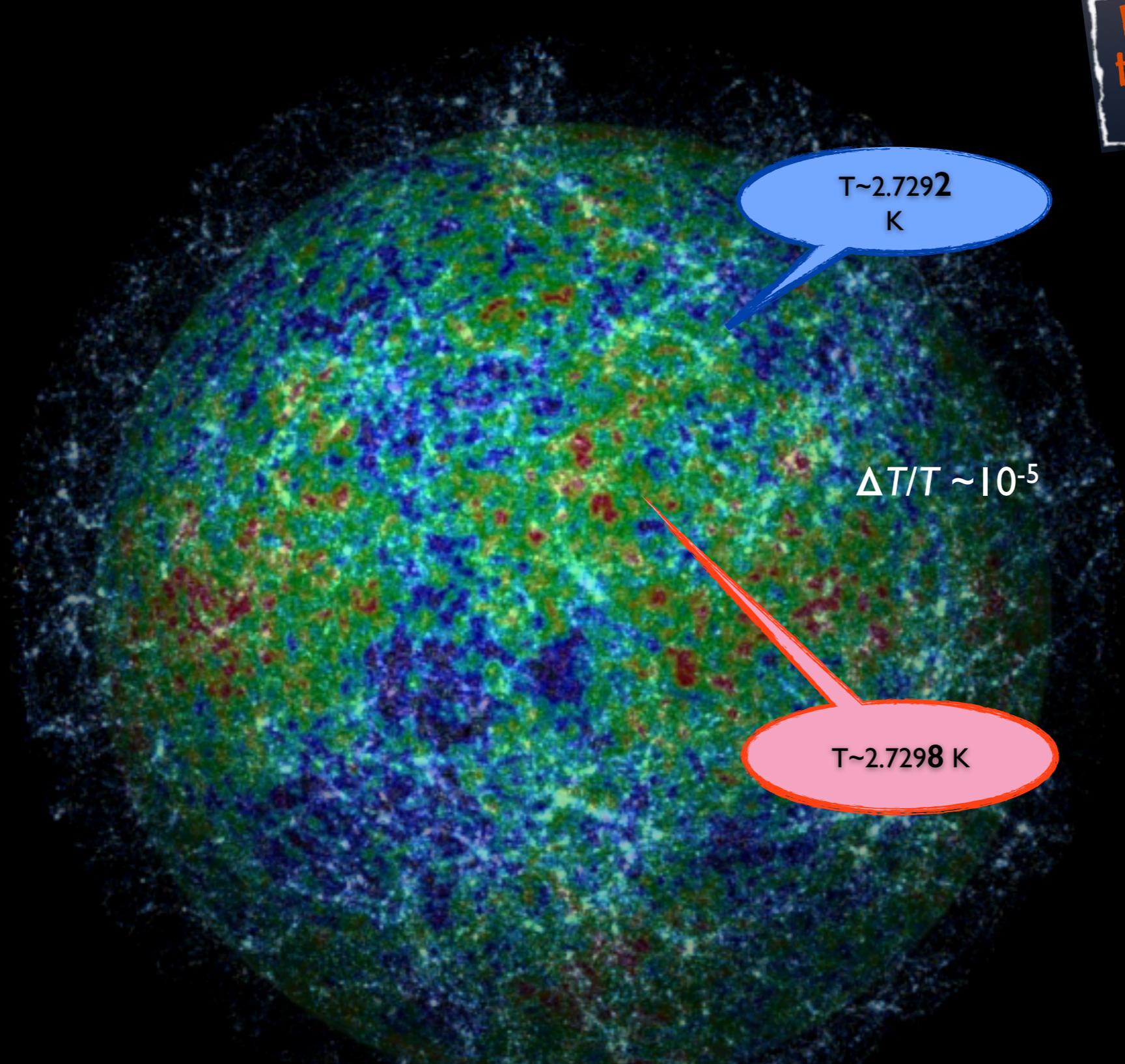
# Introdução à Cosmologia Física

- No modelo "padrão" de FLRW com Big Bang "quente", a primeira situação é a que ocorre: nosso universo desacelerado possuiria um horizonte de partículas - pequeno!



