Instituto de Física USP

Física V - Aula 23

Professora: Mazé Bechara

Aula 23 – Aplicações de Wilson-Sommerfeld. A proposta de de Broglie de caráter dual das partículas materiais

1. **Aplicações de Wilson-Sommerfeld: partícula em movimento dentro de uma caixa; átomo de hidrogênio.**
2. **A proposta de de Broglie de caráter dual da matéria: enunciado e as relações de conexão** entre as grandezas ondulatórias (frequencia, ecomprimento de onda) e as mais características de partículas (energia e momento linear).
3. **A velocidade da onda da partícula material** com velocidades não relativísticas ou relativísticas.
4. **As regras de quantização que decorrem das ondas estacionárias das partículas na proposta de de Broglie: no átomo de H, na partícula presa em uma caixa com movimento de velocidade constante. Comparação com a quantização de Wilson-Sommerfeld.**

A regra de quantização de Wilson-Sommerfeld

- Para **qualquer sistema físico, em movimento periódico,** existe a seguinte condição de quantização:

$$\oint_{1T} p_q dq = n_q h$$

- n_q=0,1,2,3...

- q são as coordenadas (generalizadas) necessárias para a descrição do movimento, e p_q os momentos (generalizados) associados às coordenadas q. A integral deve ser realizada em um período (1T) do movimento.

Átomo de H na quantização de Wilson-Sommerfeld

- **Na variável angular θ:**

$$\oint_{1T} p_\theta d\theta = \int_0^{2\pi} L d\theta = n_\theta h$$

- **De onde decorre a hipótese sde Bohr: L=n_θh/2π**

O átomo de H na quantização de Wilson-Sommerfeld

- A regra de quantização na variável r:

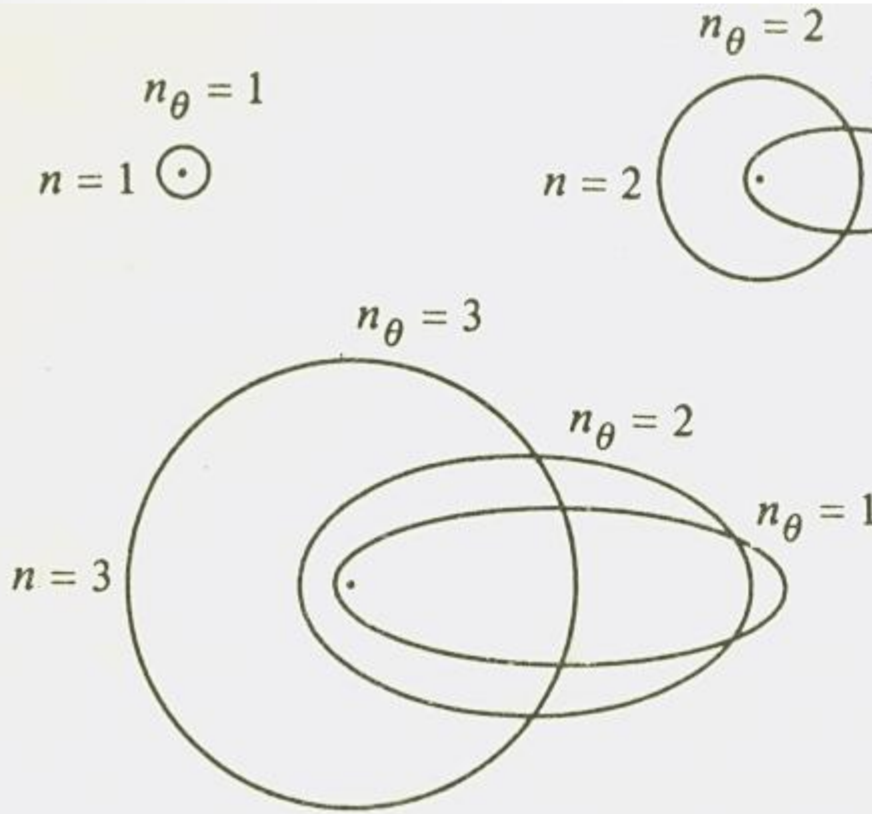
$$\oint_{1T} p_r dr = \int_0^{\infty} 2\mu \sqrt{E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_o}} dr = n_r h$$

