

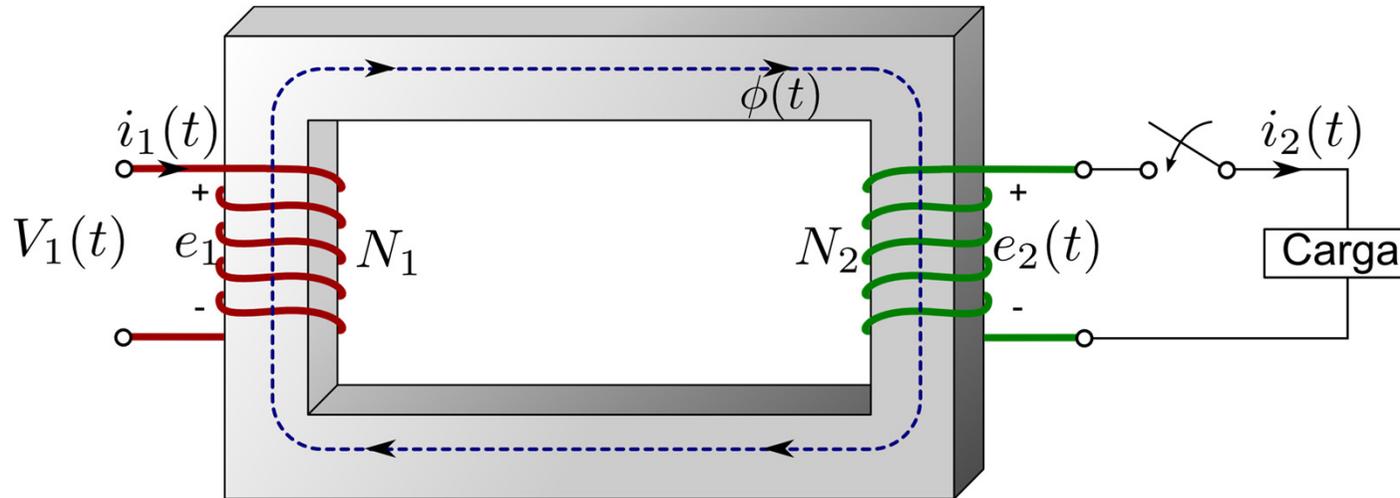
SEL 329 – CONVERSÃO ELETROMECCÂNICA DE ENERGIA

Aula 04

Tópicos desta Aula

- Excitação por corrente alternada
- Indutância
- Energia armazenada

Campo magnético variável no tempo – tensão induzida



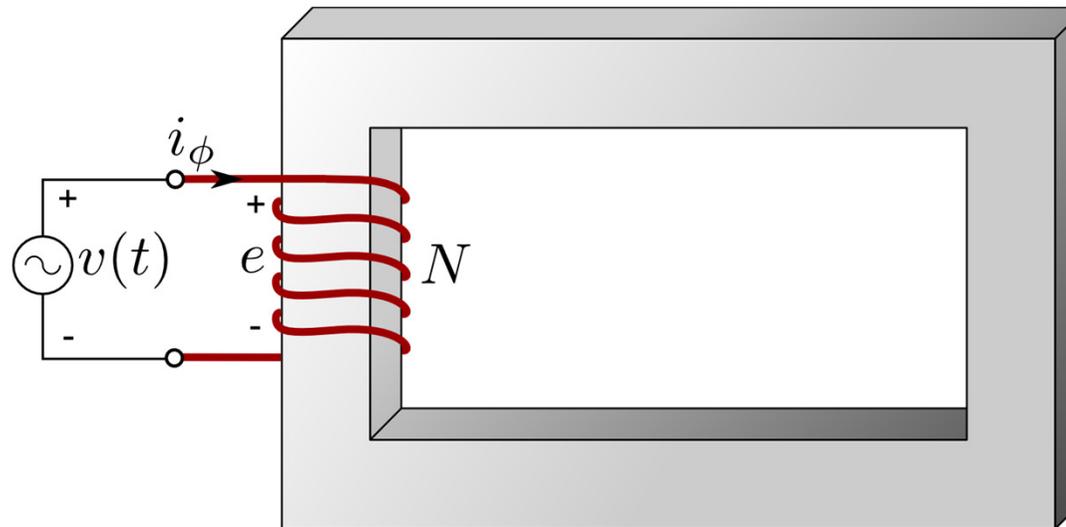
Para 1 espira, temos: $e_2(t) = -\frac{d\phi(t)}{dt}$

Para N espiras, temos: $e_2(t) = -N_2 \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{dN_2\phi(t)}{dt} = -\frac{d\lambda_2(t)}{dt}$

em que $\lambda_2(t)$ é o fluxo total enlaçado pela bobina 2, o qual é chamado de **fluxo concatenado** pela bobina 2 [Wb.esp].