# Introdução à Cosmologia Física

**Mas como a RCF pode ser tão homogênea em escalas tão grandes?**



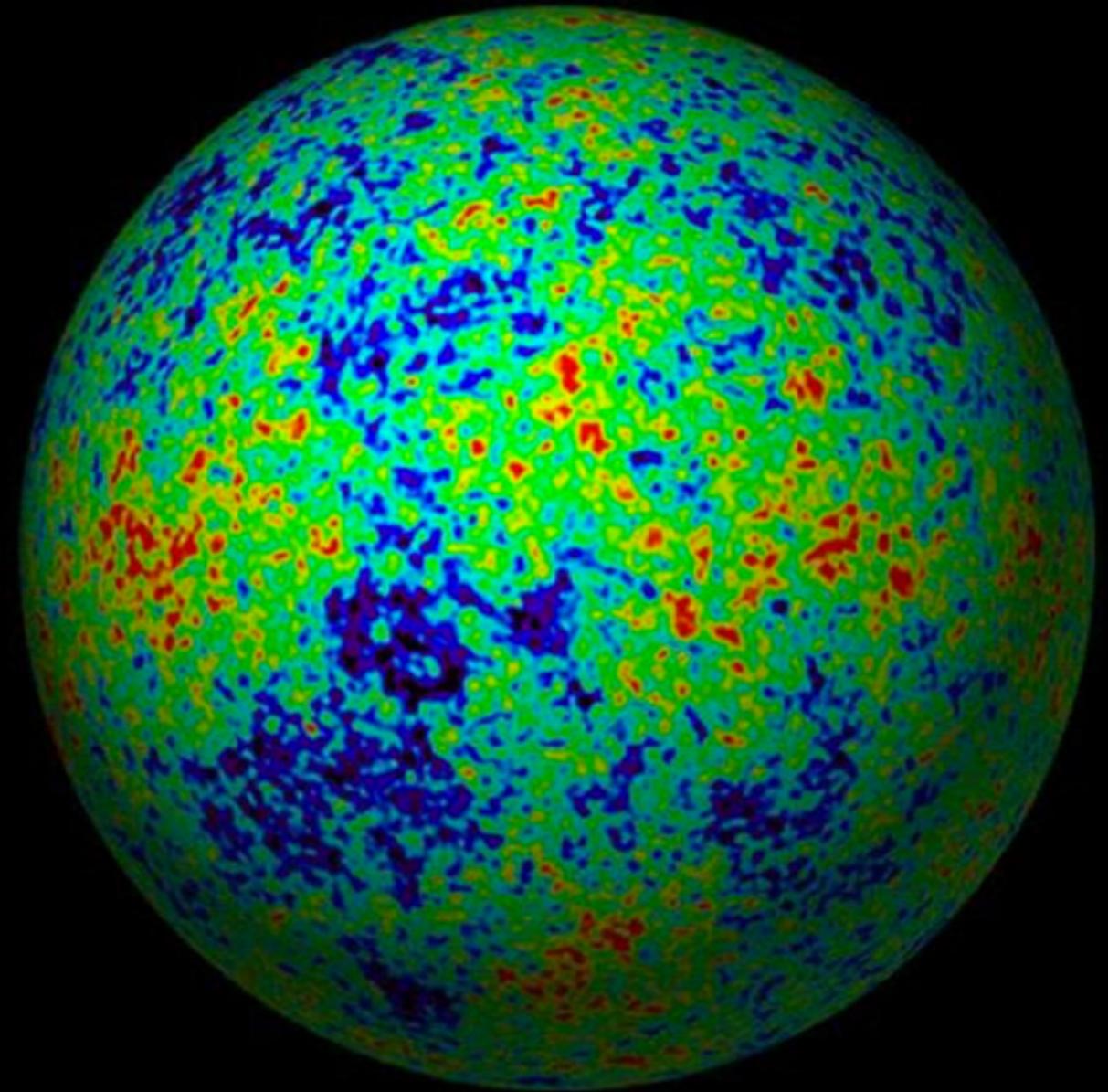
T~2.7292  
K

$\Delta T/T \sim 10^{-5}$

T~2.7298 K

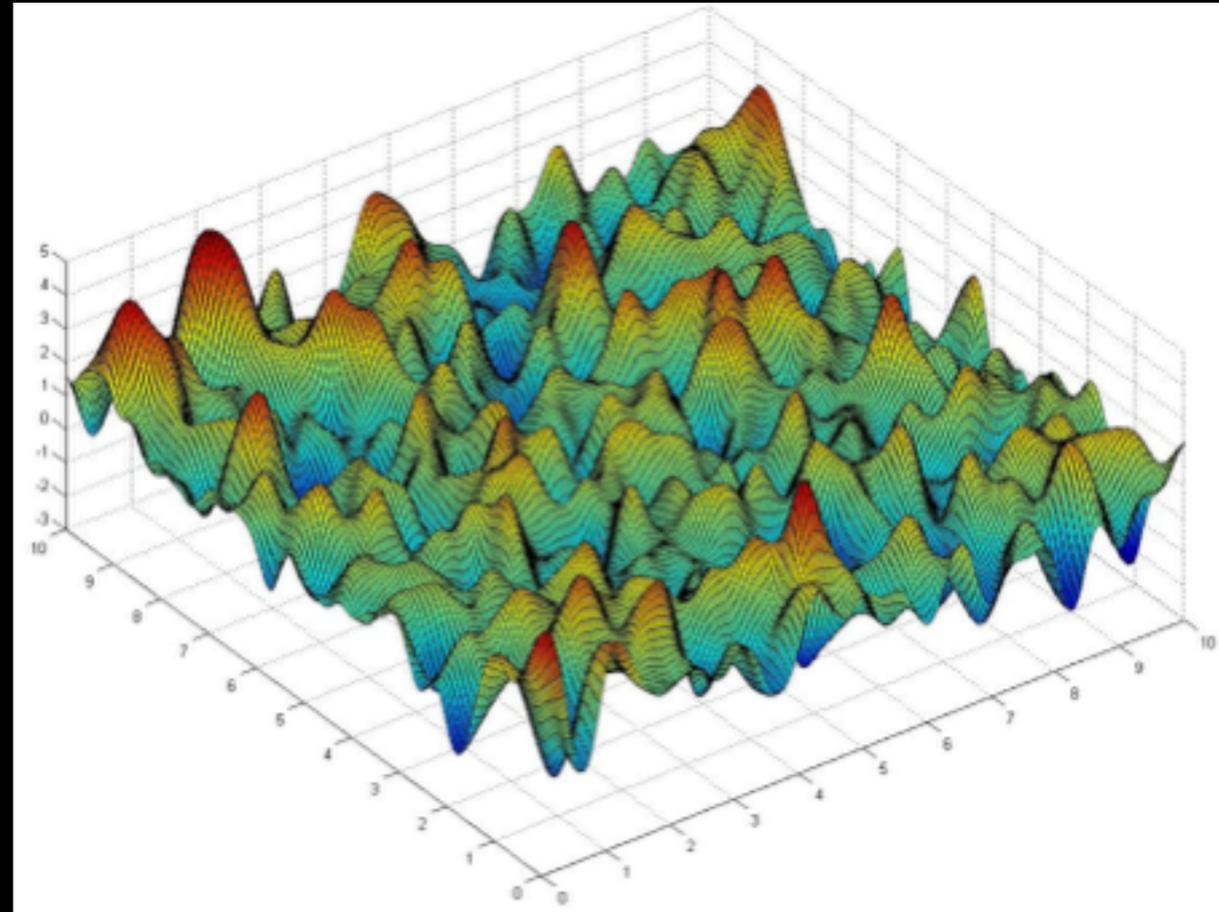
**#3: O universo "fotografado" pela RCF possuía flutuações de densidade MUITO particulares:**