- De onde decorre:

$$L = [\frac{a}{b} - 1] = n_r \hbar$$

- Os raios da elipse, a e b, são dados por:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\mu Z e^2} n^2 \hbar^2 \qquad b = a \frac{n_\theta}{n_r}$$



Estados atômicos **degenerados em energia do H** ou estados diferentes com mesma energia

Algumas órbitas elípticas de Bohr-Sommerfeld. O núcleo está localizado no foco comum das elipses, indicado pelo ponto.

$$E_n^{Wil-Som} = -\left(\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e}{2\hbar^2} \frac{1}{(n_\theta + n_r)^2} = -\frac{Z^2}{n^2} 13{,}60 eV$$

O átomo de H na quantização de Wilson-Sommerfeld

- Da equação de quantização na variáv el r:

$$L = [\frac{a}{b} - 1] = n_r \hbar$$

- Os raios da elipse, a e b, são dados por:

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_o}{\mu Z e^2} n^2 \hbar^2$$

$$b = a \frac{n_\theta}{n_r}$$

A expressão relativística de Sommerfeld

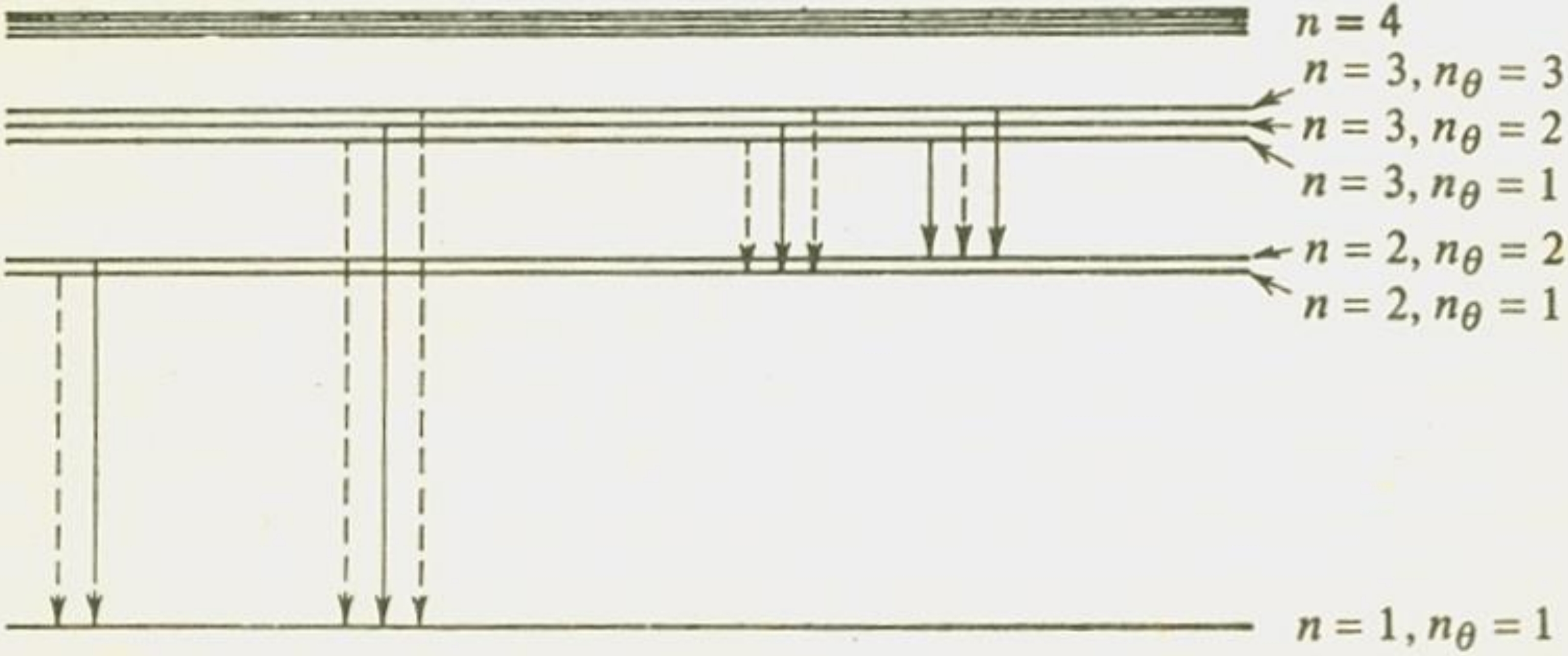
$$E_{n,\mathrm{n}_\theta}^{Som-relat} = -\left(\frac{\mathrm{Ze}^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\mu}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}\left[1+\frac{\alpha^2}{n}\left[\frac{1}{n_\theta}-\frac{3}{4n}\right]\right]$$

- $n = \mathrm{n}_\theta + \mathrm{n}_r$ n=1,2,3,....

