

PSI3483

Ondas Eletromagnéticas em Meios Guiados

**GUIAS DE ONDAS**

**Prof.<sup>a</sup> Fatima Salete Correra**

---

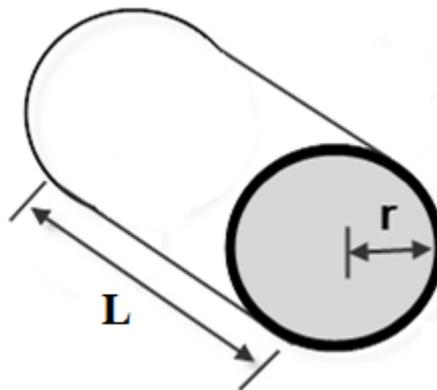
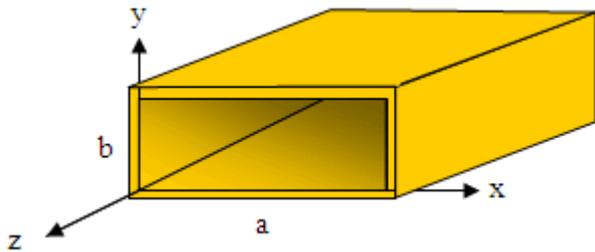
# Sumário

- Guias de Ondas - Conceito
- Guia de Ondas Retangular
- Guia de Ondas Cilíndricos
- Métodos de alimentação de guias de ondas

# Guias de Ondas

## ■ Guias de ondas

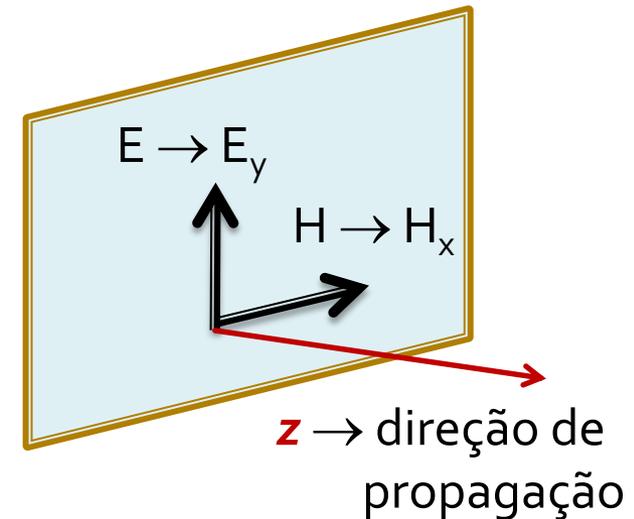
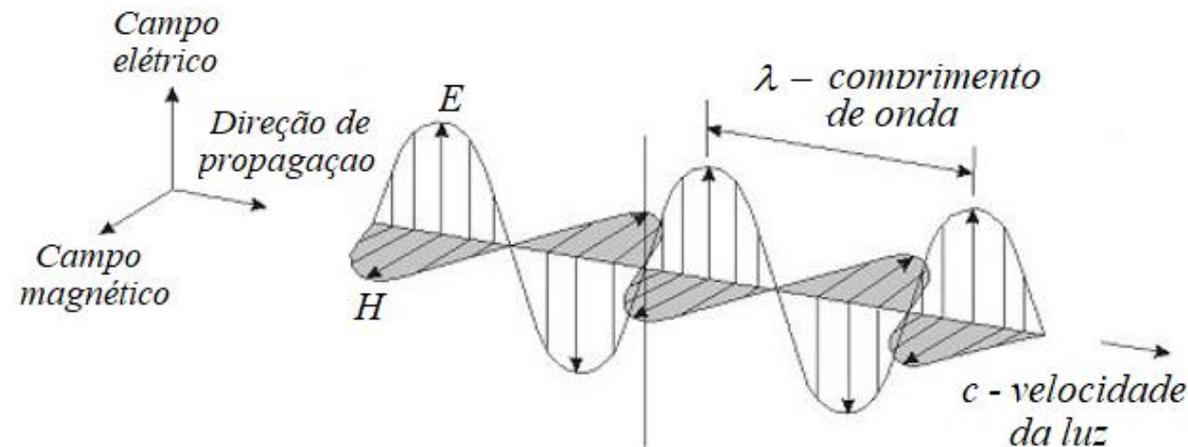
- Estruturas ocas
- De material condutor
- Com seção transversal constante
  - Retangular, circular, elíptica ou outras
- Preenchidas por dielétrico (em geral ar)



# Guias de Ondas

Propagação de campos EM no espaço livre e em cabos coaxiais

- Onda **TEM** ou onda **T**ransversal **E**leto **M**agnética
- Campos E e H são transversais entre si e à direção de propagação
- Transversais  $\Rightarrow$  perpendiculares
- Ilustração de onda TEM propagando-se no ar



$$E_z = 0 \text{ e } H_z = 0$$

# Guias de Ondas

## ■ Propagação da onda EM no guia de ondas

- Modo **TEM não é suportado** em guias de ondas
  - Necessita dois ou mais condutores

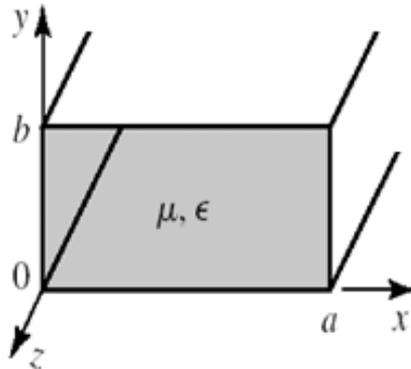
- No interior dos guias de ondas propagam-se

- **Modos TM** → **T**ransversal **M**agnético →

$$H_z = 0 \quad \text{e} \quad E_z \neq 0$$

- **Modos TE** → **T**ransversal **E**létrico →

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z \neq 0$$



Sendo a **direção de propagação z**

# Guias de Ondas

## ■ Modos de propagação TM

### ■ **Modos TM** – Modos Transversais Magnéticos

- **H** é perpendicular à direção de propagação
- **E** tem componente na direção de propagação
- Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$H_z = 0 \quad \text{e} \quad E_z \neq 0$$

### ■ Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

# Guias de Ondas

## ■ Modos de propagação TE

### ■ **Modos TE** – Transversais Elétricos

- **E** é perpendicular à direção de propagação
- **H** tem componente na direção de propagação
- Adotando a propagação da onda no guia segundo a **direção z**

$$E_z = 0 \quad \text{e} \quad H_z \neq 0$$

- Possibilidades das demais componentes dos campos **E** e **H**

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x = 0 \quad \text{e} \quad E_y = 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

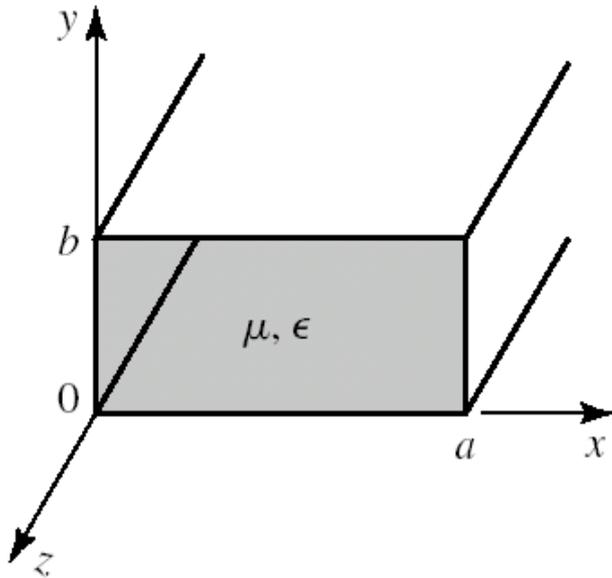
$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y = 0 \quad \text{e} \quad E_x = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_x \neq 0 \quad \text{e} \quad E_y \neq 0 \\ H_y \neq 0 \quad \text{e} \quad E_x \neq 0 \end{array} \right.$$

# Guias de Ondas

## Guia de Ondas Retangular

# Guia de Ondas Retangular



- Direção de propagação: **z**
- **a**: maior dimensão da seção transversal
- **b**: menor dimensão da seção transversal
- Em geral  $b \approx \frac{a}{2}$
- Meio dielétrico que preenche o guia de ondas

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0 \quad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

- Velocidade da onda no meio sem fronteiras com

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_r \cdot \mu_0$$



$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

$c$  : velocidade da luz no vácuo

# Guia de Ondas Retangular

- Exemplo

- Guia de ondas WR-90

- $a = 0,9$  polegada e  $b = 0,4$  polegada

- $a = 2,286$  cm e  $b = 1,016$  cm

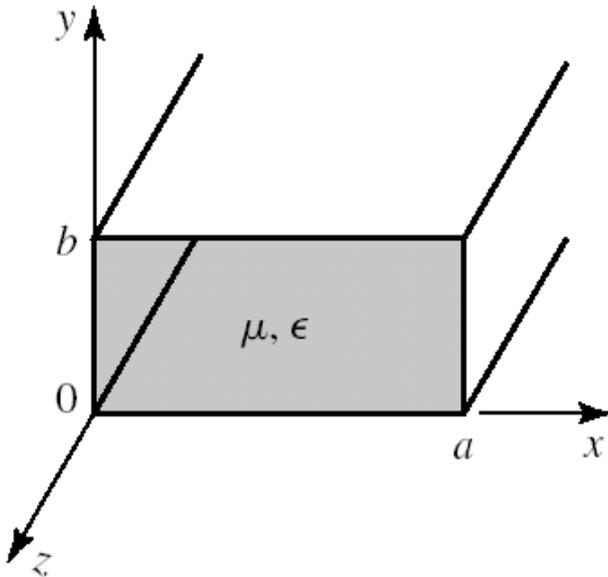
- Preenchido com ar

- $\mu = \mu_0$  e  $\epsilon = \epsilon_0$

- $v = c$  (no meio sem fronteiras)

- Aplicação: banda X

- 8,2 a 12,4 GHz



# Equações de Maxwell

## ■ Propagação de ondas EM no guia de ondas retangular

- Resolução das equações de Maxwell no interior do guia de ondas
- Equações de Maxwell na forma diferencial

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- E: intensidade de campo elétrico (V/m)
- H: intensidade de campo magnético (A/m)
- D: densidade de fluxo elétrico (Coulomb/m)
- B: densidade de fluxo magnético (Weber/m)
- J: densidade de corrente elétrica (A/m<sup>2</sup>)
- ρ: densidade de carga elétrica (Coulomb/m<sup>3</sup>)

Equações de Maxwell → { Quatro equações  
Cinco incógnitas →  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{B}$  e  $t$

# Equações de Maxwell

## ■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Considerando o interior do guia de ondas

- Dielétrico ideal
- Sem cargas ou correntes  
 $\rightarrow \rho = 0$  e  $J = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array}$$

- Considerando adicionalmente o interior do guia como

- Meio linear, isotrópico e homogêneo
- Invariante no tempo

$$\left. \begin{array}{l} \text{Relações constitutivas do meio} \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \end{array} \right\}$$

$\epsilon$  : permissividade elétrica do meio (F/m)

$\mu$  : permeabilidade magnética do meio (H/m)

# Equação de Onda ou de Helmholtz

## ■ Resolução das equações de Maxwell no guia de ondas

- Equações de Maxwell nesse caso reduzem-se a

$$\underbrace{\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}} \quad \underbrace{\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$\vec{E}$  é função de  $\vec{H}$  e  $t$      $\vec{H}$  é função de  $\vec{E}$  e  $t$

- Manipulação matemática das equações de Maxwell
  - Objetivo: obter equações com uma única variável de campo
    - Uma equação do campo elétrico em função de  $\vec{E}$  e  $t$
    - Uma equação do campo magnético em função de  $\vec{H}$  e  $t$
    - **Equações de Onda ou Equações de Helmholtz**

# Equação de Onda ou de Helmholtz

- Consideremos a equação  $\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

- Aplicando o rotacional nos dois termos da equação, temos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \\ \nabla \cdot \vec{E} = 0 \text{ (pois } \rho = 0) \end{array} \right. \rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\left[ \begin{array}{l} -\mu \frac{\partial (\nabla \times \vec{H})}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{array} \right. \rightarrow -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Equações de Onda no domínio do tempo

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- De forma análoga, obtém-se de  $\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

# Guia de Ondas Retangular

- Considerando  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  campos harmônicos ou senoidais

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{E}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \text{Re}[\bar{H}(x, y, z) \cdot e^{j\omega t}]$$

- $\bar{E}(x, y, z)$  e  $\bar{H}(x, y, z)$  são os fasores dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$
- Em coordenadas cartesianas

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda na forma fasorial**

- Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo ( $\rho$  e  $J$ )

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0}$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$  : constante de propagação

$\omega$ : frequência angular,  $\omega = 2\pi f$

$\mu$ : permeabilidade magnética do meio

$\epsilon$  : permissividade elétrica do meio

# Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Elétrico:  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0} \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k^2 E_x = 0 \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k^2 E_y = 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0 \end{array} \right.$$

Sendo  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

# Guia de Ondas Retangular

- **Equação de onda fasorial**

- Em função das componentes do fasor do Campo Magnético  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = \vec{0} \quad \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + k^2 H_x = 0 \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + k^2 H_y = 0 \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0 \end{array} \right.$$

Sendo  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TM

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Solução dos Modos TM

- Em modos TM existe componente de campo elétrico não-nula na direção de propagação  $z$

$$E_z \neq 0 \quad \rightarrow \quad \text{a ser determinado}$$

- Campo harmônico ou senoidal

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Cálculo de  $E_z \Rightarrow$  equação de onda na direção  $z$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 E_z = 0$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modos TM

- Equação de onda

$$\frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)]}{\partial z^2} + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

- Sendo

$$X''(x) = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} \quad Y''(y) = \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \quad Z''(z) = \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$$

- Tem-se

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modos TM

- Dividindo-se ambos os termos de

$$X''(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y''(y) \cdot Z(z) + X(x) \cdot Y(y) \cdot Z''(z) + k^2 [X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)] = 0$$

por

$$E_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Tem-se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} + k^2 = 0$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modos TM

$$\underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}} + \underbrace{\frac{Y''(y)}{Y(y)}} + \underbrace{\frac{Z''(z)}{Z(z)}} + k^2 = 0$$

Ou 
$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + k^2 = 0$$

onde 
$$-k_x^2 = \frac{X''}{X} \quad -k_y^2 = \frac{Y''}{Y} \quad -k_z^2 = \frac{Z''}{Z} = \gamma^2$$

