Nesta aula estudamos condições suficientes para que as derivadas parciais de um campo escalar comutem. Como na maioria dos casos estudados tal fato era trivialmente satisfeito, buscamos inspiração em um exemplo onde deixa de ser verdadeiro.

Exemplo 9.1: " Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}) = \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0, & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$

As derivadas parciais comutam?

Solução: Precisamos verificar se $\partial_1 \partial_2 f(\mathbf{x}) = \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{x})$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Há dois casos a se considerar:

(i) $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\partial_1 f(\mathbf{x}) = y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \cdot y \cdot \frac{2x(\cancel{x^2}+y^2) - 2x(\cancel{x^2}-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_2 \partial_1 f(\mathbf{x}) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{-2y(\cancel{x^2}+y^2) - 2y(\cancel{x^2}-y^2)}{(x^2+y^2)^2} +$$

$$+ \frac{12x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^3 \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{12x^2y^2(x^2+y^2) - 16x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\partial_2 f(x) = x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \cdot y \; \frac{-2y(x^2+\cancel{y^2}) - 2y(x^2-\cancel{y^2})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= x \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_1\partial_2 f(x) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + x \cdot \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$- \frac{12x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 4x^3y^2 \cdot 2(x^2+y^2) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^4}$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{12x^2y^2(x^2+y^2) - 16x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

Simplificando as expressões acima obtemos:

$$\partial_2\partial_1 f(x) = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$ (exercício)

$$\partial_1\partial_2 f(x) = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}$$

então para $x \neq 0$, as derivadas parciais comutam

(ii) $x = 0$: por definição

$$\partial_2 \partial_1 f(0) = \lim_{k \to 0} \frac{\partial_1 f(0,k) - \partial_1 f(0,0)}{k}$$

notando que

$$\partial_1 f(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e que para $k \neq 0$,

$$\partial_1 f(0,k) = -\frac{k^3}{k^2} = -k$$

concluímos que:

$$\partial_2 \partial_1 f(0) = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k} = -1$$

Por outro lado

$$\partial_1 \partial_2 f(0) = \lim_{k \to 0} \frac{\partial_2 f(k,0) - \partial_2 f(0,0)}{k},$$

notando que:

$$\partial_2 f(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

e que para $k \neq 0$

$$\partial_2 f(k,0) = \frac{k^3}{k^2} = k$$

concluímos que

$$\partial_1\partial_2 f(0) = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1 \qquad \text{(exercício)}$$

Consequentemente, $\partial_1\partial_2 f(0) = \partial_2\partial_1 f(0)$. "

No exemplo que acabamos de estudar as duas derivadas parciais mistas $\partial_1\partial_2 f$ e $\partial_2\partial_1 f$ não eram contínuas na origem; o ponto onde deixavam de comutar. Contudo, nos demais pontos ambas $\partial_1\partial_2 f$ e $\partial_2\partial_1 f$ eram contínuas e iguais. Portanto, ilustrando uma conexão entre a continuidade das derivadas parciais mistas e sua comutatividade.

<u>Teorema 9.2</u>: " Seja $f: S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um campo escalar cujas derivadas parciais $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ e $\partial_2\partial_1 f$ existem em S. Se a derivada parcial mista $\partial_2\partial_1 f$ for contínua em S, então existe $\partial_1\partial_2 f(a)$ tal que

$$\partial_2\partial_1 f(a) = \partial_1\partial_2 f(a), \quad \forall a \in \mathring{S}. \text{"}$$

<u>Demonstração</u>:

Sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{R}$ tais que o retângulo com vértices:

a, $a + h_1 e_1$, $a + h_2 e_2$ e $a + h_1 e_1 + h_2 e_2$

Esteja completamente contido em S, i.e.

$$R = \{ \mathbb{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbb{x} = \mathbb{a} + t_1 \mathbb{e}_1 + t_2 \mathbb{e}_2 ,\ t_1 \in [0, h_1], t_2 \in [0, h_2] \} \subset S$$

e considere a seguinte quantidade:

$$\Delta(h_1, h_2) = f(\mathbb{a} + h_1 \mathbb{e}_1 + h_2 \mathbb{e}_2) - f(\mathbb{a} + h_1 \mathbb{e}_1)$$
$$- f(\mathbb{a} + h_2 \mathbb{e}_2) + f(\mathbb{a}).$$