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o\hbar c} = \frac{\upsilon_1}{c} \cong \frac{1}{137}$$

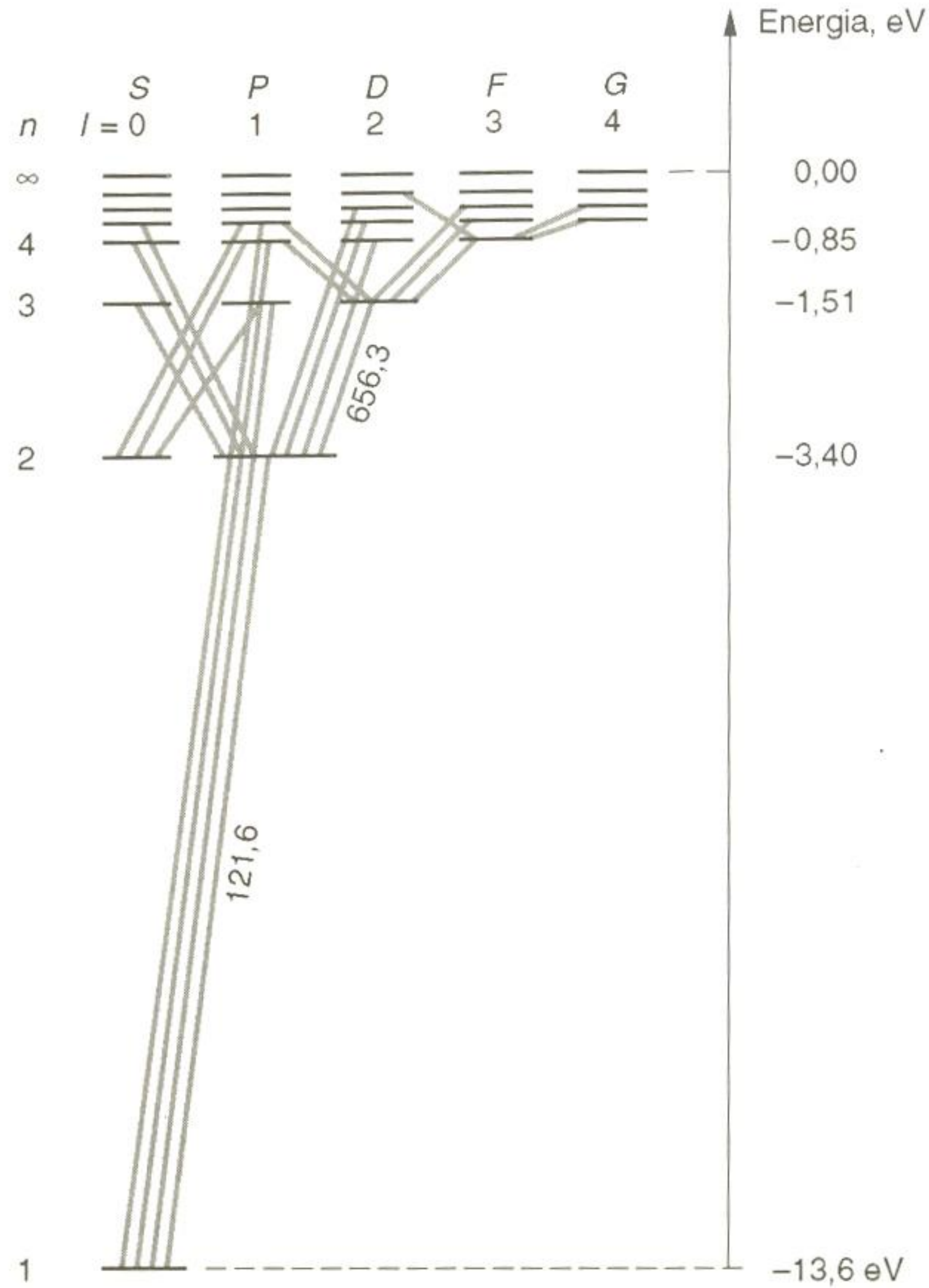
- α é a constante de estrutura fina

O átomo de H na quantização de Bohr-Wilson-Sommerfeld com correção relativística no movimento relativo – a quebra da degenerescência em energia e a estrutura fina do H.