$k_x$  e  $k_y$  : constantes

$\gamma$  : fator de propagação da onda EM ao longo da direção de propagação  $z$ , de forma geral é um número complexo

$$\gamma = \alpha + j \cdot \beta$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM**

- Solução geral de  $E_z = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z)$

$$E_z = [A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x)] \cdot \\ [C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y)] \cdot \\ [F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z}]$$

sendo  $A, B, C, D, F$  e  $G$  constantes

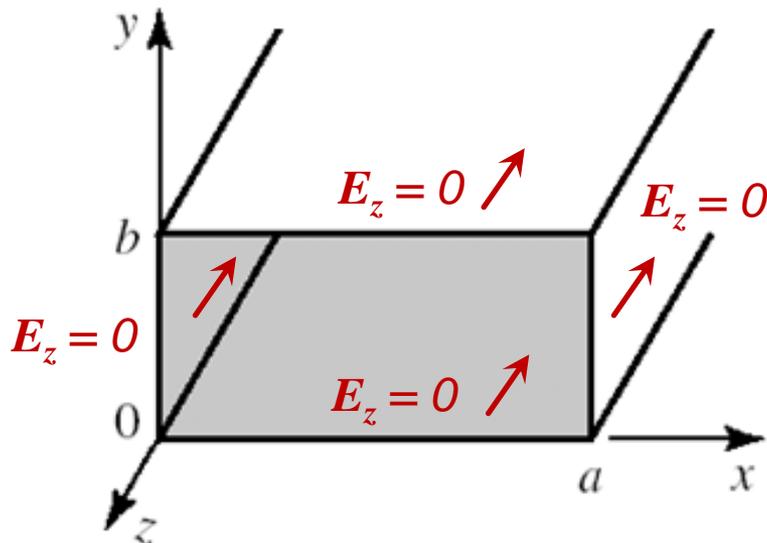
- Determinação das constantes  $A, B, C, D, F$  e  $G$ 
  - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modos TM

### ■ Condições de contorno

- Campo elétrico tangencial ao metal é nulo
- Logo  $E_z$  é nulo nas paredes metálicas do guia de ondas



## ■ $E_z = 0$

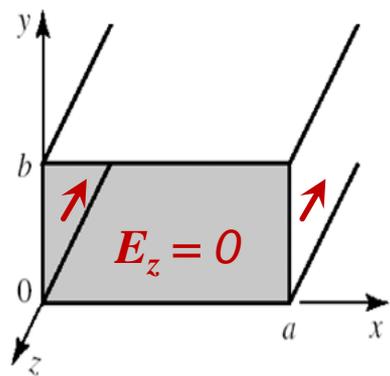
- Paredes verticais do guia
  - $x = 0$  e  $x = a$
- Paredes horizontais do guia
  - $y = 0$  e  $y = b$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TM

$$E_z = \left[ A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \right] \cdot Y(y) \cdot Z(z)$$

- $E_z = 0$  em  $x = 0$  e  $x = a$ , paredes verticais do guia



- $x = 0 \rightarrow A = 0$

- $x = a \rightarrow \text{sen}(k_x \cdot a) = 0 \rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3, \dots$

$$E_z = B \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

# Guia de Ondas Retangular

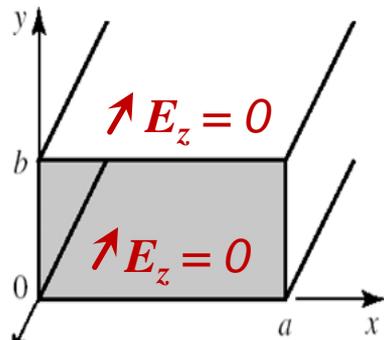
## Modos TM

$$E_z = X(x) \cdot \left[ C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot Z(z)$$

- $E_z = 0$  em  $y = 0$  e  $y = b$ , paredes horizontais do guia

- $y = 0 \rightarrow C = 0$

- $y = b \rightarrow \text{sen}(k_y \cdot y) = 0 \rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3, \dots$



$$E_z = B \cdot C \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot Z(z) \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TM

$$E_z = X(x) \cdot Y(y) \cdot \left[ F \cdot e^{-\gamma z} + G \cdot e^{+\gamma z} \right]$$

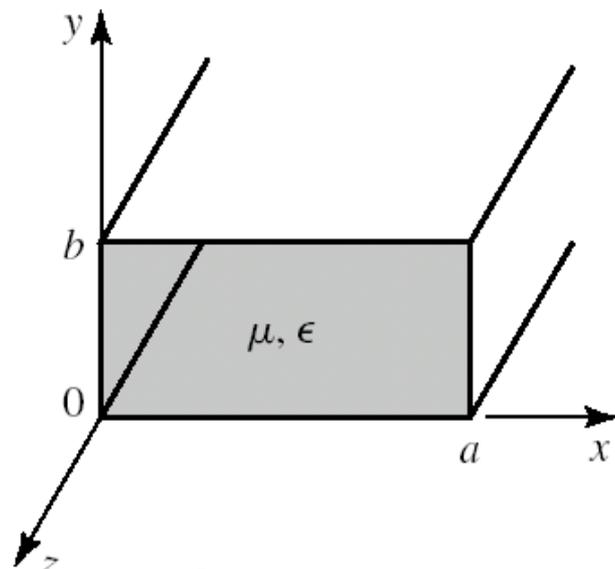
- Supondo propagação na direção de z positivo
- Se  $G \cdot e^{+\gamma z} = G \cdot e^{+(\alpha+j\beta)z} = G \cdot e^{+\alpha \cdot z} \cdot e^{j\beta \cdot z} \neq 0$ 
  - Amplitude da onda EM cresce a medida que se propaga
  - Não tem sentido físico
  - Logo  $G = 0$

$$E_z = \underbrace{B \cdot C \cdot F}_{E_0} \cdot \text{sen} \left( \frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \begin{array}{l} m = 1, 2, 3 \dots \\ n = 1, 2, 3 \dots \end{array}$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \quad H_z = 0$$



- **Modo  $TM_{mn}$**

onde

- $m = 1, 2, 3, \dots$
- $n = 1, 2, 3, \dots$

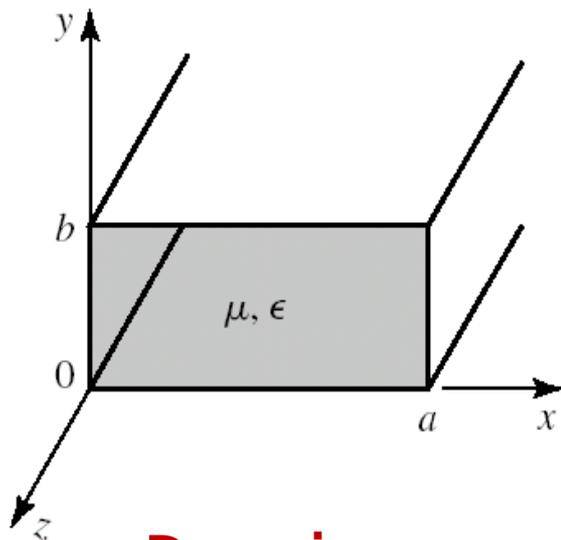
**Importante:  $m \neq 0$  e  $n \neq 0$**

(se  $m$  ou  $n = 0 \Rightarrow E_z = 0 \Rightarrow$  não é modo TM!)

- **Modos  $TM_{11}$   $TM_{12}$   $TM_{21}$   $TM_{22}$   $TM_{13}$   $TM_{31}$   $TM_{23}$  ....**

# Guia de Ondas Retangular

- **Modos TM** – propagação segundo o eixo z positivo



$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$
$$m = 1, 2, 3, \dots \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- **Demais componentes dos modos TM?**

$$\left. \begin{array}{ll} H_x = ? & H_y = ? \\ E_x = ? & E_y = ? \end{array} \right\}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Equações de Maxwell na forma fasorial
- Meio linear, isotrópico e homogêneo
- Sem correntes ( $J = 0$ ) ou cargas ( $\rho = 0$ )

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\gamma E_y &= -j\omega\mu H_x \\ -j\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu H_z\end{aligned}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\gamma H_y &= j\omega\epsilon E_x \\ -j\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon E_z\end{aligned}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Campos E e H dependentes de $e^{-\gamma \cdot z}$

- Resolvendo-se o sistema de 6 equações, do slide anterior
- Obtém-se  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  e  $H_y$  em função de  $\frac{\partial E_z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial E_z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial H_z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial H_z}{\partial y}$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_x = \frac{j}{k_c^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

$$H_y = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$k_c^2 = k^2 - \gamma^2$$

$$k^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \epsilon$$

# Guia de Ondas Retangular

**Modos TM<sub>mn</sub>**  $\Rightarrow H_z = 0$  e  $E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$

$$E_x = \frac{-j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

# Guia de Ondas Retangular

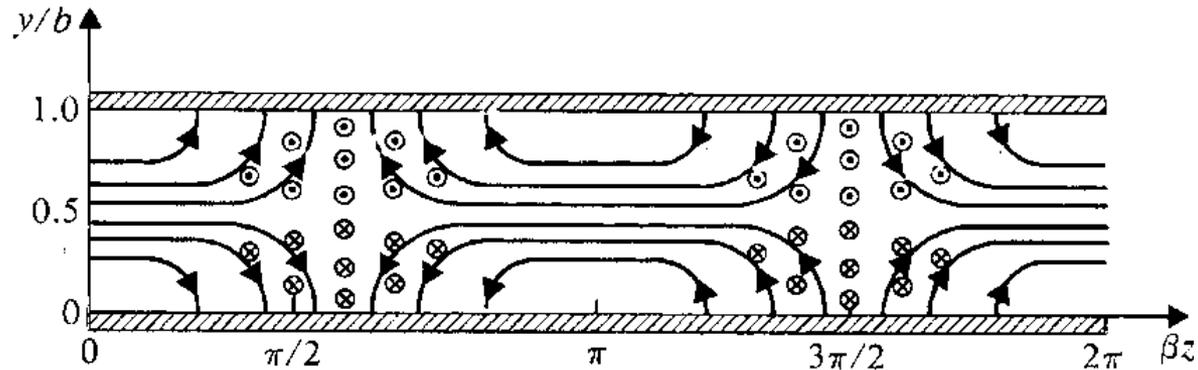
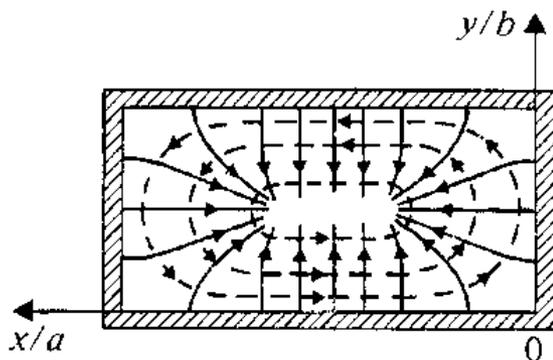
## Modo $TM_{11}$

- $m = 1$
- $n = 1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



—— Campo E      - - - - Campo H

# Guia de Ondas Retangular

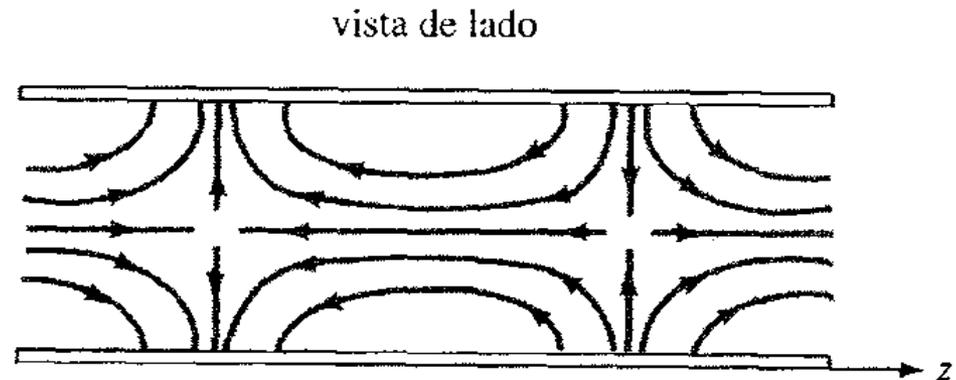
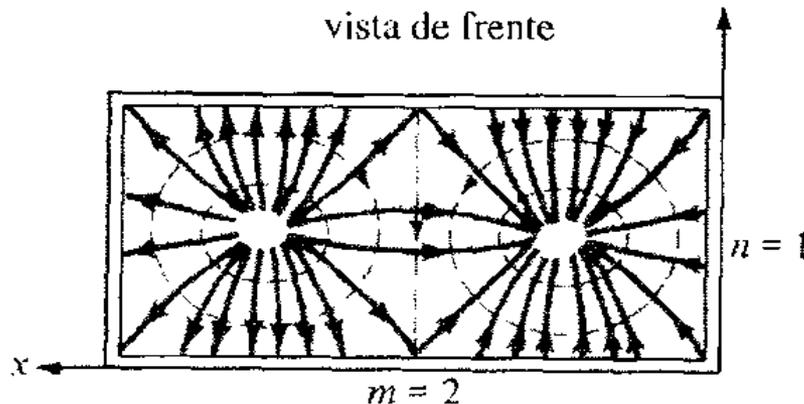
## Modo $TM_{21}$

- $m=2$
- $n=1$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos \left( \frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\gamma\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{2\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \cos \left( \frac{\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