- ➔ **Flutuações Gaussianas**
- ➔ **Espectro das flutuações era quase invariante de escala**



→ Flutuações Gaussianas

$$f(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$



“Modos” do campo são números aleatórios, com distribuição Gaussiana:

$$\tilde{f}(\vec{k}) \Rightarrow PDF[\tilde{f}(\vec{k})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi P_f(\vec{k})}} e^{-\frac{1}{2} \frac{|\tilde{f}(\vec{k})|^2}{P_f(\vec{k})}}$$

A dispersão dessa Gaussiana é chamada de ESPECTRO:  $P_f(\vec{k}) \longleftrightarrow \sigma_f^2(\vec{k})$

# Introdução à Cosmologia Física

Campos Gaussianos têm a propriedade de que:

$$\langle \tilde{f}(\vec{k}) \tilde{f}^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_f(\vec{k}) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

Se o campo de flutuações de densidade ( $\delta\rho$ ) é Gaussiano, e o universo é, na média, homogêneo e isotrópico, então:

$$P_\rho(\vec{k}) \rightarrow P_\rho(k)$$

De fato:  $\langle \delta\rho(\vec{x}) \delta\rho(\vec{x}') \rangle = \langle \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\delta\rho}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \tilde{\delta\rho}^*(\vec{k}') e^{+i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \rangle$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \langle \tilde{\delta\rho}(\vec{k}) \tilde{\delta\rho}^*(\vec{k}') \rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{k}'\cdot\vec{x}} \times (2\pi)^3 P_\rho(k) \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