A separação de estrutura fina de alguns níveis de energia do átomo de hidrogênio. A separação é bastante exagerada. Transições que produzem as linhas observadas no espectro do hidrogênio são indicadas por setas sólidas.

As transições das linhas tracejadas não são observadas, indicando a a existência da regra de seleção: $\Delta n_\theta = \pm 1$, em acordo com o princípio de correspondência de Bohr.



Resultado da Mecânica Quântica não relativística e sem spin - AGUARDE

Há **degenerescência dos auto-estados de energia:** **diferentes estados (diferentes funções de onda) com a mesma energia (aqui agrupados só nos diferentes ℓ)**

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$$

Compare com o modelo de Bohr e Wilson Sommerfeld!

Figura do livro : Modern Physics **- T. Thornton e Rex**

Princípio de de Broglie - 1924

- *Como a **radiação eletromagnética** tem caráter dual **(onda-partícula)** e é, juntamente com a **matéria** (partículas com massa de repouso não nula: partícula material) **constituinte do universo físico**, então a **simetria da natureza** exige que **a matéria também tenha caráter dual, ou seja, há uma onda associada à partícula material (partícula-onda).***

As relações de conexão partícula-onda – fótons e partículas materiais

- *As relações de conexão* entre as **grandezas do caráter corpuscular (E, p) com as do caráter ondulatório: (ν, λ) são as mesmas para os constituintes do universo físico - radiação eletromagnética e partículas de matéria.**
- Assim valem para fótons e partículas materiais as relações:

$$E = h\nu = \hbar w$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k$$

- **CUIDADO!**
  - **$\lambda\nu$=c para m_o=0**
  - **$\lambda\nu \neq$ v para $m_o \neq 0$ (demonstrado em aula!)**

Velocidades das ondas clássicas

Ondas monocromáticas:

$$\upsilon_{onda} = \lambda \nu = w/k$$

Ondas não monocromáticas:

$$\upsilon_{onda} = \upsilon_{grupo} = \frac{dw}{dk}$$

A velocidade da partícula-onda

- **Energia da partícula não relativística de velocidade constante:**

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

- **Momento linear e energia da partícula relativística:**

$$p = m\upsilon_{part} \qquad E = \sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4} = mc^2$$

- **A velocidade de fase, v=λν, e as relações de de Broglie:**

$$\upsilon_{onda}^{deBroglie} = \upsilon_{fase} = \lambda\nu = \frac{h}{\lambda} \times \frac{E}{h} = \frac{E}{p}$$

- **Então valeriam as seguintes igualdade:**

$$\upsilon_{onda}^{deBroglie} = [\frac{E}{p}]_{class} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{\upsilon_{part}}{2} !!!!!! \qquad \upsilon_{onda}^{deBroglie} = [\frac{E}{p}]_{relat} = \frac{mc^2}{m\upsilon_{part}} = \frac{c^2}{\upsilon_{part}} > c!!!!!$$

Conclusão: a partícula, com velocidade clássica ou relativística, e a onda associada não estão de acordo!!!

A velocidade da partícula-onda – cont.