— Campo E

- - - - Campo H

# Guia de Ondas Retangular

## Comparando os modos $TM_{11}$ e $TM_{21}$

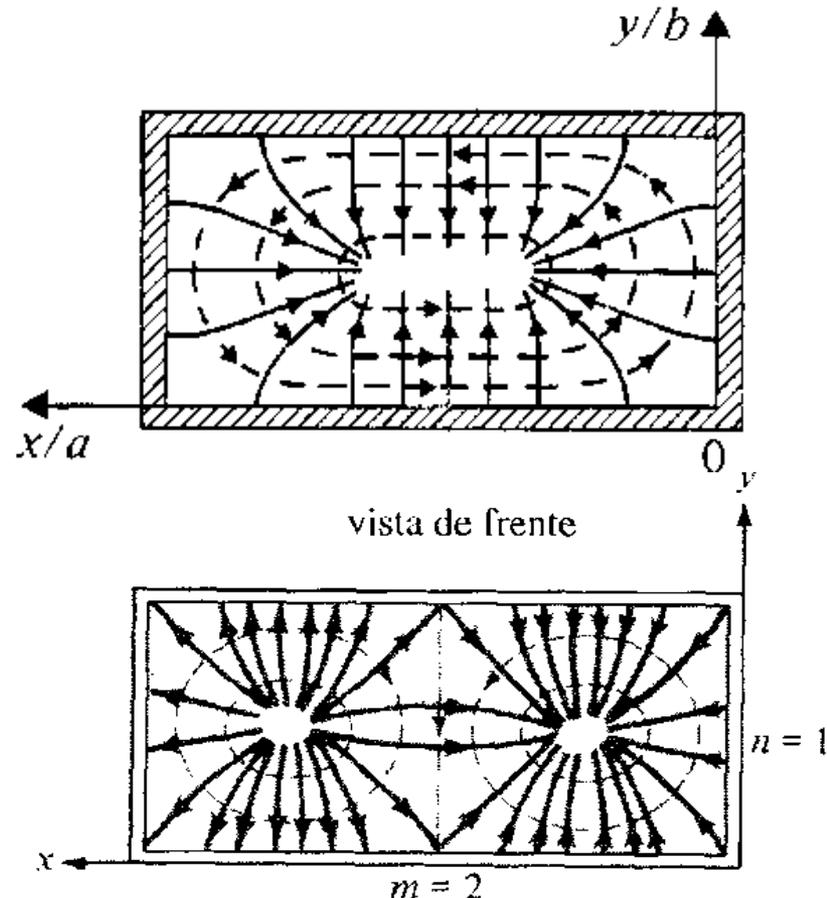
- Modo  $TM_{11}$

- $m = 1$
- $n = 1$

- Modo  $TM_{21}$

- $m = 2$
- $n = 1$

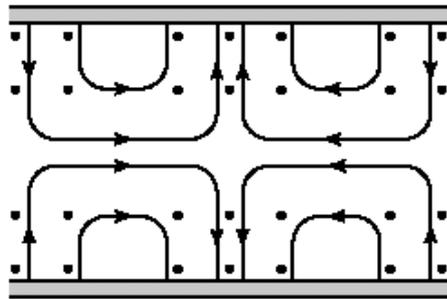
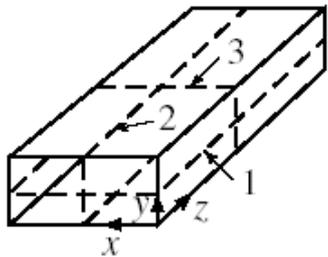
— Campo E  
- - - Campo H



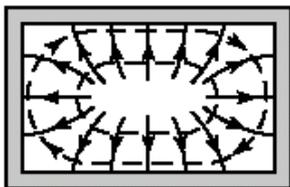
# Guia de Ondas Retangular

## Comparando os modos $TM_{11}$ e $TM_{21}$

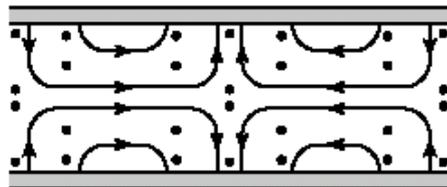
$TM_{11}$



1

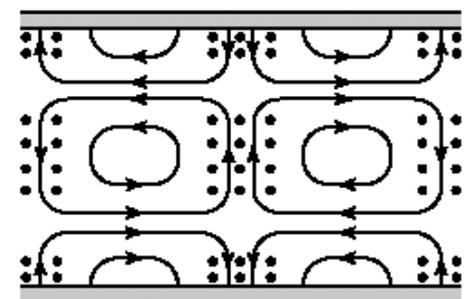
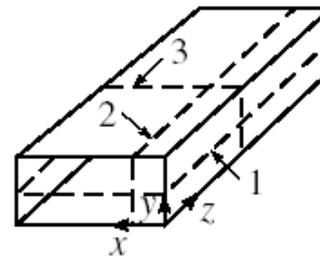


3

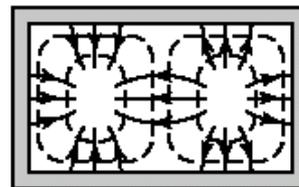


2

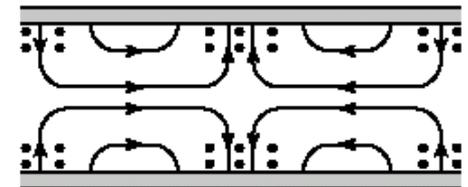
$TM_{21}$



1



3



2

# Guia de Ondas Retangular

## Fator de propagação do modo $TM_{mn}$

$$-k_x^2 - k_y^2 + \gamma^2 + k^2 = 0 \rightarrow \gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k^2}$$

- Modos TM

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, m = 1, 2, 3\dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{b}, n = 1, 2, 3\dots$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Fator de propagação do modo TM<sub>mn</sub>

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

$\gamma$  é função

→ do guia de ondas:  $a, b, \mu$  e  $\epsilon$

→ do modo de propagação:  $m$  e  $n$

→ da frequência:  $\omega = 2\pi f$

Três casos possíveis:

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0 \rightarrow \gamma = \alpha, \text{ número real}$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon = 0 \rightarrow \gamma = 0$$

$$\omega \text{ tal que } \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon < 0 \rightarrow \gamma = j\beta, \text{ número imaginário}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Fator de propagação do modo $TM_{mn}$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

- $\gamma$  é função da frequência  $\rightarrow \omega = 2\pi f$
- Operação do guia de ondas, dependendo da frequência

$$\gamma = \alpha$$



Modos  
evanescentes

$$\gamma = 0$$



Corte

$$\gamma = j \cdot \beta$$



Modos  
propagantes

# Guia de Ondas Retangular

## Modos evanescentes

- Para  $\omega$  tal que 
$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon > 0$$
- Fator de propagação do modo  $TM_{mn}$  é um número real e positivo

$$\rightarrow \gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} = \alpha, \text{ número real e positivo}$$

O campo EM é **evanescente** → decresce exponencialmente com **z**,  
direção de propagação

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-\alpha \cdot z}}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos propagantes

- Para  $\omega$  tal que  $\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon < 0$
- Fator de propagação do modo  $TM_{mn}$  é um número puramente imaginário

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = j \cdot \beta$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

O campo EM **propaga-se** ao longo de **z**, com constante de propagação  $\beta$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \overbrace{e^{-j \cdot \beta \cdot z}}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Corte

Frequência angular de corte do modo  $TM_{mn}$  -  $\omega_c$

- $\omega_c$  é a frequência angular limite entre modos evanescentes e propagantes
- Na frequência angular de corte -  $\omega_c$

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega_c^2 \mu\epsilon = 0$$

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \text{ou} \quad \omega_c = v \cdot \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

$v$  : velocidade da onda no meio sem fronteiras

# Guia de Ondas Retangular

## Corte

Frequência de corte do modo  $TM_{mn}$  -  $f_c$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \longrightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- A frequência de corte é função de
  - $a$  e  $b$  - dimensões da seção transversal do guia
  - $m$  e  $n$  – índices do modo de propagação
  - $\mu$  e  $\varepsilon$  do meio dielétrico que preenche o guia de ondas
- Modos  $TM_{mn} \rightarrow m = 1, 2, 3, \dots$  e  $n = 1, 2, 3, \dots$ 
  - $TM_{11}$   $TM_{12}$   $TM_{21}$   $TM_{22}$   $TM_{13}$   $TM_{31}$   $TM_{23}$  ...

# Guia de Ondas Retangular

## Corte

Frequência de corte do modo  $TM_{mn}$  -  $f_c$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Guias de ondas comportam-se como **filtros passa-alta**
- Somente sinais com frequência  $f > f_c$  propagam-se no guia
  - $f < f_c \rightarrow$  *modos evanescentes  $\rightarrow$  a onda EM é exponencialmente atenuada no interior do guia de onda*
  - $f = f_c \rightarrow$  *corte  $\rightarrow$  frequência limite entre atenuação ou propagação*
  - $f > f_c \rightarrow$  *a onda EM propaga-se no interior do guia de ondas*

# Guia de Ondas Retangular

## Exercício – Modos $TM_{mn}$

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
  - Dimensões da seção transversal:  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$
  - Preenchido por ar  $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ , e  $TM_{12}$  e  $TM_{22}$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Exercício – Modos $TM_{mn}$

- Frequência de corte dos modos  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ , e  $TM_{12}$  e  $TM_{22}$

$$TM_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

$$TM_{21} \rightarrow m=2 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 10,61 \text{ GHz}$$

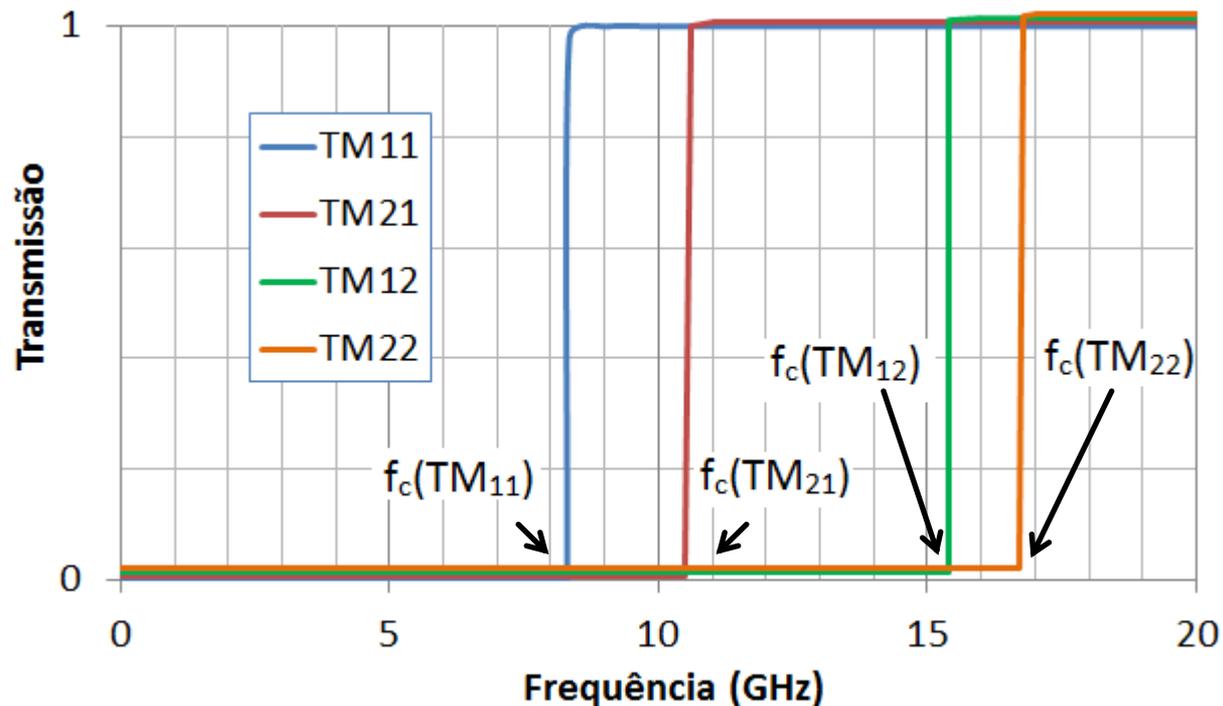
$$TM_{12} \rightarrow m=1 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 15,46 \text{ GHz}$$

$$TM_{22} \rightarrow m=2 \text{ e } n=2 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{2}{20}\right)^2} = 16,77 \text{ GHz}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Exercício – Modos $TM_{mn}$

Frequência de corte dos modos  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ , e  $TM_{12}$  e  $TM_{22}$



# Guia de Ondas Retangular

## Comprimento de onda guiado do modo $TM_{mn}$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \text{sendo} \quad \beta_{mn} = \sqrt{\underbrace{\omega^2 \mu \epsilon}_{k^2} - \left[ \underbrace{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}_{k_c^2 = \omega_c^2 \mu \epsilon} \right]}$$

Logo:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \omega_c^2 \mu \epsilon} = 2\pi \sqrt{f^2 \mu \epsilon - f_c^2 \mu \epsilon} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Comprimento de onda guiado do modo $TM_{mn}$

Logo:

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\left(\frac{f}{v}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{v}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

Dividindo os dois termos por  $f$

$$\lambda_g = \frac{\frac{v}{f}}{\sqrt{\left(\frac{f}{f}\right)^2 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \rightarrow$$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo  $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r} \cdot f}$  ou

$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r} \cdot f}$  para  $\mu_r = 1$

# Guia de Ondas Retangular

## Comprimento de onda guiado do modo $TM_{mn}$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

sendo  $\lambda = \frac{v}{f}$  ou  $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}}$  e  $\lambda_0 = \frac{c}{f}$

$\lambda$  : comprimento da onda que se propagaria no dielétrico que preenche o guia, sem fronteiras

$\lambda_g$  : comprimento de onda guiado

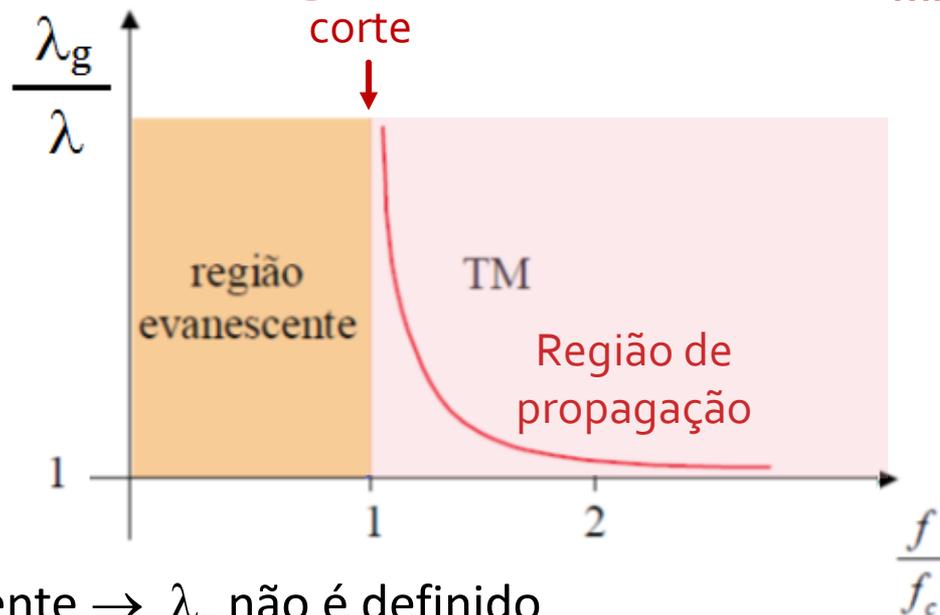
$f_c$  : frequência de corte do modo guiado