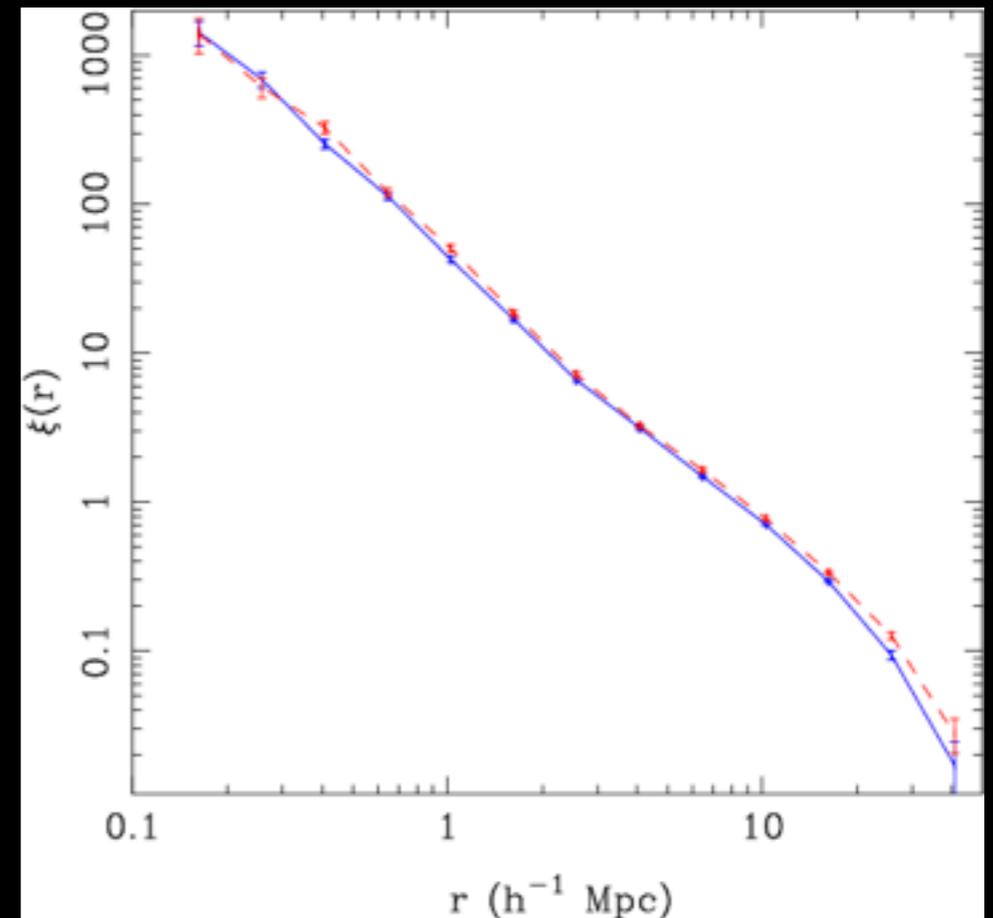
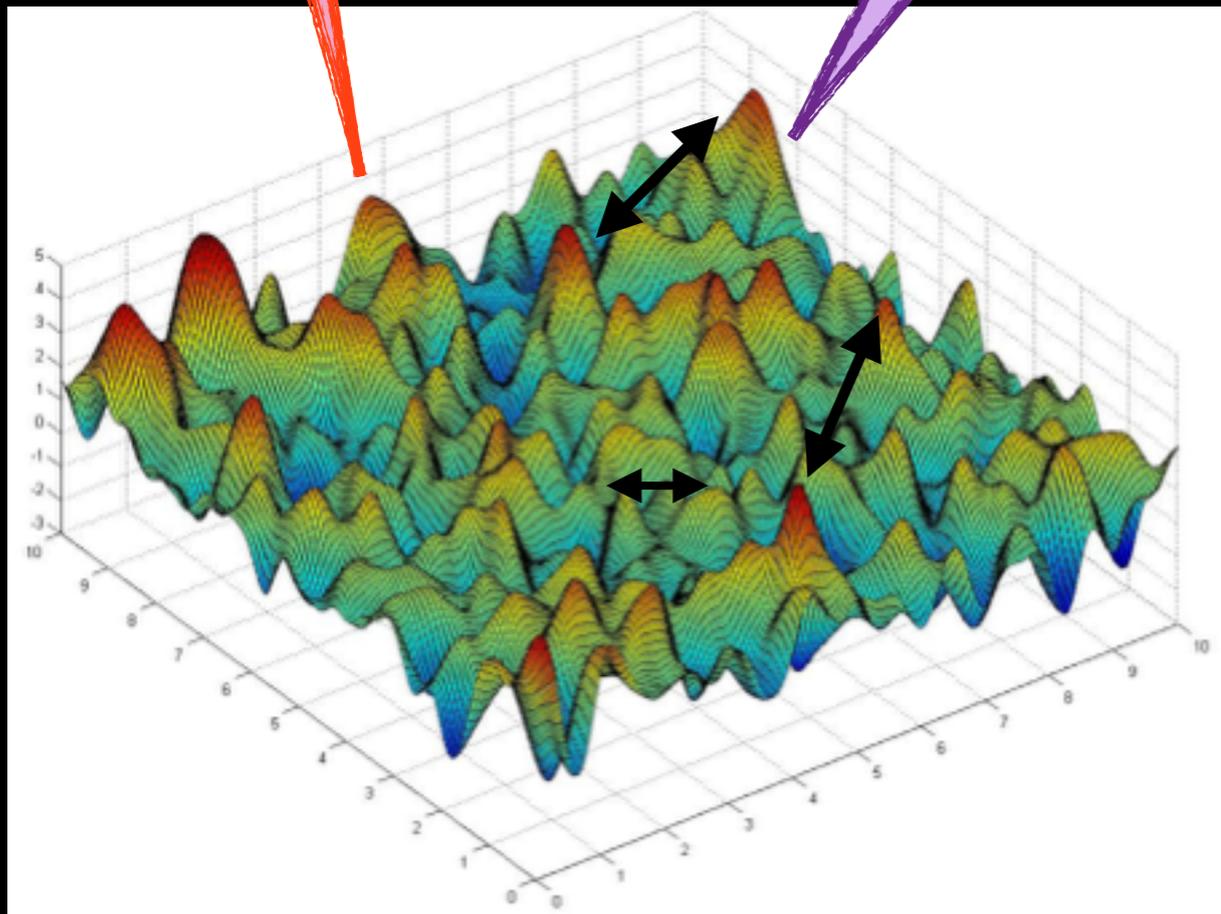
$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} P_\rho(k) = \xi(|\vec{x} - \vec{x}'|)$$

Só depende da distância entre  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  !!!