- Se uma carga for conectada ao lado do secundário haverá uma corrente elétrica variável no tempo $i_2(t)$.

Excitação em corrente alternada



Admitindo fluxo magnético senoidal $\rightarrow \phi = \phi_{max} \text{sen}(\omega t)$

i_ϕ é a corrente de excitação necessária para produzir o campo magnético no núcleo (esta corrente também é denominada **corrente de magnetização**). Temos:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dN\phi}{dt} = \frac{Nd\phi}{dt} = \frac{Nd\phi_{max} \text{sen}(\omega t)}{dt} = N\phi_{max} \omega \text{cos}(\omega t)$$

ω é a frequência da fonte CA em rad/s ($\omega = 2\pi f$)

$$e = E_{max} \text{cos}(\omega t)$$

onde $E_{max} = \omega N\phi_{max} = 2\pi f N\phi_{max}$ é o valor de pico da tensão induzida nos terminais da bobina.

Excitação em corrente alternada

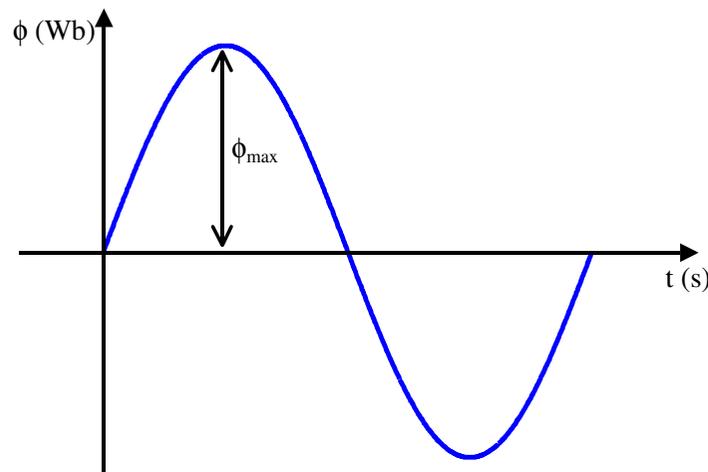
A operação em corrente alternada em regime permanente é usualmente descrita com valores eficazes de tensão e corrente. Assim:

$$E_{rms} = \frac{E_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N}{\sqrt{2}} \phi_{max} = 4,44 f N \phi_{max} = 4,44 f N A_n B_{max}$$

se a resistência da bobina (fio) for desprezível ($R = 0$), temos:

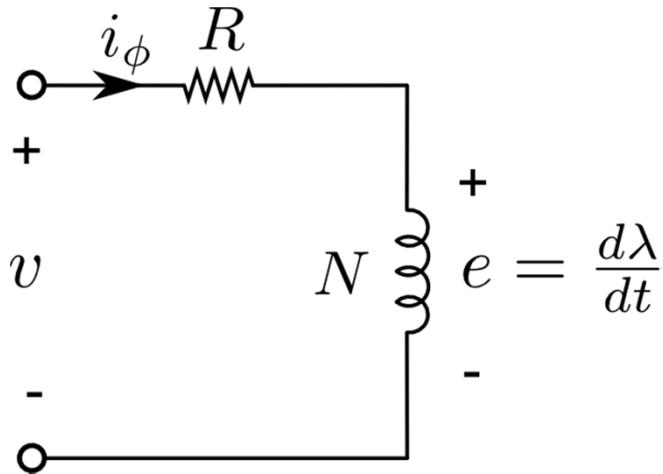
$$v = e \quad e \quad V = E$$

Indica que quando uma diferença de potencial senoidal é aplicada a um bobina, um fluxo senoidal é estabelecido no núcleo, induzindo uma *fem* igual à tensão aplicada. ($R = 0$)



Excitação em corrente alternada

R diferente de 0:



Nesse caso a tensão aplicada e a tensão induzida nos terminais das bobinas são diferentes

Indutância

Enrolamentos com núcleo ferromagnético são frequentemente utilizados em circuitos elétricos. Este dispositivo pode ser representado por um elemento **ideal** no circuito chamado **indutância**, a qual é definida pela razão entre o fluxo concatenado pelo enrolamento e a corrente que o percorre.