- Vale apenas para  $f > f_c$
- Depende do modo de propagação  $TM_{mn}$  dentro do guia de ondas

# Guia de Ondas Retangular

## Comprimento de onda guiado do modo $TM_{mn}$

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para  $f < f_c \rightarrow$  região evanescente  $\rightarrow \lambda_g$  não é definido

Para  $f = f_c \rightarrow$  corte  $\rightarrow \lambda_g$  tende a infinito

Para  $f > f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow \lambda_g$  decresce cresce com a frequência

Para  $f \gg f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow \lambda_g$  tende a  $\lambda$ , comprimento de onda do meio

# Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo  $TM_{mn}$

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}$$

- Na região de propagação, com  $f > f_c$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-j\beta \cdot z}$$

- Logo  $Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega\epsilon}$  sendo  $\beta = \sqrt{\omega^2 \mu\epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$

# Guia de Ondas Retangular

## Impedância de onda do guia de ondas no modo $TM_{mn}$

- Lembrando que

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$
$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \omega_c^2 \mu \varepsilon$$

}  $\rightarrow \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon}$

Logo  $Z_{TM} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon} = \frac{\sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - \omega_c^2 \mu \varepsilon}}{\omega \varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_c^2}{\omega^2}} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$

$$Z_{TM} = \eta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \text{sendo} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

# Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo  $TM_{mn}$

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} \Rightarrow Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$\eta$  : impedância de onda intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

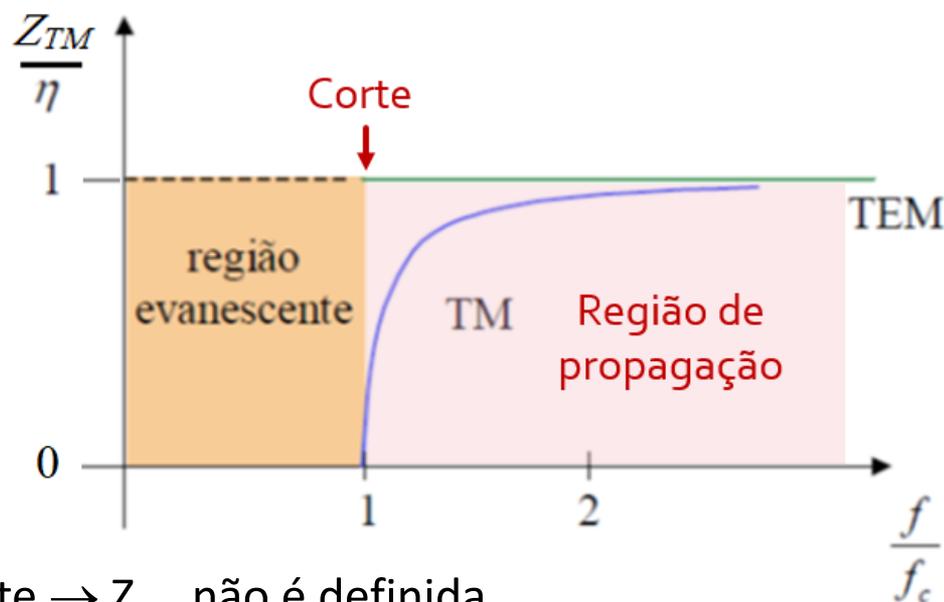
$f_c$  : frequência de corte do modo guiado

- Equação válida somente para  $f > f_c$
- $Z_{TM}$  depende
  - da frequência do sinal
  - da frequência de corte do modo
- $Z_{TM}$  é função de frequência  $\Rightarrow$  **dispersão**

# Guia de Ondas Retangular

## Impedância de onda do guia de ondas no modo $TM_{mn}$

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$



Para  $f < f_c \rightarrow$  região evanescente  $\rightarrow Z_{TM}$  não é definida

Para  $f = f_c \rightarrow$  corte  $\rightarrow Z_{TM}$  é nula  $\rightarrow$  curto-circuito

Para  $f > f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow Z_{TM}$  cresce com a frequência de operação

Para  $f \gg f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow Z_{TM}$  tende a  $\eta$ , impedância intrínseca do meio

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

# Guia de Ondas Retangular

- **Solução dos Modos TE**  $E_z = 0$  e  $H_z \neq 0$ 
  - Componente de campo magnético não nulo na direção de propagação  $z$

$$H_z \neq 0 \rightarrow \text{a ser determinado}$$

- Campo harmônico ou senoidal

$$H_z(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \neq 0$$

- Cálculo de  $H_z \Rightarrow$  equação de onda na direção  $z$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k^2 H_z = 0$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Solução geral de  $H_z$  do modo TE
  - Similar a obtida para  $E_z$  no modo TM

$$H_z = \left[ A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[ C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[ F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

MAS  $A, B, C, D, F$  e  $G$  são constantes diferentes das do modo TM

- Determinação das constantes  $A, B, C, D, F$  e  $G$ 
  - Aplicação das condições de contorno do guia de ondas

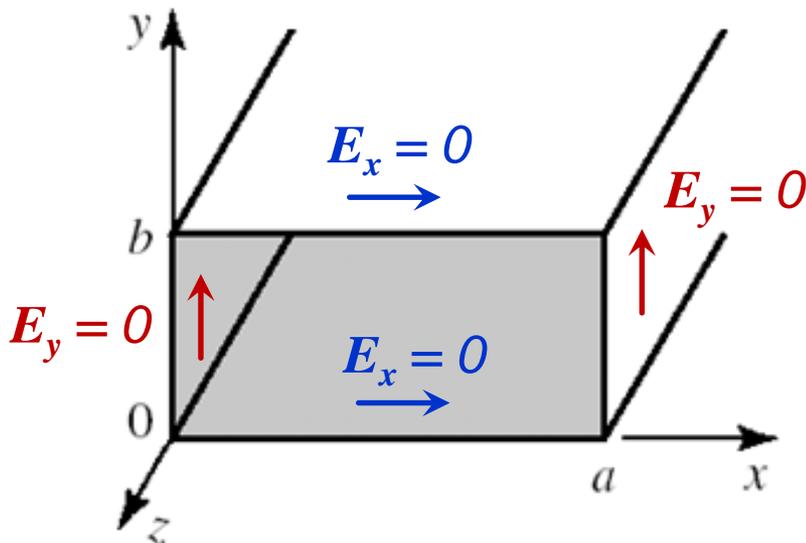
# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Condições de contorno
  - Campo elétrico tangencial ao metal é nulo

$H_z$  não é nulo nas paredes do guia, mas temos

- $E_y = 0$ 
  - Paredes verticais do guia
    - $x = 0$  e  $x = a$
- $E_x = 0$ 
  - Paredes horizontais do guia
    - $y = 0$  e  $y = b$



# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Campos  $E_x$  e  $E_y$  são funções de derivadas de  $H_z$

$$E_x = \frac{-j}{k_c^2} \left( \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)$$

$$E_y = \frac{j}{k_c^2} \left( -\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)$$

- No modo TE  $\rightarrow E_z = 0$

$$E_x = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad e \quad E_y = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Como

$$E_x = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y}$$

e

$$H_z = \left[ A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[ C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \sin(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[ F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

$$E_x \propto \frac{\partial H_z}{\partial y} = \left[ A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \sin(k_x \cdot x) \right] \cdot$$

$$\left[ -C \cdot k_y \cdot \sin(k_y \cdot y) + D \cdot k_y \cdot \cos(k_y \cdot y) \right] \cdot$$

$$\left[ F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

Condição de contorno

$E_y = 0$  nas paredes verticais do guia

$x = 0$  e  $x = a$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Como

$$E_y = -j \frac{\gamma \omega \mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad \text{e} \quad H_z = \left[ A \cdot \cos(k_x \cdot x) + B \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[ C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[ F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

$$E_y \propto \frac{\partial H_z}{\partial x} = \left[ -A \cdot k_x \cdot \text{sen}(k_x \cdot x) + B \cdot k_x \cdot \cos(k_x \cdot x) \right] \cdot \left[ C \cdot \cos(k_y \cdot y) + D \cdot \text{sen}(k_y \cdot y) \right] \cdot \left[ F \cdot e^{-\gamma \cdot z} + G \cdot e^{+\gamma \cdot z} \right]$$

Condição de contorno

$E_x = 0$  nas paredes horizontais do guia

$y = 0$  e  $y = a$

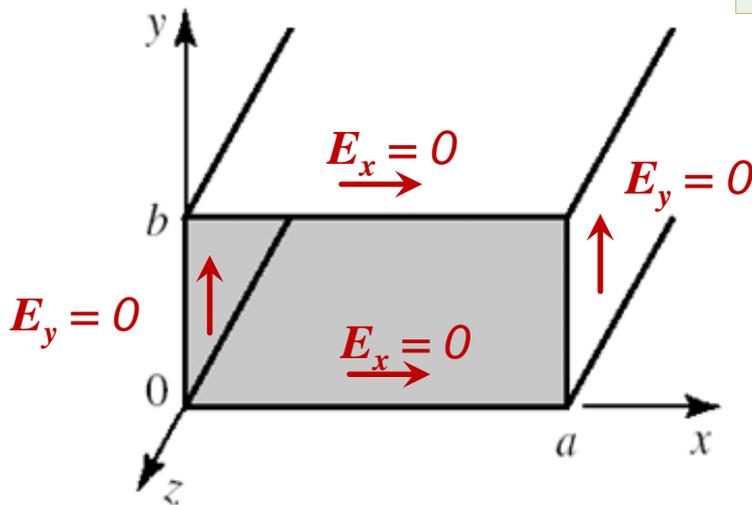
# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- Aplicando-se as condições de contorno de  $E_x$  e  $E_y$  nas paredes do guia de ondas, obtém-se

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$



onde

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$m + n \neq 0$$

Se  $m + n = 0 \Rightarrow H_z = H_0 = \text{cte}$

$\Rightarrow$  não é modo TE

# Guia de Ondas Retangular

## Modos TE

- A partir de  $H_z$  calcula-se

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\gamma m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\gamma n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modos $TE_{mn}$

- $m = 0, 1, 2, 3$      $n = 0, 1, 2, 3$     e     $m + n \neq 0$

Modos  $TE_{01}$   $TE_{10}$   $TE_{11}$   $TE_{02}$   $TE_{20}$   $TE_{21}$   $TE_{22}$   $TE_{03}$  ....

## ■ Frequência de corte do modo $TE_{mn}$

- Depende dos índices  $m$  e  $n$

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

$f < f_c$ : modos evanescentes

$f = f_c$ : corte

$f > f_c$ : propagação no guia de ondas

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modo TE<sub>10</sub>

- **Modo dominante** → menor frequência de corte
- Frequência de corte para m = 1 e n = 0

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{0}{b}\right)^2} \rightarrow f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_x = 0$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z} \rightarrow E_y \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Modo TE<sub>10</sub>**

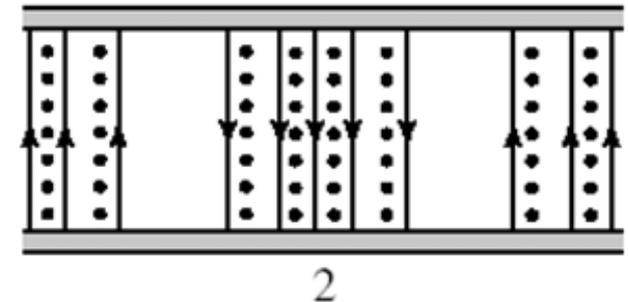
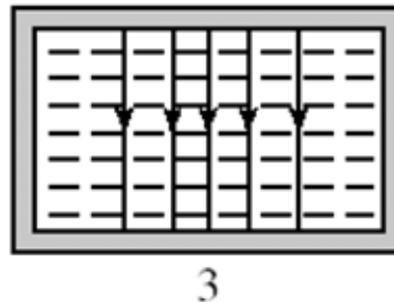
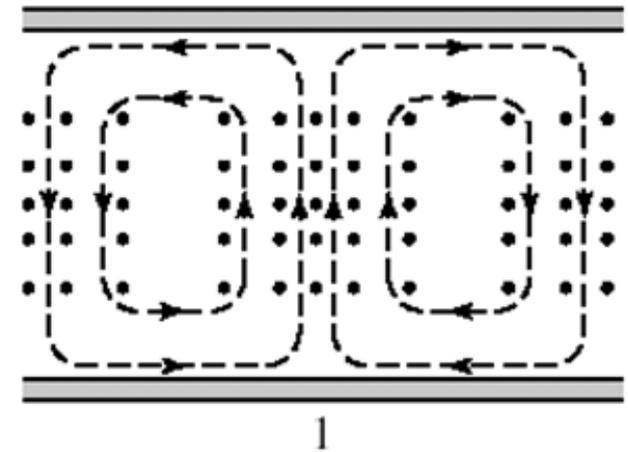
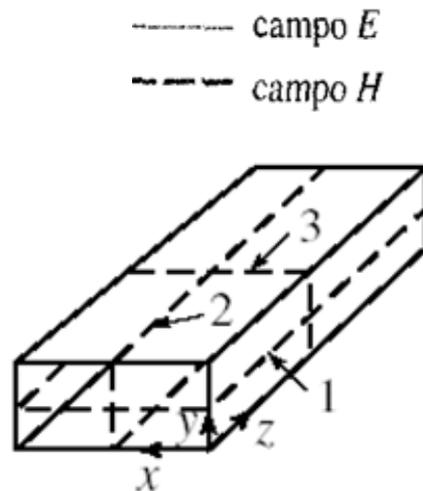
- Dominante

- Menor frequência de corte

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

$$E_x = 0$$

$$E_y \propto \text{sen} \left( \frac{\pi}{a} \cdot x \right)$$

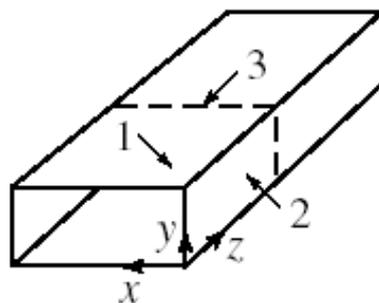


# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modo TE<sub>11</sub>

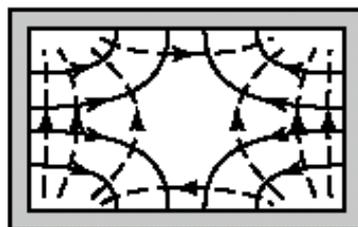
$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}$$

$$E_x(x, y) \propto \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$

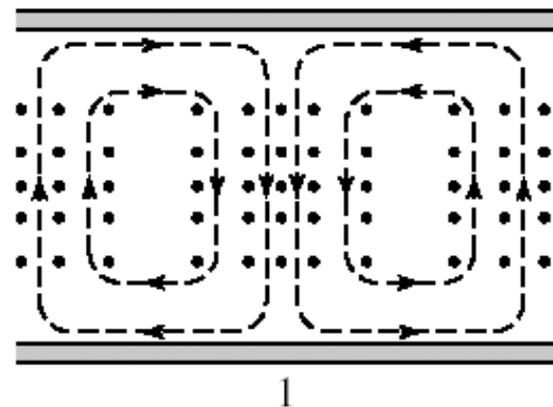


----- campo E  
 - - - - - campo H

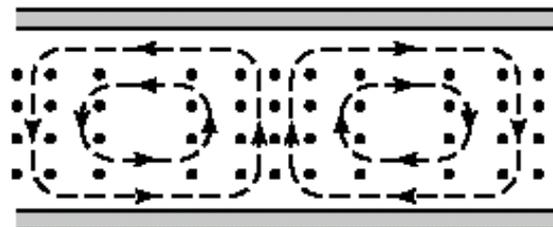
$$E_y(x, y) \propto \text{sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b} \cdot y\right)$$