# Introdução à Cosmologia Física

A posição de cada pico é aleatória

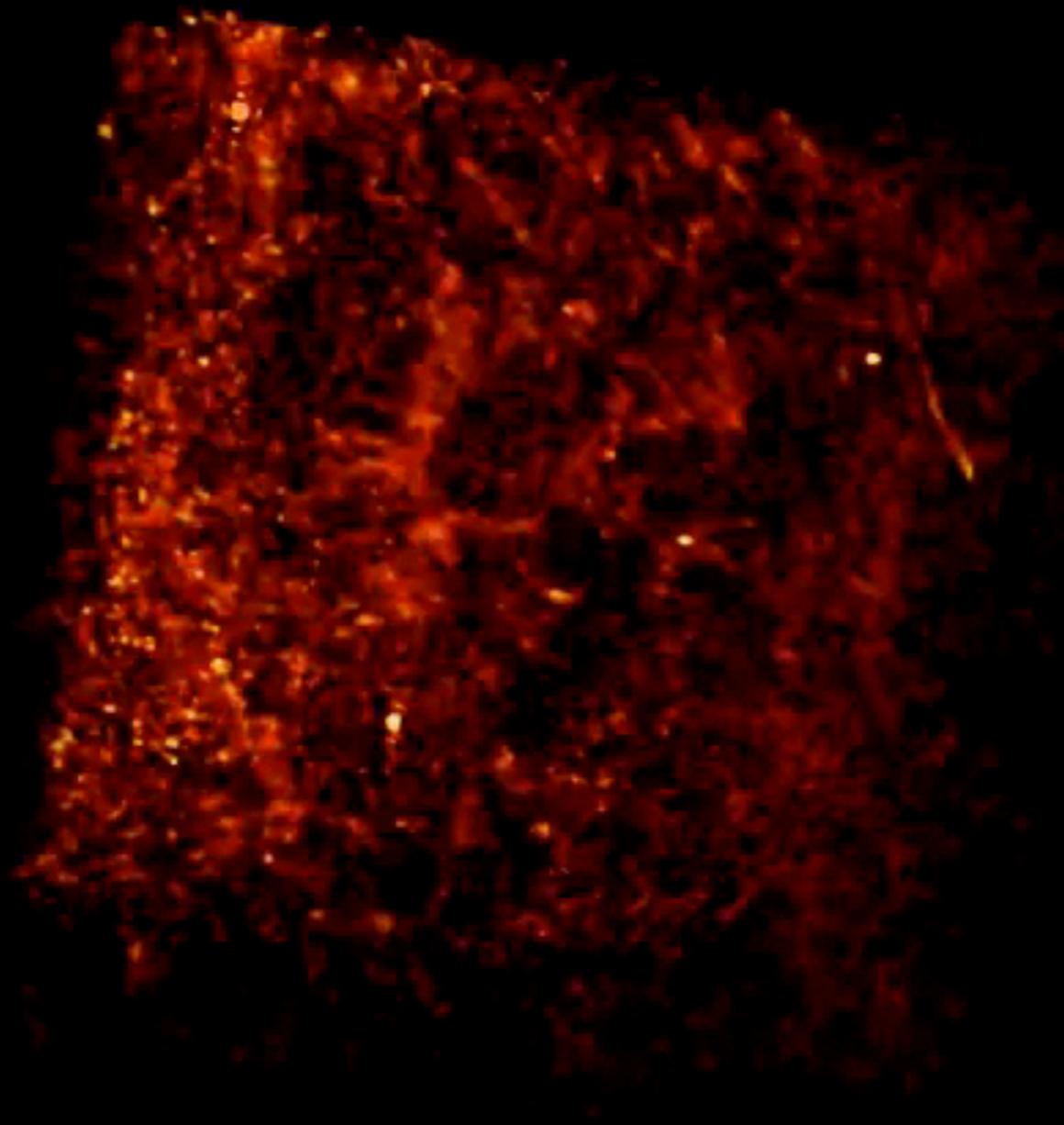
As distâncias típicas entre os picos, não!