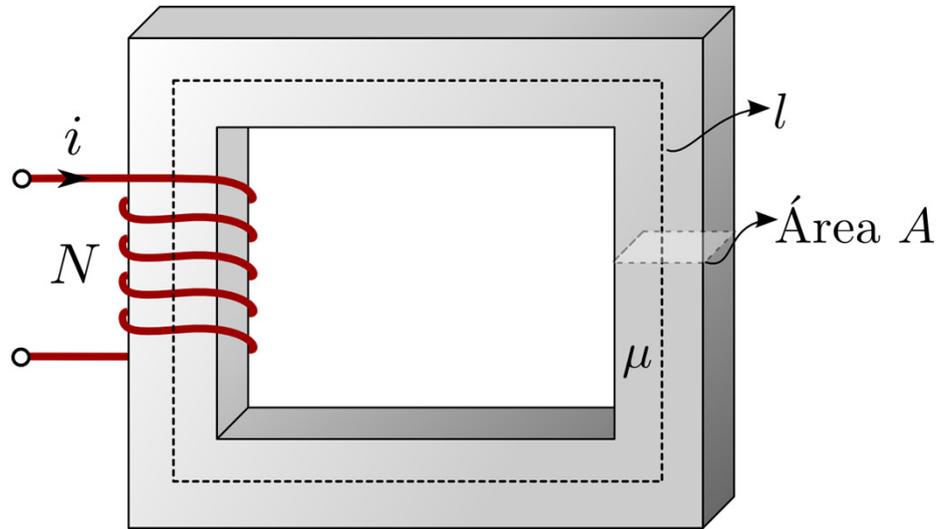
$$L = \lambda/i = N\phi/i \rightarrow \text{indutância} \quad [\text{H}]$$

sendo:

$$\lambda = N\phi \rightarrow \text{fluxo concatenado pela bobina} \quad [\text{Wb.esp}]$$

Indutância

Considerando o circuito abaixo, temos:



$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{i} = \frac{NBA}{i} = \frac{N\mu HA}{i} = \frac{N\mu NiA}{il}$$
$$L = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

Portanto, a indutância só depende da geometria do circuito e do material do núcleo, não dependendo do valor da corrente que a percorre.

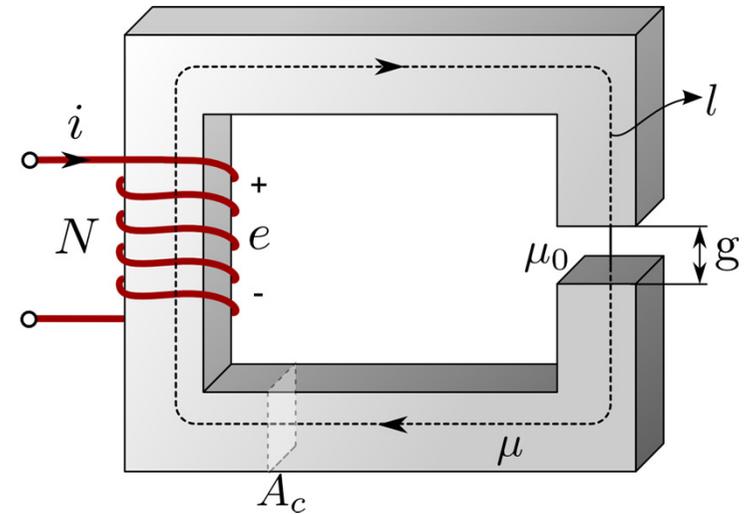
$$L = \frac{N^2}{\frac{l}{\mu A}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}$$

Indutância na presença de entreferro

Considere o sistema:

O fluxo magnético é dado por:

$$\phi = \frac{Ni}{\mathcal{R}_T} = \frac{Ni}{\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_g} = \frac{Ni}{\frac{l_c}{\mu_c A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g}}$$



desprezando o espraiamento ($A_c = A_g = A$), temos:

$$\phi = \frac{NA}{\frac{l_c}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0}} i$$

Indutância na presença de entreferro

e portanto:

$$\lambda = N\phi = \frac{N^2 A}{\frac{l_c}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0}} i$$

para um circuito magnético em que a relação $B-H$ é linear, devido a uma permeabilidade constante do material, pode-se definir a indutância L , como sendo:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (\text{fluxo concatenado por unidade de corrente da bobina})$$