3



1



2

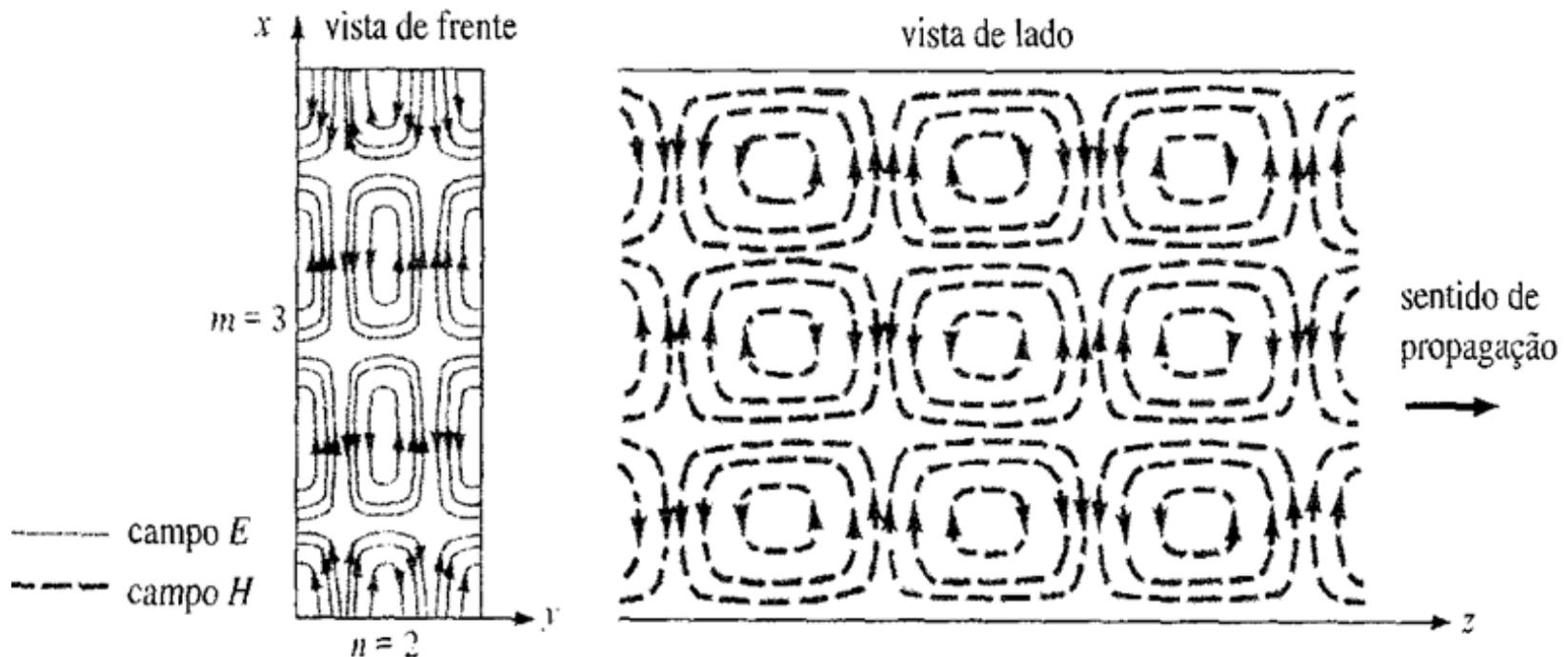
# Guia de Ondas Retangular

## ■ Modo TE<sub>32</sub>

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{b}\right)^2}$$

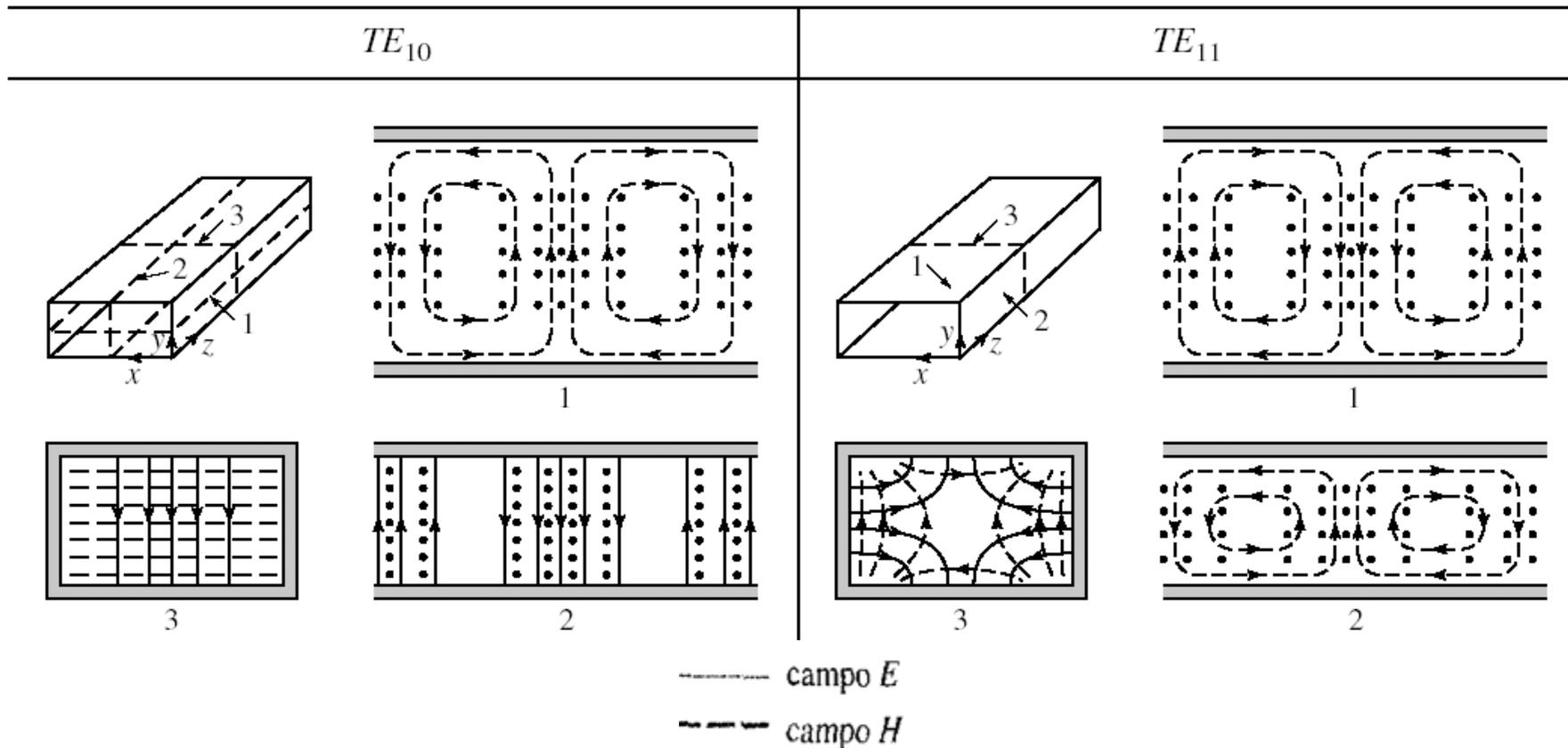
$$E_x(x,y) \propto \cos\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$

$$E_y(x,y) \propto \text{sen}\left(\frac{3\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{cos}\left(\frac{2\pi}{b} \cdot y\right)$$



# Guia de Ondas Retangular

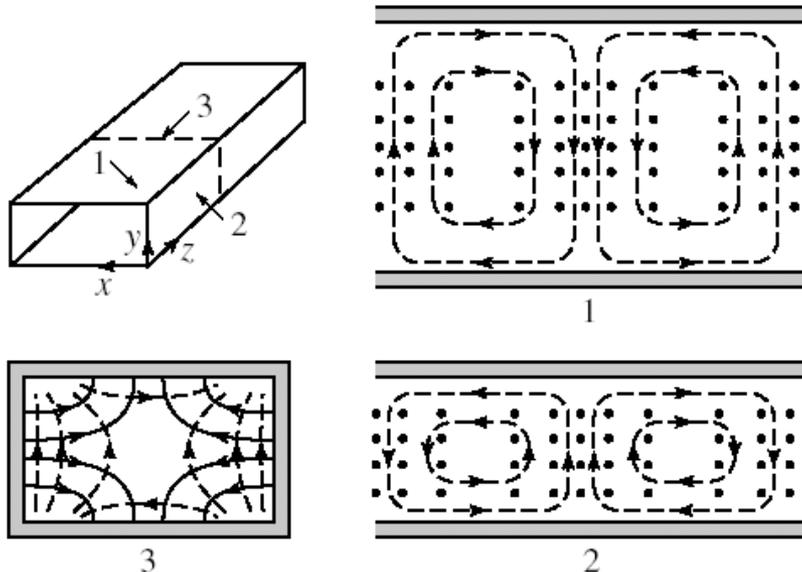
- Modos  $TE_{10}$  e  $TE_{11}$



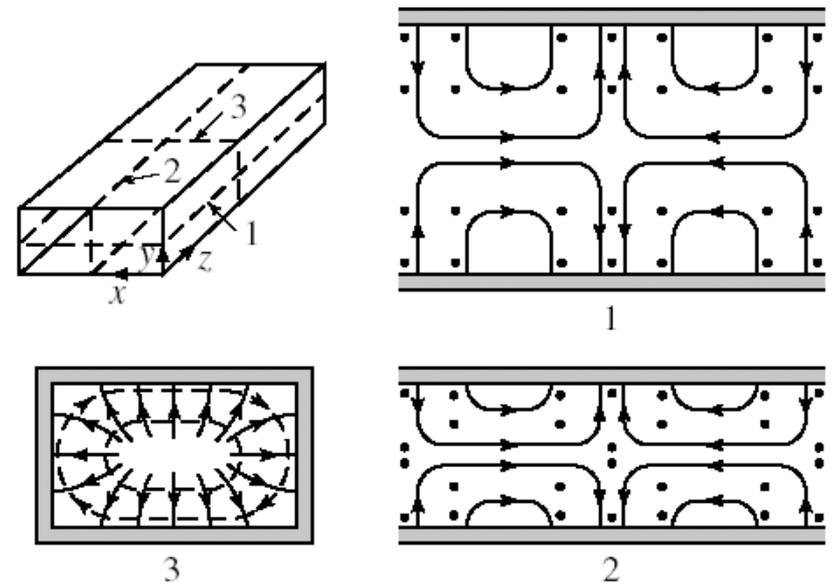
# Guia de Ondas Retangular

- Comparando os modos  $TE_{11}$  e  $TM_{11}$  - mesma  $f_c$

$TE_{11}$



$TM_{11}$



----- campo  $E$   
 - - - - - campo  $H$

# Guia de Ondas Retangular

## Exercício – Modos $TE_{mn}$

- Considere um guia de ondas retangular, sem perdas
  - Dimensões da seção transversal:  $a = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 20 \text{ mm}$
  - Preenchido por ar  $\rightarrow \epsilon_r = 1 \rightarrow v = c = 3 \cdot 10^{11} \text{ mm/s}$
- Calcule a frequência de corte dos modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ , e  $TE_{20}$  e  $TE_{11}$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2}$$

$$f_c = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (Hz)} \quad \text{ou} \quad f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{40}\right)^2 + \left(\frac{n}{20}\right)^2} \text{ (GHz)}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Exercício – Modos $TE_{mn}$

- Frequência de corte dos modos  $TE_{11}$ ,  $TE_{21}$ , e  $TE_{12}$  e  $TE_{22}$

$$TE_{10} \rightarrow m=1 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow m=0 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{0}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow m=2 \text{ e } n=0 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{40}\right)^2 + \left(\frac{0}{20}\right)^2} = 7,5 \text{ GHz}$$