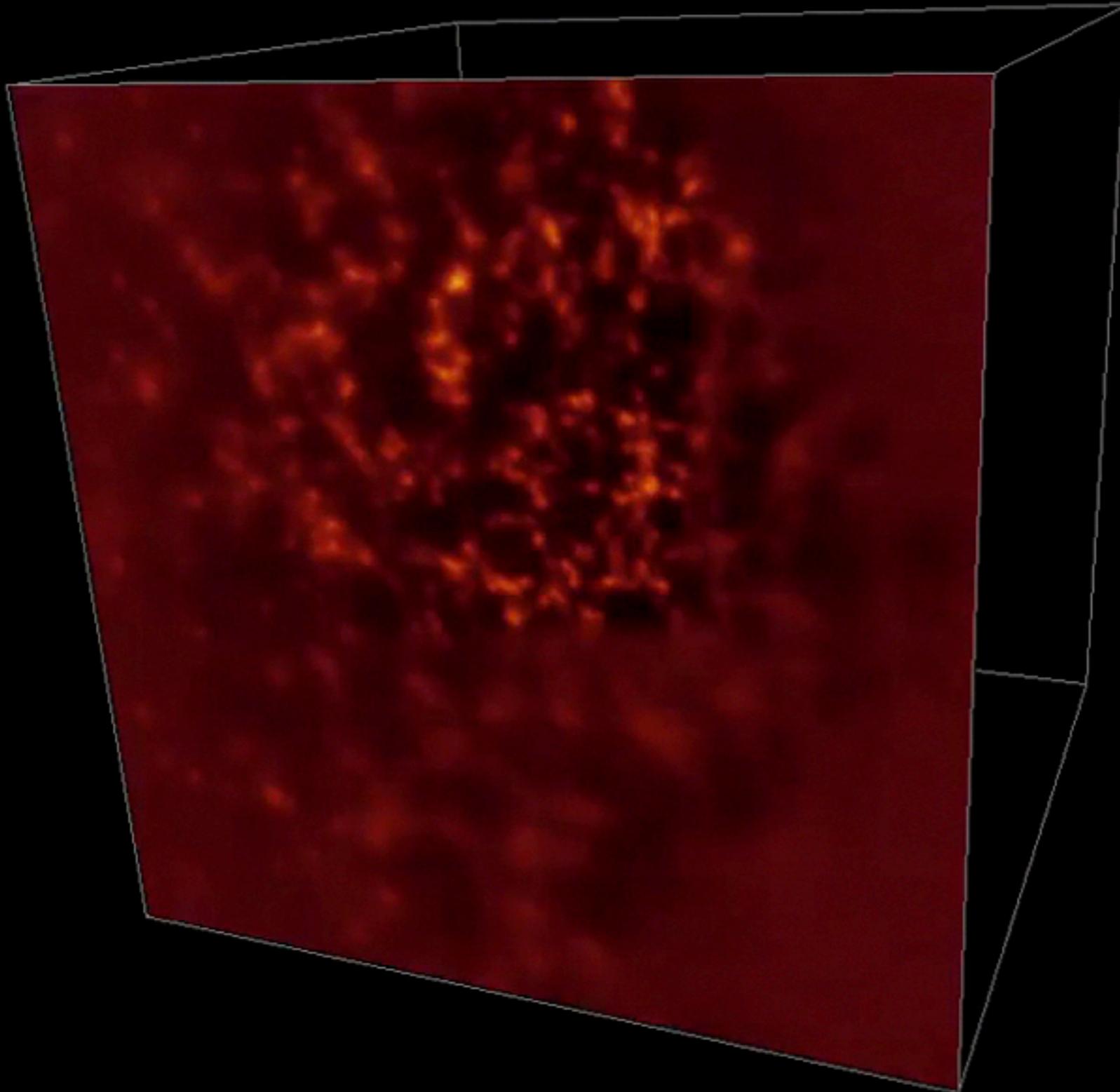
Função de correlação:  $\xi(|\vec{x} - \vec{x}'|) = \xi(r)$

# Introdução à Cosmologia Física

Em 3D:



"Tomografia" dessa distribuição 3D:



# Introdução à Cosmologia Física

A função de correlação e o espectro são praticamente o mesmo objeto:

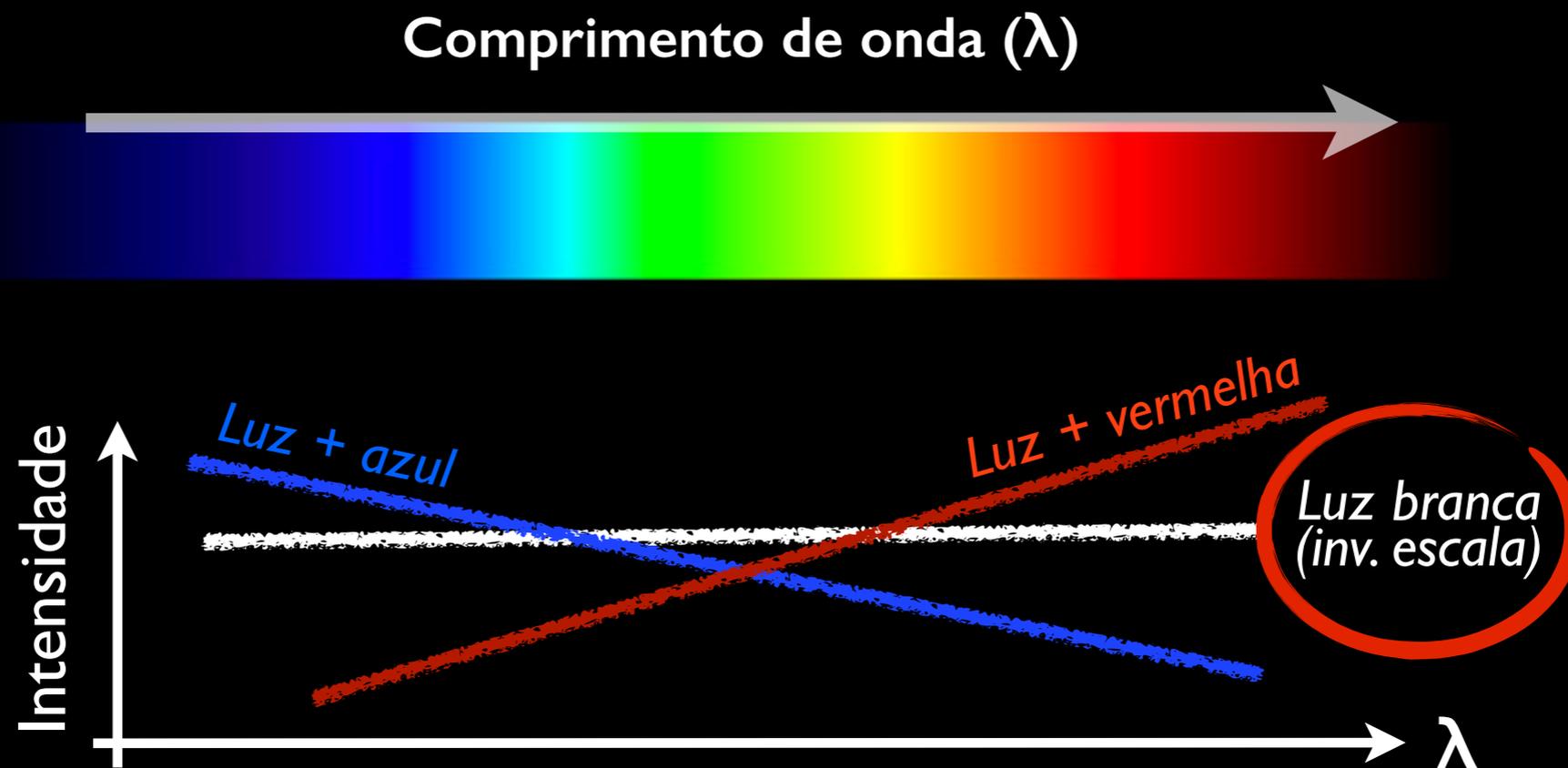
$$\xi(r) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} P_\rho(k) \iff P(k) = \int d^3 r e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \xi(r)$$