A seguir expressamos $\Delta(h_1, h_2)$ em termos de $\partial_2 \partial_1 f$. Para tanto introduzimos a seguinte função de uma variável real:

$$G(x) : [a_1, a_1 + h_1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad G(x) = f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2)$$

$$\Rightarrow \Delta(h_1, h_2) = G(a_1 + h_1) - G(a_1)$$

Como $G(x)$ é uma função contínua em $[a_1, a_1 + h_1]$ e diferenciável em $(a_1, a_1 + h_1)$, podemos invocar o <u>teorema do valor médio</u> para garantir que

$$\exists x_1 \in (a_1, a_1 + h_1) \mid G(a_1 + h_1) - G(a_1) = G'(x_1) \cdot h_1$$

Por outro lado, como

$$G'(x) = \partial_1 f(x, a_2 + h_2) - \partial_1 f(x, a_2)$$

temos que:

$$\Delta(h_1, h_2) = h_1 [\partial_1 f(x_1, a_2 + h_2) - \partial_1 f(x_1, a_2)]$$

Invocando novamente o teorema do valor médio, $\exists\, x_2 \in (a_2, a_2 + h_2)$

tal que

$$\Delta(h_1, h_2) = h_1 h_2\, \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1 h_2} \qquad (*)$$

A seguir precisamos provar que existe o limite

$$\partial_1 \partial_2 f(a_1, a_2) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{\partial_2 f(a_1 + h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} \qquad (**)$$

Como, por definição:

$$\partial_2 f(a_1, a_2) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2)}{h_2}$$

$$\partial_2 f(a_1 + h_1, a_2) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2)}{h_2}$$

De forma que podemos escrever o quociente em (**) como:

$$\frac{\partial_2 f(a_1+h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{\Delta(h_1, h_2)}{h_1 h_2}$$

Usando (*) temos que

$$\frac{\partial_2 f(a_1+h_1, a_2) - \partial_2 f(a_1, a_2)}{h_1} = \lim_{h_2 \to 0} \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) \qquad (\#)$$

Logo, para completarmos a demonstração resta verificarmos que:

$$\lim_{h_1 \to 0} \lim_{h_2 \to 0} \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2) \qquad (\#\#)$$

Claramente, a equação (#) atesta a existência do limite:

$$\lim_{h_2 \to 0} \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) =: F(h_1)$$

Conseqüentemente,

$$(\#\#) \Leftrightarrow \lim_{h_1 \to 0} F(h_1) = \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2)$$

Por hipótese, $\partial_2 \partial_1 f$ é contínua em $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, logo,

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |\partial_2 \partial_1 f(\tilde{\mathbf{x}}) - \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a})| < \varepsilon/2$$

Tomando $|h_1| < \delta/2$ e $|h_2| < \delta/2$, o retângulo R inteiro estará contido na bola aberta $B(a, \delta)$, de forma que, em particular o ponto $x = (x_1, x_2) \in B(a, \delta)$. Portanto, temos que

$$0 \leqslant |\partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) - \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2)| < \varepsilon/2$$

Mantendo h_1 fixo e tomando o limite $h_2 \to 0$, usamos que

$$\lim_{h_2 \to 0} \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2) = F(h_1)$$

e que os demais termos independem de h_2, para concluir que:

$$0 \leqslant |F(h_1) - \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Como tal desigualdade é válida $\forall \varepsilon > 0$ com $|h_1| < \delta$, concluímos que

$$\lim_{h_1 \to 0} F(h_1) = \partial_2 \partial_1 f(a_1, a_2)$$

$\blacksquare$

Um comentário final é que o teorema 9.2 permanece válido ao trocarmos os papéis das derivadas parciais mistas $\partial_1 \partial_2 f$ e $\partial_2 \partial_1 f$.