Assim:

$$L = \frac{N^2 A}{\frac{l_c}{\mu_c} + \frac{g}{\mu_0}}$$

Indutância na presença de entreferro

ou:

$$L = \frac{N^2 A \mu_0}{\frac{\mu_0}{\mu_c} l_c + g}$$

Obs: para $\mu_c \gg \mu_0 \rightarrow g \gg (\mu_0 / \mu_c) l_c$

Portanto:

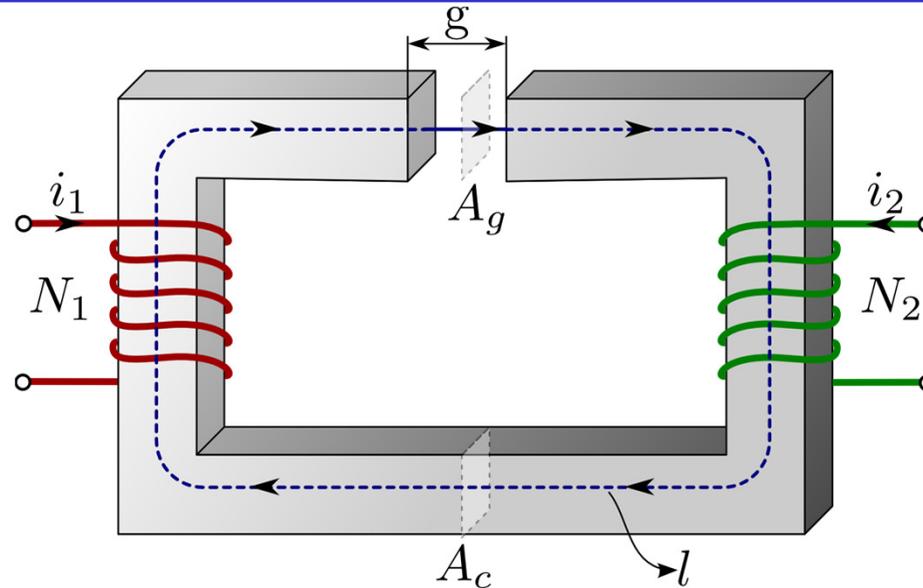
$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{g} = \frac{N^2}{\frac{g}{\mu_0 A}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_g}$$

(A indutância, neste caso, é determinada pelas dimensões do entreferro)

A utilização da indutância como parâmetro (não como variável) depende da suposição de que a relação entre fluxo e fmm (B-H) seja linear. Neste caso, a *fem* pode ser escrita por:

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d(Li)}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Indutância mútua



- i_1 e i_2 produzem fluxo na mesma direção

- a *fmm* total é:

$$F = N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathfrak{R} \phi = \left(\frac{l_c}{\mu_c A_c} + \frac{g}{\mu_0 A_g} \right) \phi \approx \mathfrak{R}_g \phi$$

Assim:

$$\phi = (N_1 i_1 + N_2 i_2) \mu_0 A_g / g$$

é o fluxo resultante no núcleo produzido pela ação simultânea das duas *fmm*s.

Indutância mútua

O fluxo concatenado pela bobina 1 (λ_1) é dado por:

$$\lambda_1 = N_1\phi = N_1^2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_1 + N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_2$$

como: $\lambda = Li$, temos: $\lambda_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2$

onde: $L_{11} = N_1^2 \mu_0 A_g / g$ → **indutância própria** da bobina 1

$L_{12} = N_1 N_2 \mu_0 A_g / g$ → **indutância mútua** entre as bobinas 1 e 2

$L_{11}i_1$ → fluxo concatenando a bobina 1 devido à corrente i_1 que circula na própria bobina.

$L_{12}i_2$ → fluxo concatenando a bobina 1 devido à corrente i_2 que circula na outra bobina.