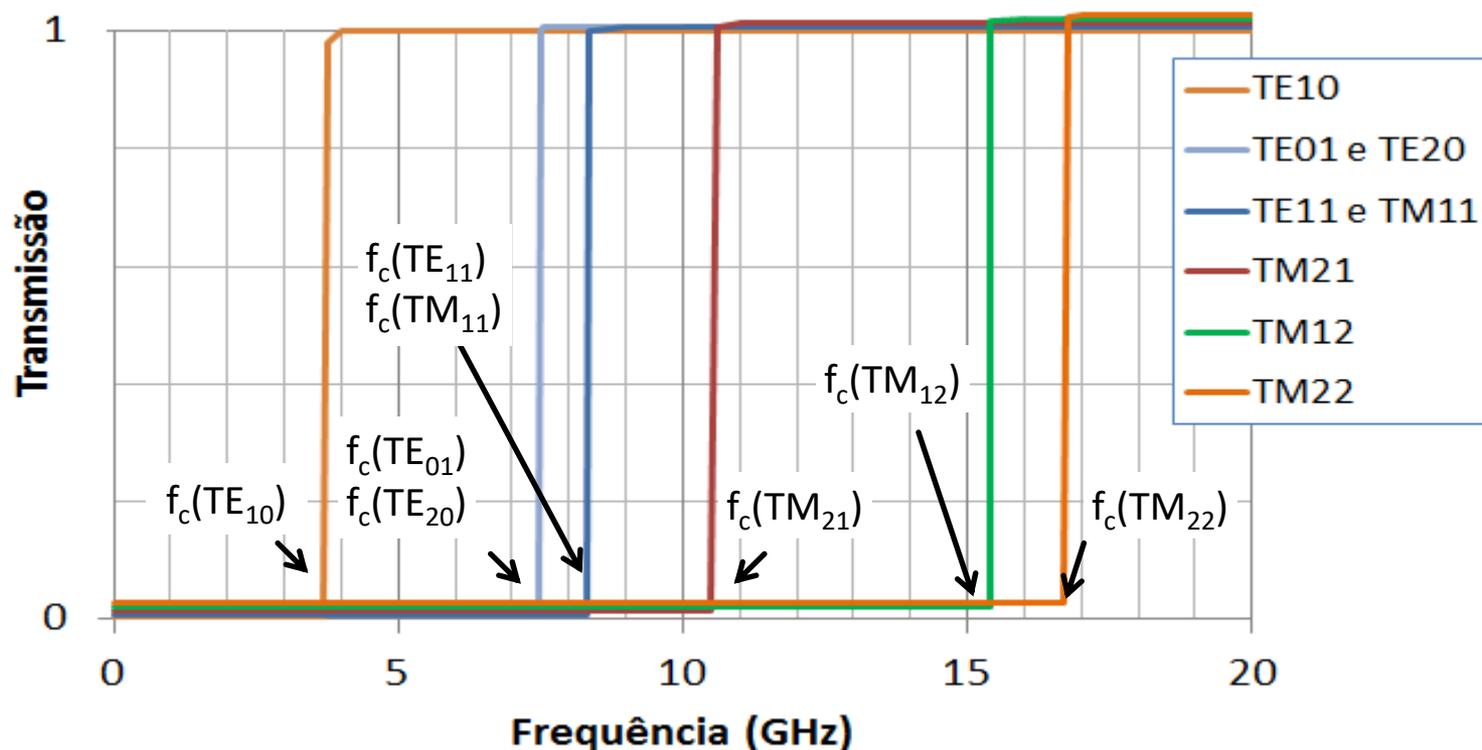
$$TE_{11} \rightarrow m=1 \text{ e } n=1 \rightarrow f_c = 150 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{40}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} = 8,38 \text{ GHz}$$

(e  $TM_{11}$ )

# Guia de Ondas Retangular

## Frequência de corte dos modos $TE_{mn}$ e $TM_{mn}$

Modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TE_{20}$ ,  $TE_{11}$ ,  $TM_{11}$ ,  $TM_{21}$ , e  $TM_{12}$  e  $TM_{22}$



# Guia de Ondas Retangular

- **Frequência de corte do modo  $TE_{mn}$**

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

← Mesma equação que para o modo  $TM_{mn}$

- Como no modo  $TM_{mn}$

- **Comprimento de onda guiado do modo  $TE_{mn}$**

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

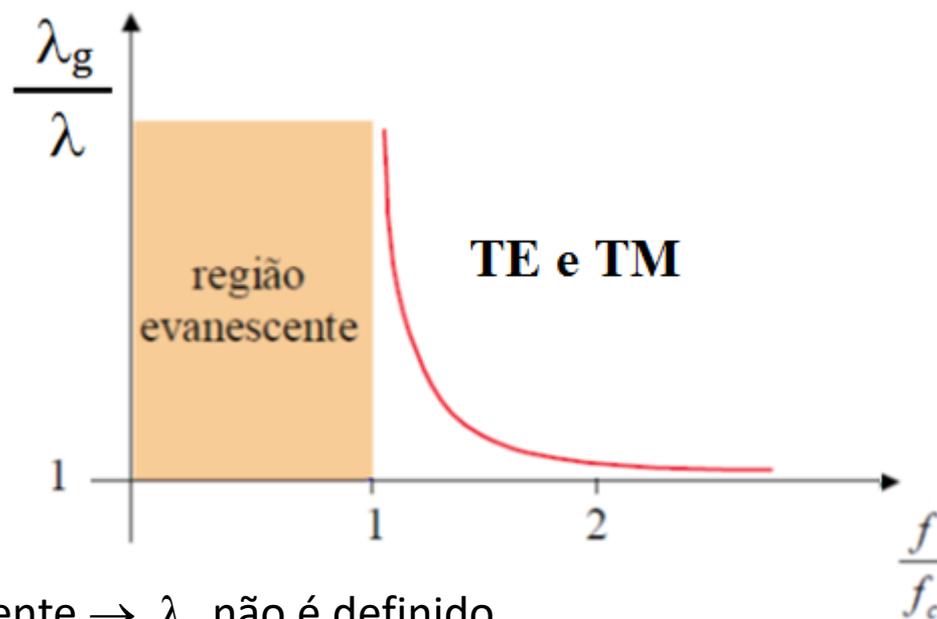
← Mesma equação que para o modo  $TM_{mn}$

- Vale apenas para  $f > f_c$
- Como no modo  $TM_{mn}$

# Guia de Ondas Retangular

## Comprimento de onda guiado do modo $TE_{mn}$ (e $TM_{nm}$ )

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Como nos modos  $TM_{mn}$

Para  $f < f_c \rightarrow$  região evanescente  $\rightarrow \lambda_g$  não é definido

Para  $f = f_c \rightarrow$  corte  $\rightarrow \lambda_g$  tende a infinito  $\rightarrow$  circuito aberto

Para  $f > f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow \lambda_g$  decresce cresce com a frequência de operação

Para  $f \gg f_c \rightarrow$  região de propagação  $\rightarrow \lambda_g$  tende a  $\lambda$ , comprimento de onda do meio

# Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas no modo  $TE_{mn}$

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} \quad \Rightarrow \quad Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

$\eta$  : impedância intrínseca do meio que preenche o guia de ondas

$f_c$  : frequência de corte do modo guiado

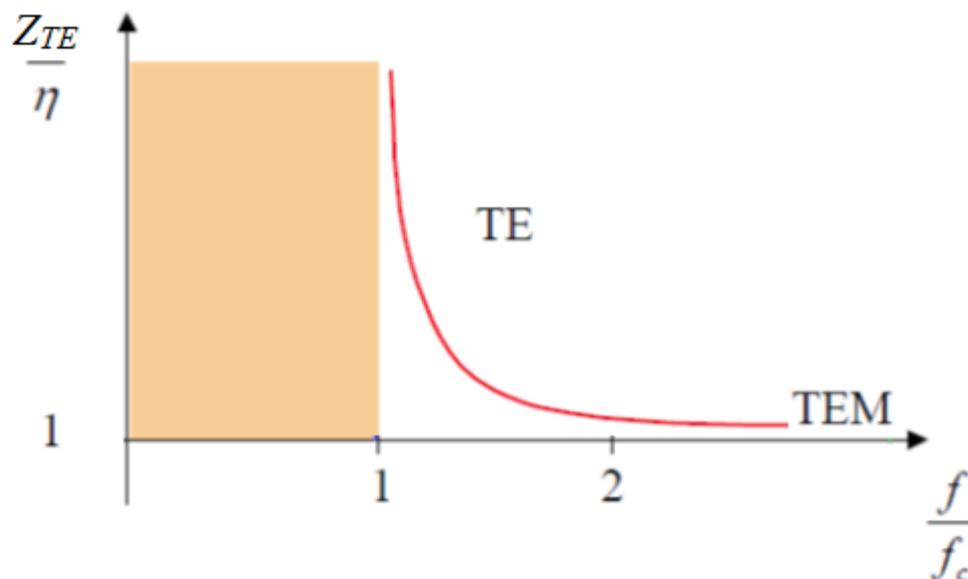
- Vale apenas para  $f > f_c$
- Depende da frequência de corte do modo
- $Z_{TE}$  é função de frequência  $\Rightarrow$  **dispersão**

- **NOTE:**  $Z_{TE}$  é diferente de  $Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

# Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos  $TE_{mn}$

$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$



Para  $f < f_c$  → região evanescente →  $Z_{TE}$  não é definida

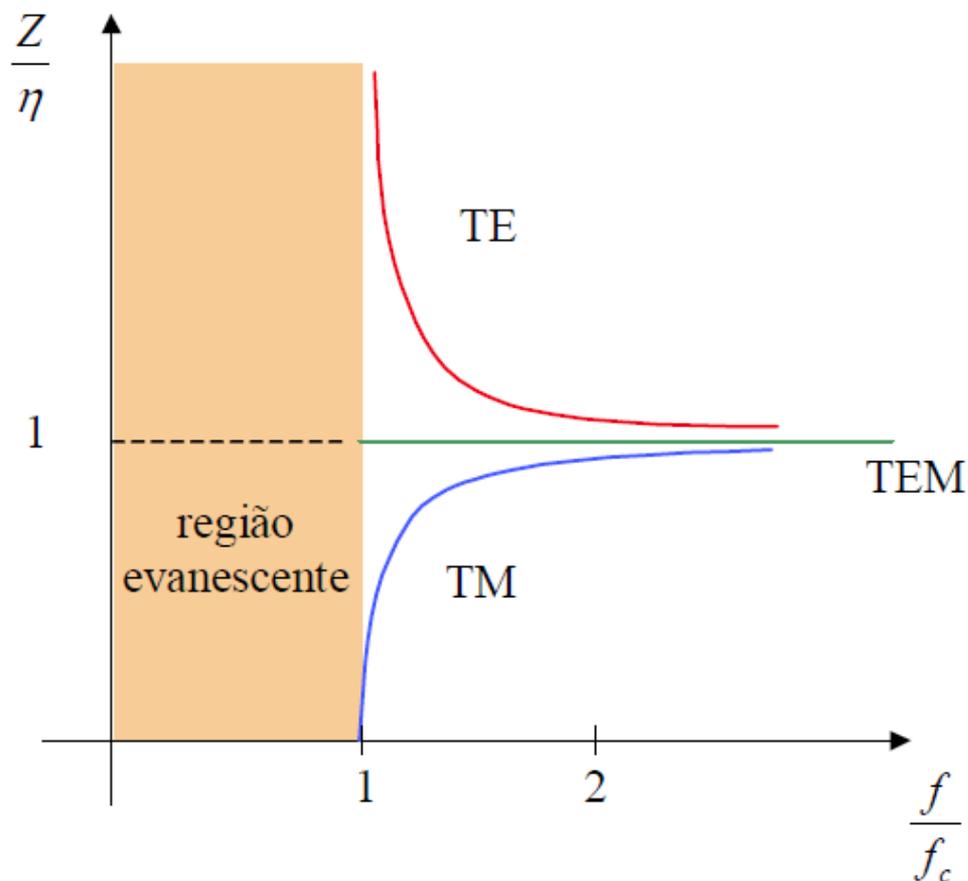
Para  $f = f_c$  → corte →  $Z_{TE}$  tende a infinito

Para  $f > f_c$  → região de propagação →  $Z_{TE}$  decresce com a frequência de operação

Para  $f \gg f_c$  → região de propagação →  $Z_{TE}$  tende a  $\eta$ , impedância intrínseca do meio

# Guia de Ondas Retangular

- Impedância de onda do guia de ondas nos modos  $TM_{mn}$  e  $TE_{mn}$



$$Z_{TE} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

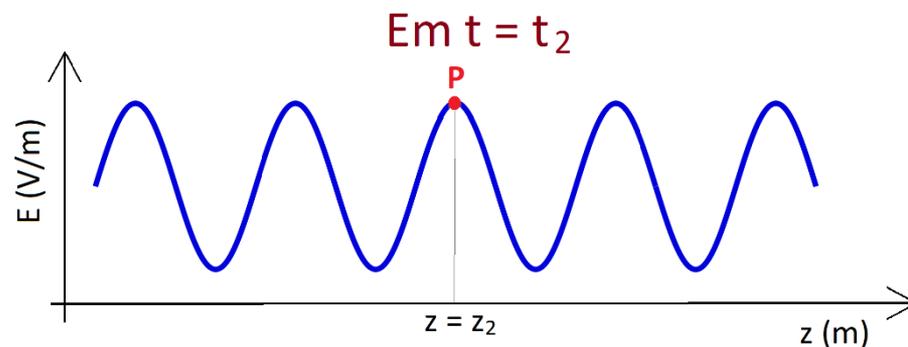
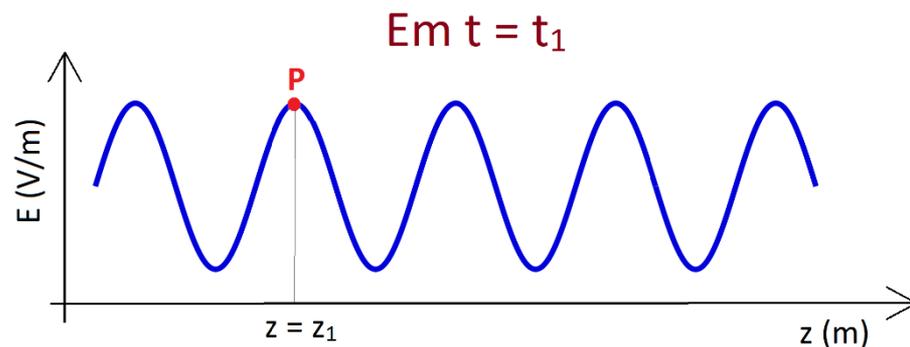
$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

### Velocidade de fase em meio sem fronteiras

- Velocidade da fase da onda na direção de propagação



- Onda no espaço livre
- Propagação na direção  $z$

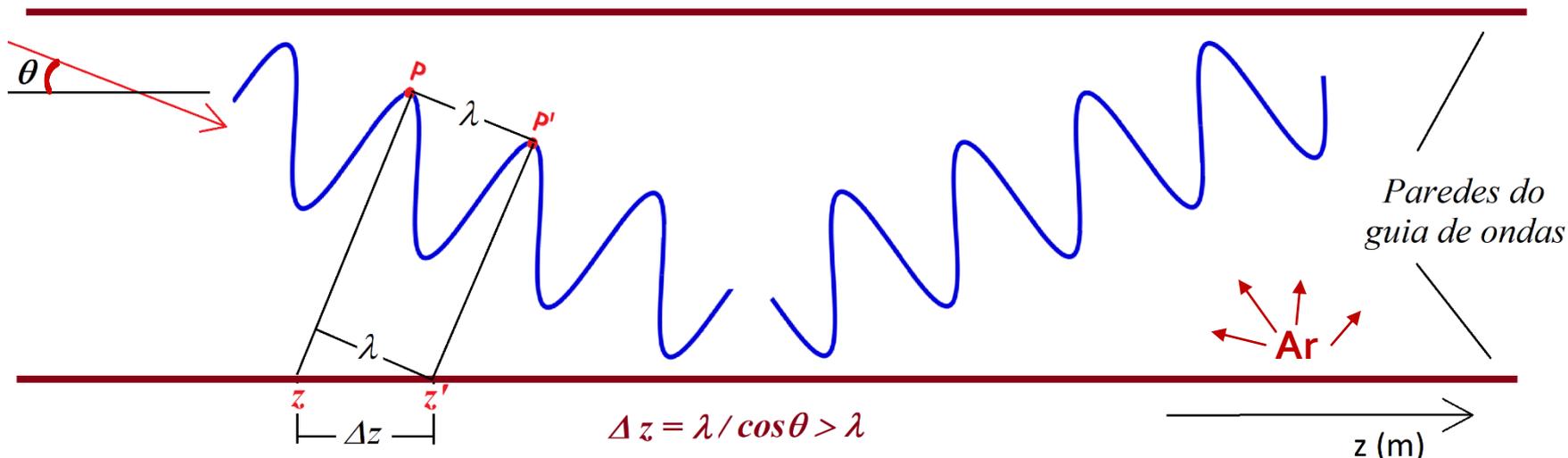
$$v_f = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} = c$$

# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

### Velocidade de fase no guia de ondas

- Onda incidindo com ângulo  $\theta$  em relação à direção de propagação  $z$



- Velocidade de fase na direção de incidência:  $v_f = c$
- Velocidade de fase na direção de propagação  $z$ :  $v_f = c / \cos \theta > c$

# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

### Velocidade de fase na direção de propagação

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para  $f > f_c$
- Guias de ondas preenchido com ar  $\rightarrow v_f$  é maior que a velocidade da luz!
- Definida para um  sinal monocromático 
  - $\rightarrow$  sinal de frequência única, sem modulação
  - $\rightarrow$  não transporta informação
- Não representa o transporte de informação, sendo portanto compatível com a teoria EM

# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

### Velocidade de grupo

- Definida para um sinal modulado pela informação
  - é a velocidade de propagação da envoltória do sinal
  - velocidade de propagação da informação

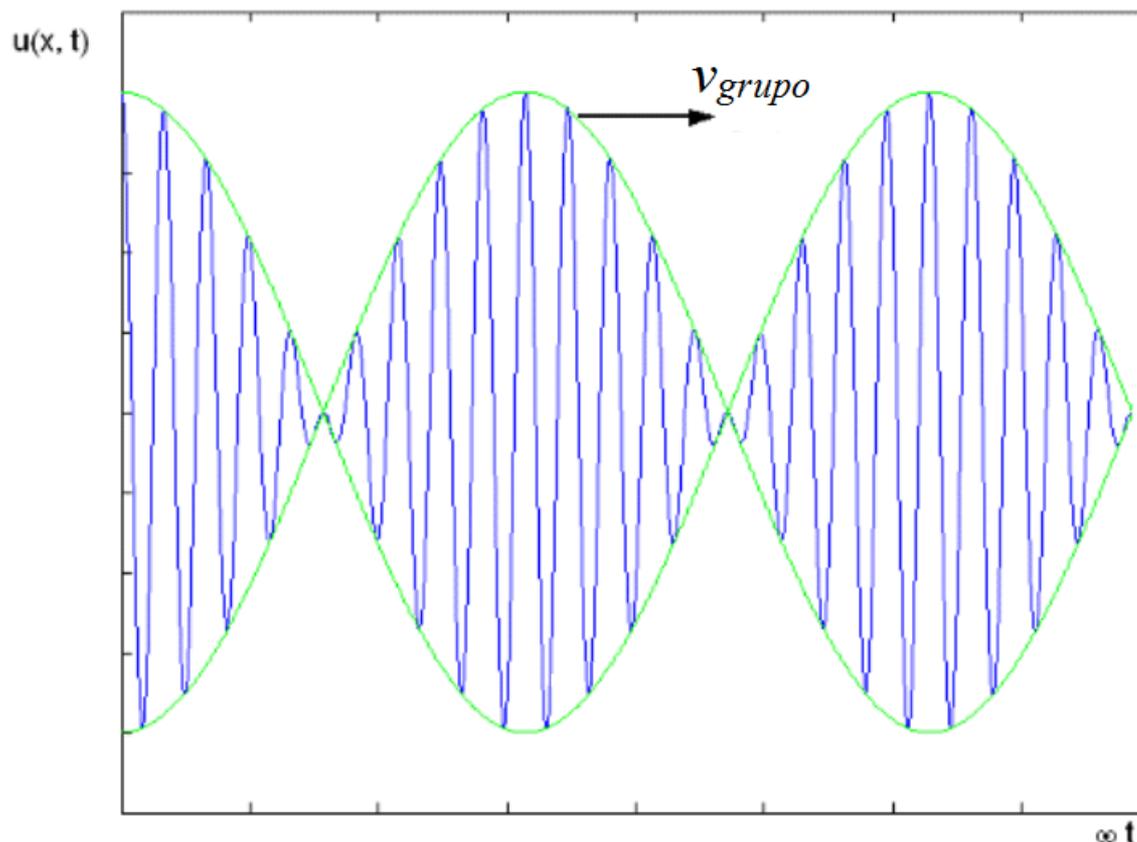
$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

- Vale apenas para  $f > f_c$
- Representa a velocidade com que se propaga o envoltório de um sinal modulado pela informação

# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de grupo

Velocidade de propagação da envoltória do sinal modulado



# Guia de Ondas Retangular

## Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados

- Velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \geq v$$

- Velocidade de grupo

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = v \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \leq v$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}$$
$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r}}$$

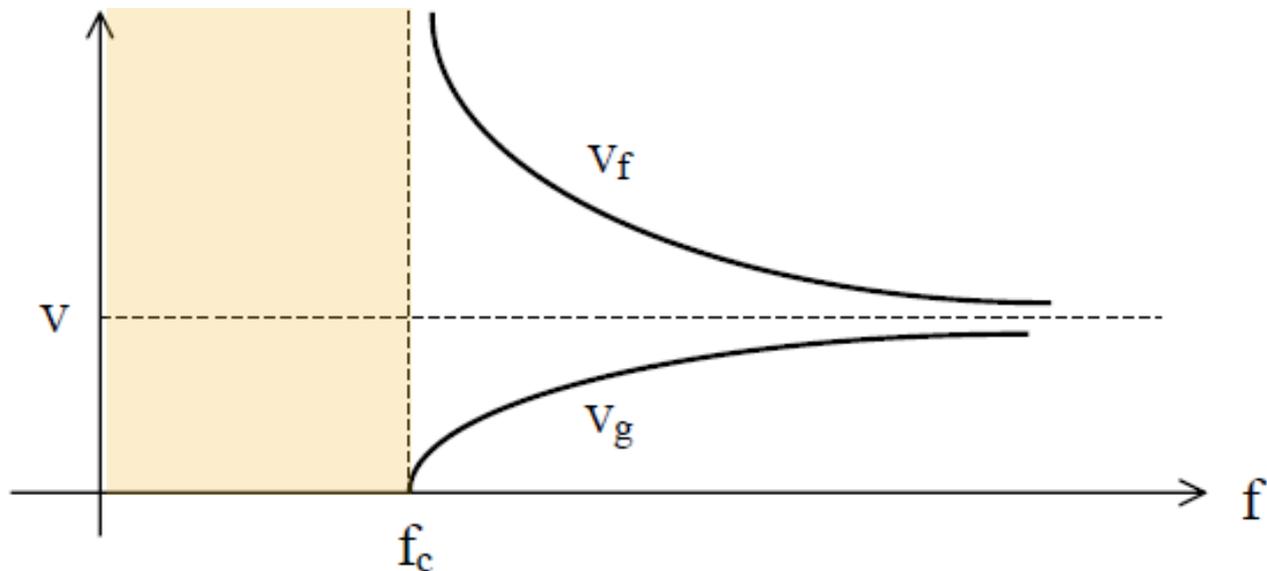
- Resulta

$$v_f \cdot v_g = v^2$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Velocidade de fase e de grupo dos modos guiados**

- $v_f \cdot v_g = v^2$



# Guia de Ondas Retangular

## Modos $TM_{mn}$

$$m = 1, 2, 3... \quad n = 1, 2, 3...$$

$$H_z = 0 \quad E_z = E_0 \cdot \text{sen} \left( \frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

## Modos $TE_{mn}$

$$m = 0, 1, 2... \quad n = 0, 1, 2... \quad m+n \neq 0$$

$$E_z = 0 \quad H_z = H_0 \cdot \text{cos} \left( \frac{m\pi}{a} \cdot x \right) \cdot \text{cos} \left( \frac{n\pi}{b} \cdot y \right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos $TM_{mn}$

$m = 1, 2, 3, \dots$     $n = 1, 2, 3, \dots$

$$H_z = 0$$

$$E_z = E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{-j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot E_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

## Modos $TE_{mn}$

$m = 0, 1, 2, \dots$     $n = 0, 1, 2, \dots$     $m + n \neq 0$

$$E_z = 0$$

$$H_z = H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_x = \frac{j\omega\mu n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$E_y = \frac{-j\omega\mu m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_x = \frac{j\beta m\pi}{k_c^2 \cdot a} \cdot H_0 \cdot \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

$$H_y = \frac{j\beta n\pi}{k_c^2 \cdot b} \cdot H_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot e^{-\gamma \cdot z}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos $TE_{mn}$ e $TM_{mn}$

Fator de propagação  $\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$

Frequência de corte  $f = f_c$   
tal que  $\gamma = 0$

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

TE:  $m, n = 0, 1, 2, \dots$   $m + n \neq 0$   
TM:  $m, n = 1, 2, 3, \dots$

Modos evanescentes  $f < f_c$   
 $\gamma = \alpha$ , número real

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Modos propagantes  $f > f_c$ :

$$\gamma = j \cdot \beta \quad \beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad \lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

# Guia de Ondas Retangular

## Modos $TM_{mn}$

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad f = f_c : Z_{TM} = 0 \quad f \gg f_c : Z_{TM} \rightarrow \eta$$

Dispersão de  $Z_{TM}$  com frequência

## Modos $TE_{mn}$

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} \quad f = f_c : Z_{TE} \rightarrow \textit{infinito} \quad f \gg f_c : Z_{TE} \rightarrow \eta$$

Dispersão de  $Z_{TE}$  com frequência

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Exercício

- Dado um guia de ondas retangular, preenchido com ar, com  $a = 4$  cm e  $b = 2$  cm, obtivemos as frequências de corte:

$$TE_{10} \rightarrow 3,75 \text{ GHz}$$

$$TE_{11} \text{ e } TM_{11} \rightarrow 8,38 \text{ GHz}$$

$$TE_{01} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{21} \text{ e } TM_{21} \rightarrow 10,61 \text{ GHz}$$

$$TE_{20} \rightarrow 7,50 \text{ GHz}$$

$$TE_{12} \text{ e } TM_{12} \rightarrow 15,46 \text{ GHz}$$

- Quais os modos de propagação de uma onda eletromagnética de 10 GHz propagando-se nesse guia?
- Qual o modo de propagação e o comprimento de onda de um onda EM de 5 GHz propagando-se nesse guia?
- Qual a impedância de onda vista por essa onda EM de 5 GHz?

# Guia de Ondas Retangular

- **Faixa de operação recomendada**
  - Modo fundamental
    - Modo com a menor frequência de corte
    - Modo TE<sub>10</sub>

$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Para  $m = 1$  e  $n = 0$

$$f_c = \frac{v}{2 \cdot a}$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Faixa de operação recomendada

- Limite inferior da faixa de operação → baixas perdas

$$f \geq 1,25 \cdot f_c (TE_{10})$$

- Origem das perdas no guia de ondas

### Perdas dielétricas - $\varepsilon = \varepsilon' - j \cdot \varepsilon''$

- Para o modo TE<sub>10</sub>

$$\alpha_d = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 \cdot \varepsilon'} \cdot (\varepsilon' / \varepsilon'')}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}}$$

### Perdas condutivas - $\sigma$ finito

- Para o modo TE<sub>10</sub>

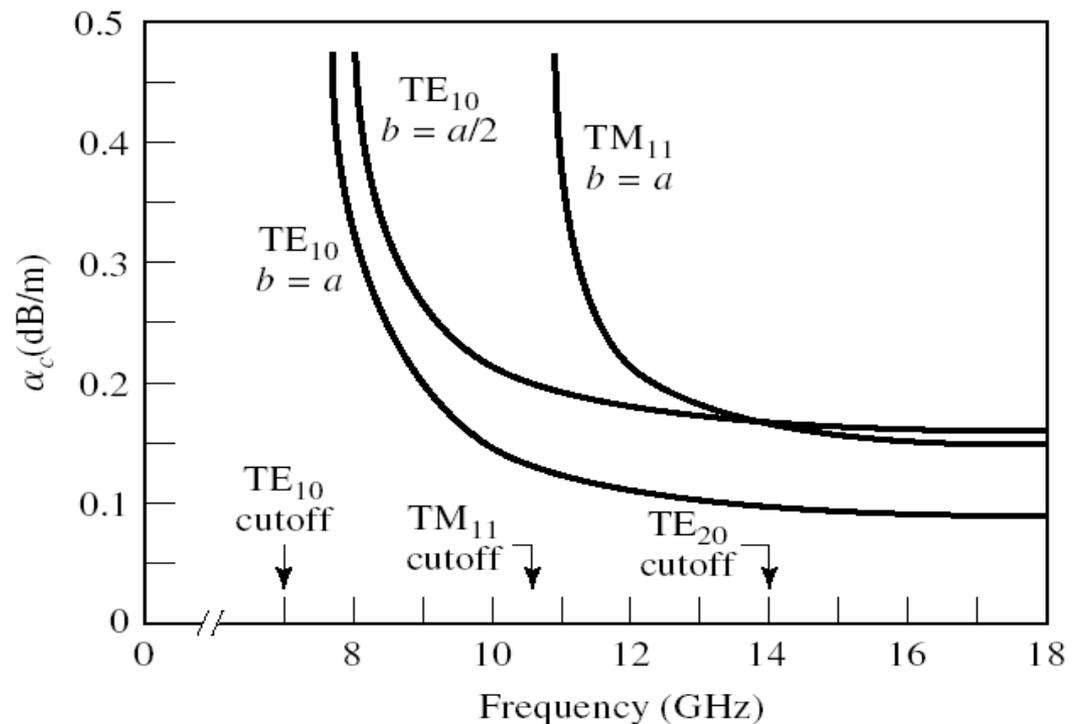
$$\alpha_c = \frac{R_s [1 + (2b/a) \cdot (f_{c10} / f)^2]}{\eta \cdot b \cdot \sqrt{1 - (f_{c10} / f)^2}}$$

$$R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}$$

# Guia de Ondas Retangular

- **Faixa de operação recomendada**
  - Em  $f = f_c$  : perdas tendem a infinito
  - Baixas perdas  $\Rightarrow f \geq 1,25.f_c (TE_{10})$