- **A velocidade de grupo e as ondas de de Broglie:**

$$\upsilon_{onda} = \upsilon_{grupo} = \frac{dw}{dk} = \frac{\frac{dE}{\hbar}}{\frac{dp}{\hbar}} = \frac{dE}{dp}$$

- **Partícula com velocidade não relativística :**

$$\upsilon_{grupo} = \frac{dw}{dk} = [\frac{dE}{dp}]_{class} = \frac{2p}{2m} = \upsilon_{part}$$

- **Partícula com velocidade relativística:**
- $$\upsilon_{grupo} = \frac{dw}{dk} = [\frac{E}{p}]_{relat} = \frac{1}{2}\frac{2pc^2}{\sqrt{p^2c^2 + m_o^2c^4}} = \frac{pc^2}{mc^2} = \upsilon_{part}$$
- **Conclusão: O lado partícula e o lado onda estão de acordo sobre as suas velocidades!!! Adote-se a velocidade de grupo para as ondas das partículas!**

As ondas dos estados estacionários

- **Átomo de Hidrogênio e a onda de de Broglie:**
- **Onda circular estacionária de raio r,** inspirada nos estados estável e instáveis de Bohr: condição de onda estacionária e a relação de de Broglie:

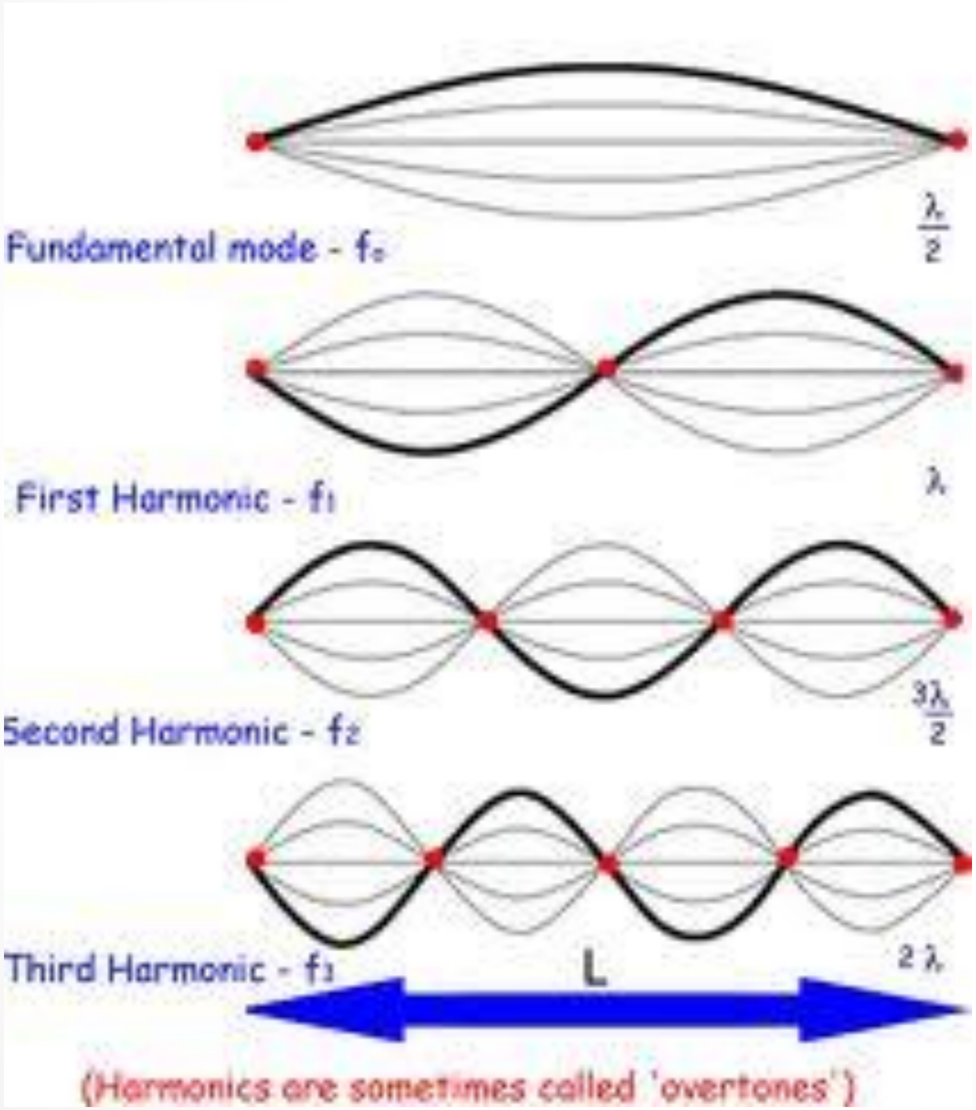
$$2\pi r = n\lambda = n\frac{h}{p}$$

Decorre uma regra de quantização:

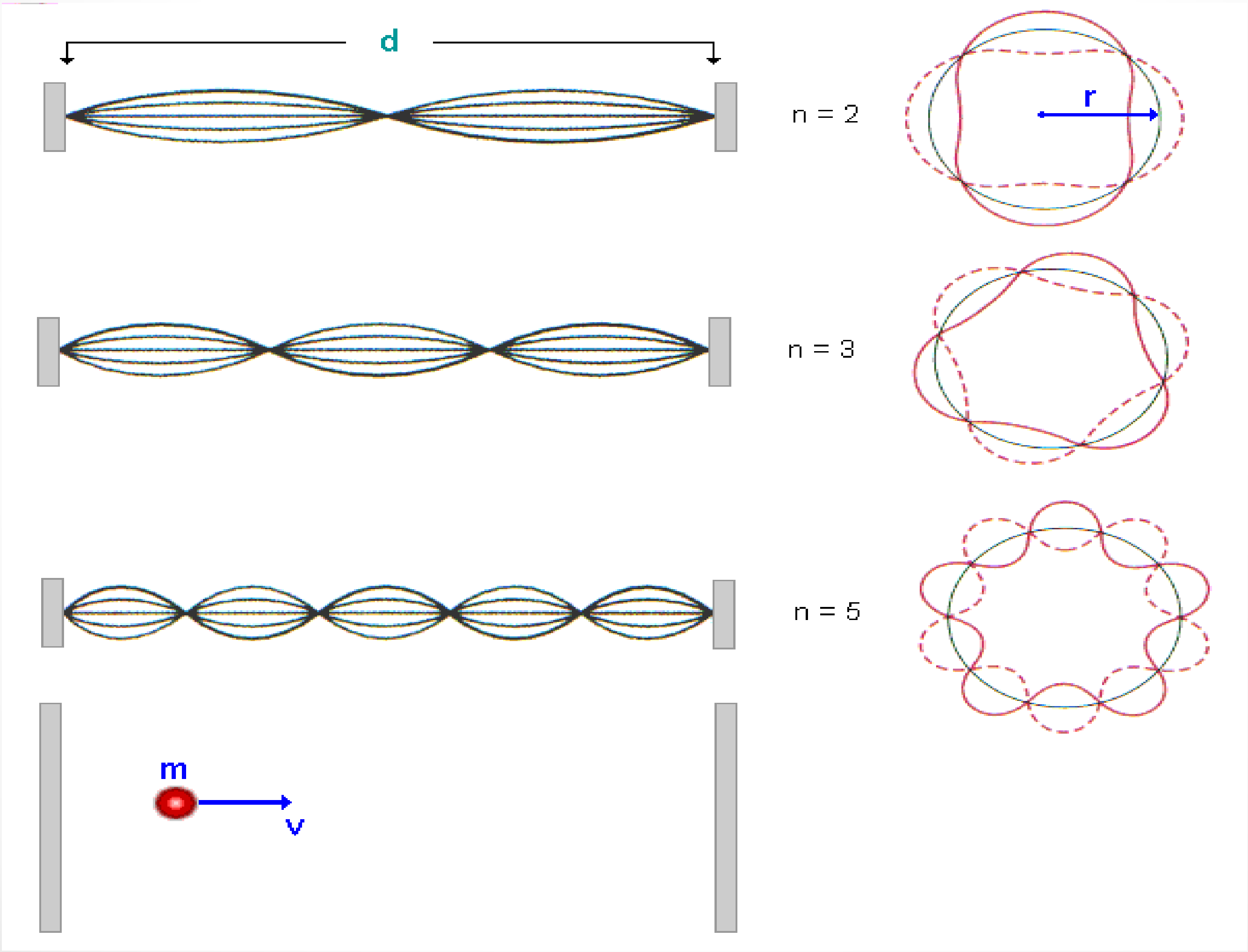
$$pr = L = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

A dualidade partícula-onda nas partículas materiais leva à mesma quantização do momento angular proposta por Bohr como hipótese.