De forma similar, para a bobina 2, temos:

$$\lambda_2 = N_2\phi = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_1 + N_2^2 \frac{\mu_0 A_g}{g} i_2$$

$$\lambda_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2$$

onde: L_{22} → **indutância própria** da bobina 2

$L_{21} = L_{12}$ → **indutância mútua** entre as bobinas 1 e 2

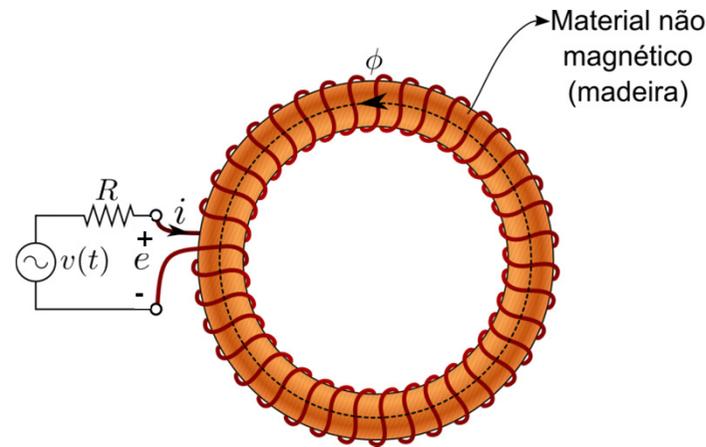
Indutância mútua

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Obs: é importante salientar que o desenvolvimento do fluxo concatenado resultante nas componentes produzidas por i_1 e i_2 é baseado na superposição de efeitos individuais e, desta forma, admite-se uma característica fluxo-fmm ($B-H$) linear (*i.e.*, permeabilidade constante).

Energia armazenada



A potência nos terminais do enrolamento do circuito magnético é a medida da taxa do fluxo de energia que entra no circuito:

$$p = ei = i \, d\lambda/dt \quad [\text{W}]$$

A variação da energia armazenada ΔW no circuito magnético em um intervalo de tempo t_1 a t_2 será:

$$\Delta W = \int_{t_1}^{t_2} p \, dt = \int_{t_1}^{t_2} i \frac{d\lambda}{dt} \, dt = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i \, d\lambda$$

para $L = \text{cte}$ (linearidade magnética) $\rightarrow L = \lambda/i \quad \rightarrow i = \lambda/L$

$$\Delta W = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} i \, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\lambda}{L} \, d\lambda = \frac{1}{2L} \lambda^2 \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} = \frac{1}{2L} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

Energia armazenada

A energia total armazenada para um dado valor de λ pode ser determinada fazendo-se $\lambda_I = 0$.

$$W = \frac{1}{2L} \lambda^2 = \frac{1}{2L} (Li)^2 = \frac{1}{2} Li^2$$

Em termos de B e H , temos:

$$\lambda = N\phi = NBA$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = NA \frac{dB}{dt}$$

$$v = Ri + e = Ri + \frac{d\lambda}{dt} = Ri + NA \frac{dB}{dt}$$

$$p(t) = vi = Ri^2 + NAi \frac{dB}{dt}$$

O fluxo de energia que se armazena no campo magnético da bobina é:

$$p_B = NAi \frac{dB}{dt}$$

Energia armazenada

como $H = Ni/l$, temos

$$p_B = AlH \frac{dB}{dt}$$

$p_B > 0$ → o campo magnético está absorvendo energia da fonte.

$p_B < 0$ → a energia está sendo liberada pelo campo magnético.

- Seja W_B a energia no campo magnético ($B = 0 \Rightarrow W_B = 0$)

- Conforme B aumenta, W_B pode ser expressa como:

$$W_B = \int p_B dt = \int_0^B AlH dB = \int_0^B \frac{Al}{\mu_0} B dB = \frac{Al}{2\mu_0} B^2$$

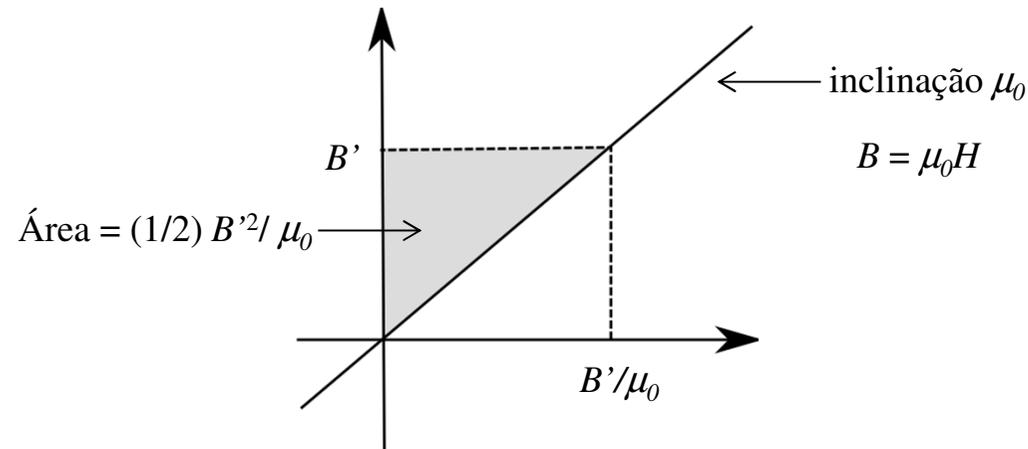
Al é o volume do espaço englobado pela bobina. Então