O espectro das perturbações de densidade é um dos objetos mais fundamentais em Cosmologia.

E a característica mais importante desse espectro é o fato de que ele é quase invariante de escala

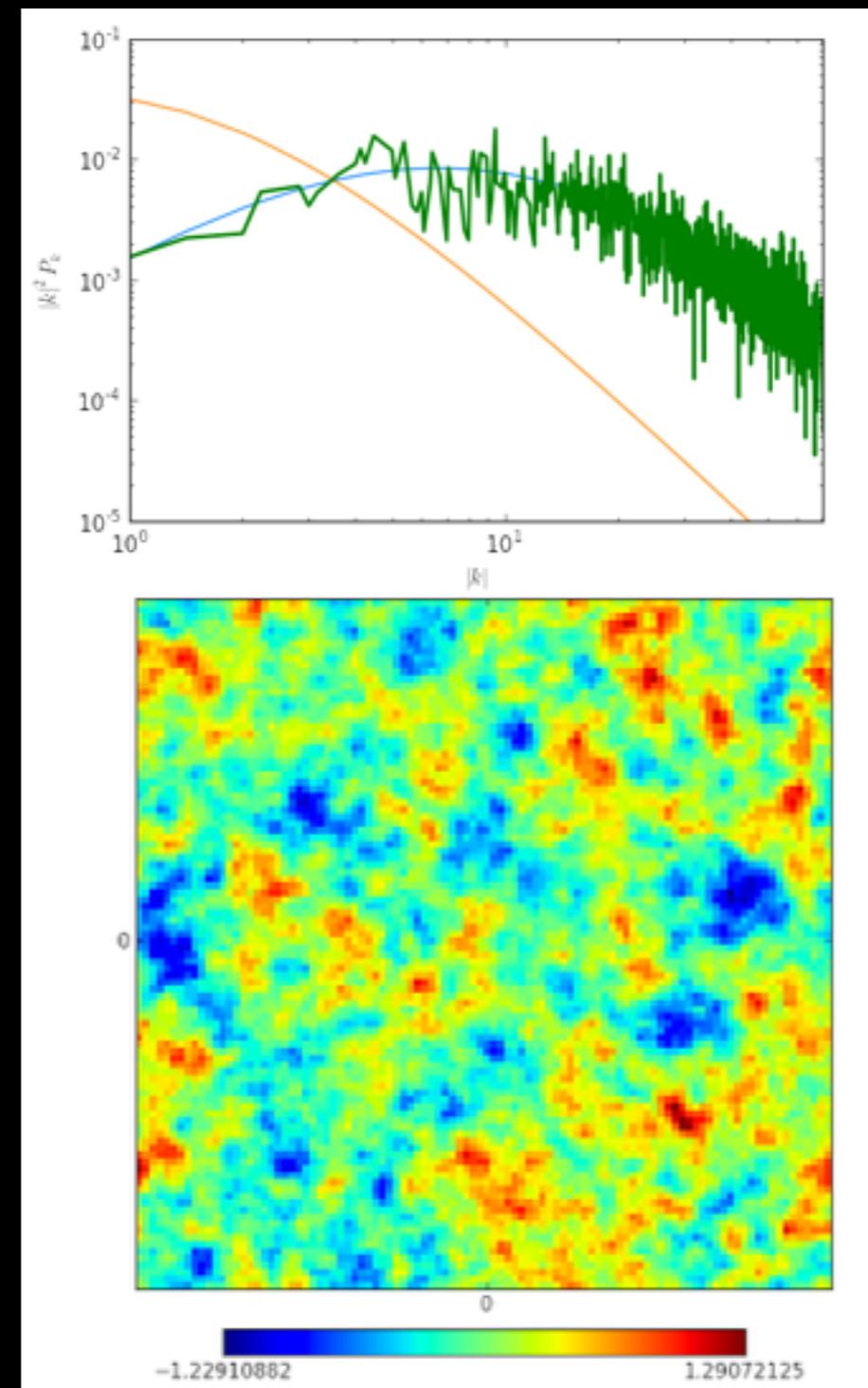
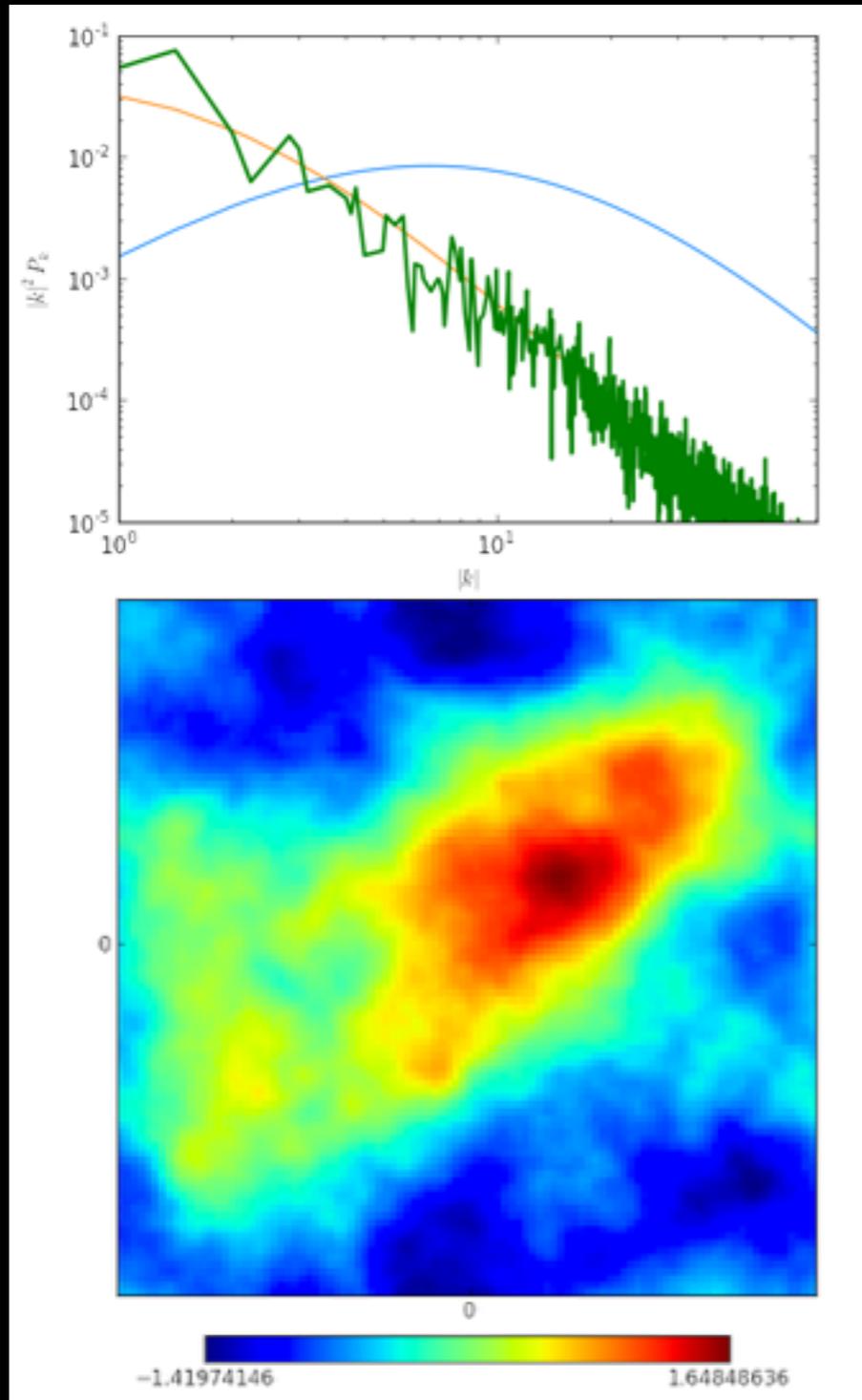
# Introdução à Cosmologia Física

Espectro "quase invariante de escala": analogia com ondas de luz



# Introdução à Cosmologia Física

## Outros exemplos de espectros — e os campos associados



OK, então, para resumir, vivemos num universo que “escolheu” ter algumas propriedades muito particulares:

- Curvatura espacial incrivelmente pequena
- Extrema homogeneidade (inexplicável por argumentos causais)
- Flutuações Gaussianas
- Espectro das flutuações de densidade quase invariante de escala

**COMO?  
POR QUÊ??**

 **Próxima aula**