Ondas estacionárias em cordas



De Broglie – possíveis ondas estacionárias de partículas com v=cte: movimento retilínio e circular



As ondas de de Broglie para o átomo de H

Cuidado: *restritas às órbitas circulares do modelo de Bohr!*

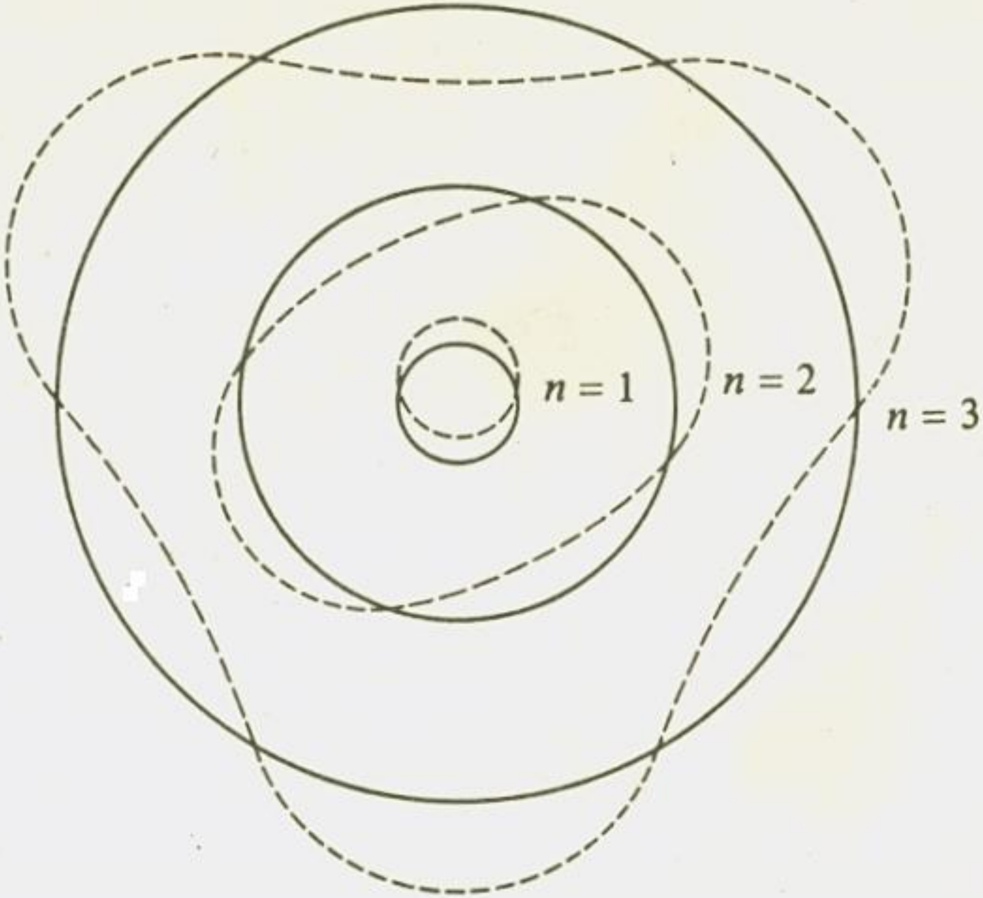


Ilustração das ondas de de Broglie estacionárias, feita para as três primeiras órbitas de Bohr. A posição dos nós pode, evidentemente, ser em qualquer ponto da órbita, desde que seus espaçamentos sejam como mostrado.

Figura do R. Eisberg e R. Resnick

ondas não monocromáticas mas periódicas

1. **A equação de onda é linear.** Assim qualquer **função periódica** que **obedece a equação de onda:**

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2})\psi(x,t) = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x,t)$$

pode ser escrita como **uma série infinita de senos e cossenos (série de Fourier)**:

$$\psi(x,t) = \sum_n [a_n \cos(k_n x - w_n t) + b_n sen(k_n x - w_n t)] = \sum_n A_n e^{i(k_n x - w_n t)}$$

Ondas não monocromáticas e não periódicas

2. Qualquer função que obedece a equação de onda, sendo não periódica, obedece a integral de Fourier:

$$\psi(x,t)=\int_0^\infty dw\int_0^\infty dk[a(k,w)\cos(k_n x-w_n t)+b(k,w)sen(k_n x-w_n t)]=\int_0^\infty dw\int_0^\infty dkA(k,w)e^{i(kx-wt)}$$