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Energia armazenada

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

é a densidade de energia armazenada no campo magnético interno à bobina



incluindo um núcleo ferromagnético, a densidade de energia é dada por:

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 H^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

Ou seja, podemos armazenar a mesma energia em um volume muito menor do núcleo.

Energia armazenada: campo elétrico x campo magnético

A densidade de energia armazenada no campo elétrico é dada por:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

onde ϵ_0 é a permissividade do ar = $8,85 \times 10^{-12}$ [F/m].

Assim:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad [\text{J/m}^3]$$

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad [\text{J/m}^3]$$

Valores característicos:

Campo elétrico:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$$

$$E_{\text{max}} = 3 \times 10^6 \text{ V/m} \quad (\text{máximo campo elétrico que o ar pode suportar à pressão atmosférica sem ruptura elétrica})$$

Energia armazenada: campo elétrico x campo magnético

Assim, a densidade de energia máxima que pode ser armazenada no campo elétrico é:

$$\frac{W_E}{\text{volume}} = 39,82 \quad [\text{J/m}^3]$$

Campo magnético:

Com correntes elevadas consegue-se B de até $0,2 \text{ Wb/m}^2$ para uma bobina com núcleo não magnético. Com núcleo de material magnético, pode-se chegar até a $2,0 \text{ Wb/m}^2$.

Considerando:

$B = 1,0 \text{ Wb/m}^2$ (valor usual no entreferro das máquinas elétricas)

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

Temos:

$$\frac{W_B}{\text{volume}} = 397.890 \quad [\text{J/m}^3]$$

Isto demonstra que os dispositivos magnéticos exigem um volume muito menor para armazenar a mesma quantidade de energia

Exercício

No eletroímã da figura ao lado, tem-se:

$$N = 400 \text{ espiras}$$

$$l_c = 50 \text{ cm}$$

$$l_g = 1 \text{ mm}$$

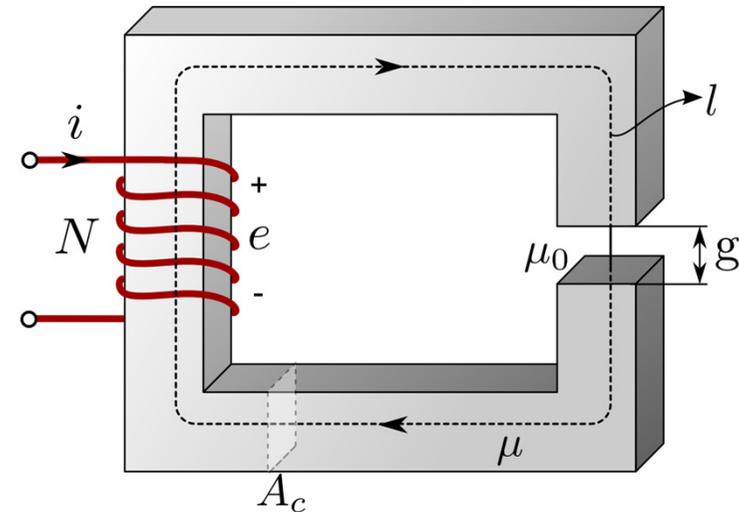
$$A_c = A_g = 15 \text{ cm}^2$$

$$\mu_r = 3000$$

$$i = 1 \text{ A.}$$

Pede-se:

- O fluxo e a densidade de fluxo magnético no entreferro (**$0,6463 \times 10^{-3} \text{ Wb}$ e $0,4309 \text{ T}$**)
- A indutância da bobina (**$0,259 \text{ H}$**)
- Deduza a fórmula da energia armazenada para o eletroímã (despreze o espriamento e a dispersão do fluxo magnético).**



Próxima Aula

- Perdas em circuitos magnéticos:
 - ✓ perdas por histerese
 - ✓ perdas por correntes parasitas (correntes de Foucault)