Perdas dos modos TE em função de frequência



# Guia de Ondas Retangular

- **Faixa de operação recomendada**
  - Limite superior da faixa de operação
    - Deseja-se propagação em um único modo guiado
    - Guia deve operar em frequências inferiores à de corte do segundo modo que se propaga no guia
  - Assumindo  $a \approx 2 \cdot b$ 
    - Modos que surgem logo após o modo fundamental
    - Modos  $TE_{01}$  e  $TE_{20}$  – com frequências de corte próximas

$$f_c(TE_{01}) = \frac{v}{2 \cdot b} \approx f_c(TE_{20}) = \frac{v}{a}$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Faixa de operação recomendada

- Frequência de corte do modo fundamental – TE<sub>10</sub>

$$f_c(TE_{10}) = \frac{v}{2 \cdot a}$$

- Frequência de corte dos modos – TE<sub>01</sub> e TE<sub>20</sub>

$$f_c(TE_{01}) \approx f_c(TE_{20}) = \frac{v}{a} = 2 \cdot f_c(TE_{10})$$

- Limite superior faixa de frequência de operação  $f < 2 \cdot f_c(TE_{10})$
- Para que se propague um único modo, com baixas perdas, a faixa de operação recomendada é

$$1,25 \cdot f_c(TE_{10}) \leq f \leq 1,9 \cdot f_c(TE_{10})$$

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-430	4,30 x 2,15	10,92 x 5,46	1,372	1,70 – 2,60
WR-340	3,40 x 1,70	8,636 x 4,31	1,726	2,20 – 3,30
WR-284	2,84 x 1,34	7,21 x 3,40	2,078	2,60 – 3,95
WR-229	2,29 x 1,145	5,81 x 2,90	2,577	3,30 – 4,90
WR-187	1,872 x 0,872	4,79 x 2,21	3,129	3,95 – 5,85
WR-159	1,59 x 0,795	4,038 x 2,019	3,711	4,90 – 7,05
WR-137	1,372 x 0,622	3,84 x 1,579	4,304	5,85 – 8,20

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (cm x cm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-112	1,122 x 0,497	2,84 x 1,26	5,26	7,05 – 10,0
WR-102	1,020 x 0,510	2,59 x 1,29	5,785	7,3 – 11,0
WR-90	0,90 x 0,40	2,286 x 1,016	6,56	8,20 – 12,4
WR-75	0,75 x 0,375	1,905 x 0,95	7,87	10,0 – 15,0
WR-62	0,622 x 0,311	1,579 x 0,789	9,49	12,4 – 18,0
WR-51	0,51 x 0,255	1,295 x 0,65	11,57	15,0 – 22,0
WR-42	0,42 x 0,17	1,067 x 0,43	14,06	18,0 – 26,5

# Guia de Ondas Retangular

## ■ Guias de ondas retangular padrão (preenchidos com ar)

Guia de ondas designação	a x b (polegada x polegada)	a x b (mm x mm)	Frequência de corte (GHz)	Faixas de operação recomendadas (GHz)
WR-34	0,340 x 0,700	8,636 x 17,780	17,33	22,0 – 33,0
WR-28	0,280 x 0,140	7,112 x 3,556	21,08	27,0 – 40,0
WR-22	0,224 x 0,112	5,690 x 2,854	26,34	33,0 – 50,0
WR-15	0,148 x 0,074	3,759 x 1,880	39,86	50,0 – 75,0
WR-12	0,122 x 0,061	3,099 x 1,549	48,35	60,0 – 90,0
WR-10	0,100 x 0,050	2,540 x 1,270	59,01	75,0 – 110,0
WR-6	0,065 x 0,0325	1,651 x 0,826	90,84	110,0 – 170,0

# Guia de Ondas Retangular

- **Guias de ondas retangular preenchidos**
- Interior do guia preenchido com material dielétrico

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_r \cdot \mathcal{E}_0$$

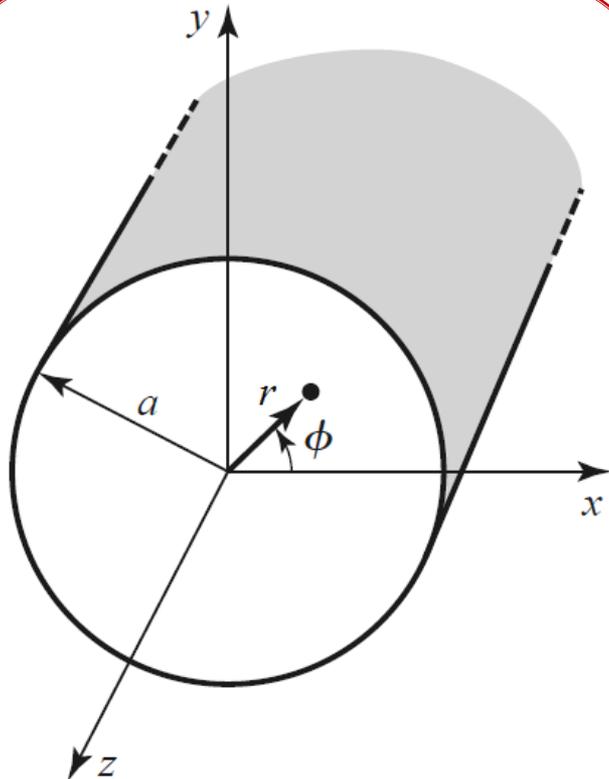
$$f_c = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \Rightarrow f_c = \frac{c}{2 \cdot \sqrt{\mathcal{E}_r}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

- Permite reduzir as dimensões do guia de ondas, para uma dada faixa de frequência de operação

# Guias de Ondas

## Guia de Ondas Cilíndrico

# Guia de Ondas Cilíndrico



Guia de ondas cilíndrico e coordenadas cilíndricas

## Guia de Ondas Cilíndrico ou Circular

- Tubo metálico oco
- Preenchido por dielétrico, geralmente ar
- Direção de propagação:  $z$
- $a$ : raio interno do tubo metálico

## Coordenadas Cilíndricas

- $r$  – distância do centro do sistema de coordenadas até o ponto
- $\phi$  – ângulo da projeção no plano x-y, medido a partir do eixo x
- $z$  – posição ao longo do eixo z

# Guia de Ondas Cilíndrico

- Fasores dos campos E e H em coordenadas retangulares

$$\bar{E} = E_x \cdot \hat{a}_x + E_y \cdot \hat{a}_y + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_x \cdot \hat{a}_x + H_y \cdot \hat{a}_y + H_z \cdot \hat{a}_z$$

$\hat{a}_x$   
 $\hat{a}_y$   
 $\hat{a}_z$  } Vetores unitários nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente

- Fasores dos campos E e H em coordenadas cilíndricas

$$\bar{E} = E_\rho \cdot \hat{a}_r + E_\phi \cdot \hat{a}_\phi + E_z \cdot \hat{a}_z$$

$$\bar{H} = H_\rho \cdot \hat{a}_r + H_\phi \cdot \hat{a}_\phi + H_z \cdot \hat{a}_z$$

$\hat{a}_r$   
 $\hat{a}_\phi$   
 $\hat{a}_z$  } Vetores unitários nas direções  $r$ ,  $\phi$  e  $z$ , respectivamente

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos de propagação

- Modo TE –  $E_z = 0$  e  $H_z \neq 0$
  - Modo TM –  $H_z = 0$  e  $E_z \neq 0$
- Conhecidos  $E_z$  e  $H_z$  obtém-se
- $E_\rho$  e  $H_\rho$
  - $E_\phi$  e  $H_\phi$
  - Funções de  $\frac{\partial E_z}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial E_z}{\partial \phi}$  e  $\frac{\partial H_z}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial H_z}{\partial \phi}$

## Componentes de E e H nas direções $\phi$ e em $r$

$$E_\rho = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \quad H_\rho = \frac{j}{k_c^2} \left( \frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$
$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Determinação dos campos E e H

- Resolução das equações de onda na forma fasorial
  - Em meio dielétrico sem perdas, linear, homogêneo e isotrópico, sem fontes de campo ( $\rho = 0$  e  $J = 0$ ), aplicam-se as equações de onda

$$\nabla^2 \bar{E} + k^2 \bar{E} = \vec{0}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\nabla^2 \bar{H} + k^2 \bar{H} = \vec{0}$$

$\omega$  frequência angular

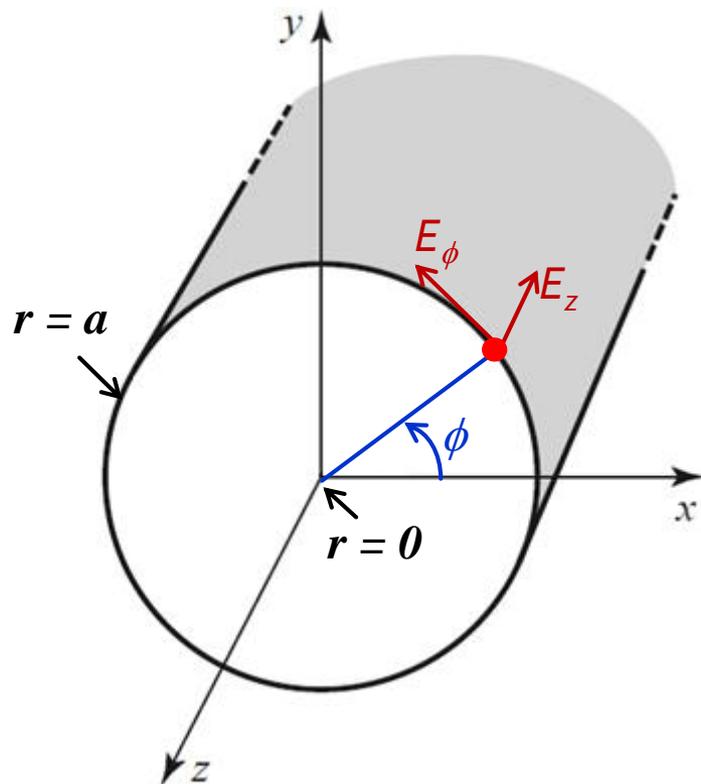
$\mu$  permeabilidade magnética

$\epsilon$  permissividade elétrica

- Aplicação das condições de contorno
  - Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo

# Guia de Ondas Cilíndrico

## ■ Condições de contorno



- Componentes de Campo elétrico tangenciais às paredes do guia de ondas circular

$$E_z \text{ e } E_\phi$$

- Campo elétrico tangencial à parede metálica do guia de ondas é nulo
- Logo

$$\text{Em } r = a \rightarrow \begin{matrix} E_z = 0 \\ \text{e} \\ E_\phi = 0 \end{matrix}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

# Guia de Ondas Cilíndrico

**Modos TM – propagação na direção  $z \rightarrow E_z \neq 0$  e  $H_z = 0$**

- Equação de onda

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad \text{sendo } k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

- Componente do Laplaciano na direção  $z$ , em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 E(r, \phi, z) \text{ em } \hat{a}_{1z} \rightarrow \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

- Equação de onda na direção  $z$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + k^2 \cdot E_z = 0$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM – propagação na direção $z$

- Considerando campo é harmônico

$$E_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot Z(z), \text{ sendo } Z(z) = e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Equação de onda na direção  $z$  resulta

$$R'' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r} R' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r^2} R \cdot F'' \cdot Z + R \cdot F \cdot Z'' + k^2 \cdot R \cdot F \cdot Z = 0$$

- Considerando  $\rightarrow Z(z) = e^{-j \cdot \beta \cdot z} \rightarrow Z'' = -\beta^2 \cdot Z$

$$R'' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r} R' \cdot F \cdot Z + \frac{1}{r^2} R \cdot F'' \cdot Z + \underbrace{(k^2 - \beta^2)}_{k_c^2} \cdot R \cdot F \cdot Z = 0$$
$$k_c^2 = k^2 - \beta^2$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Dividindo-se a equação anterior por  $E_z$ , obtém-se:

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2} \frac{F''}{F} + k_c^2 = 0$$

- Multiplicando se os termos da equação por  $r^2$  e rearranjando, tem-se:

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = -\frac{F''}{F}$$

- Como o primeiro termo é função de  $r$  e o segundo termo é função de  $\phi$ , a equação anterior só é válida se ambos os termos forem constantes gerando duas equações:

$$\boxed{-\frac{F''}{F} = n^2} \quad \text{e} \quad \boxed{r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = n^2}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Solução de 
$$-\frac{F''}{F} = n^2$$
- Similar à vista para guias retangulares  $\rightarrow F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)$
- $E_z$  tem que ser uma função periódica e contínua em  $\phi$ , logo
$$F(\phi) = F(\phi \pm 2 \cdot \pi \cdot p) \rightarrow \text{sendo } p \text{ um número inteiro: } p = 0, 1, 2, 3, \dots$$
- Como  $F(\phi + 2\pi \cdot p) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi + 2\pi \cdot n \cdot p) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi + 2\pi \cdot n \cdot p)$
- Então, para que  $F(\phi) = F(\phi \pm 2 \cdot \pi \cdot p)$

$\rightarrow n$  tem que ser numero inteiro

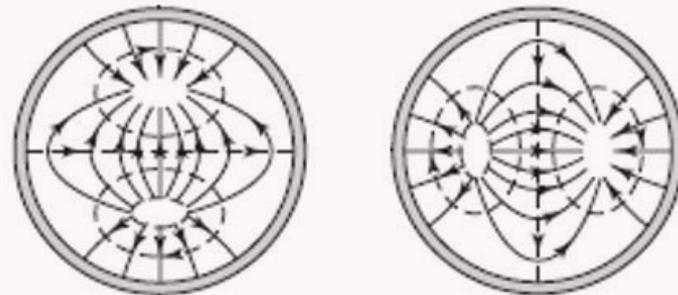
# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Temos  $F(\phi) = A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)$
- Sendo  $n$  é um número inteiro:  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
- Inúmeras soluções são possíveis para as constantes  $A$  e  $B$
- Exemplo:  $A=0$  e  $B \neq 0$  ou  $A \neq 0$  e  $B=0$

→ modos ortogonais entre si

Modos TM<sub>11</sub>  
ortogonais entre si



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Solução da equação  $r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + r^2 k_c^2 = n^2$ 
  - Função bem conhecida

$$R(r) = J_n(k_c \cdot r)$$

Sendo,

$J_n$  – Função de Bessel de primeira espécie e ordem  $n$

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

$f_c$  – Frequência de corte do modo de propagação

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Fasor do Campo Elétrico na direção

$$E_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cos((n \cdot \phi))] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

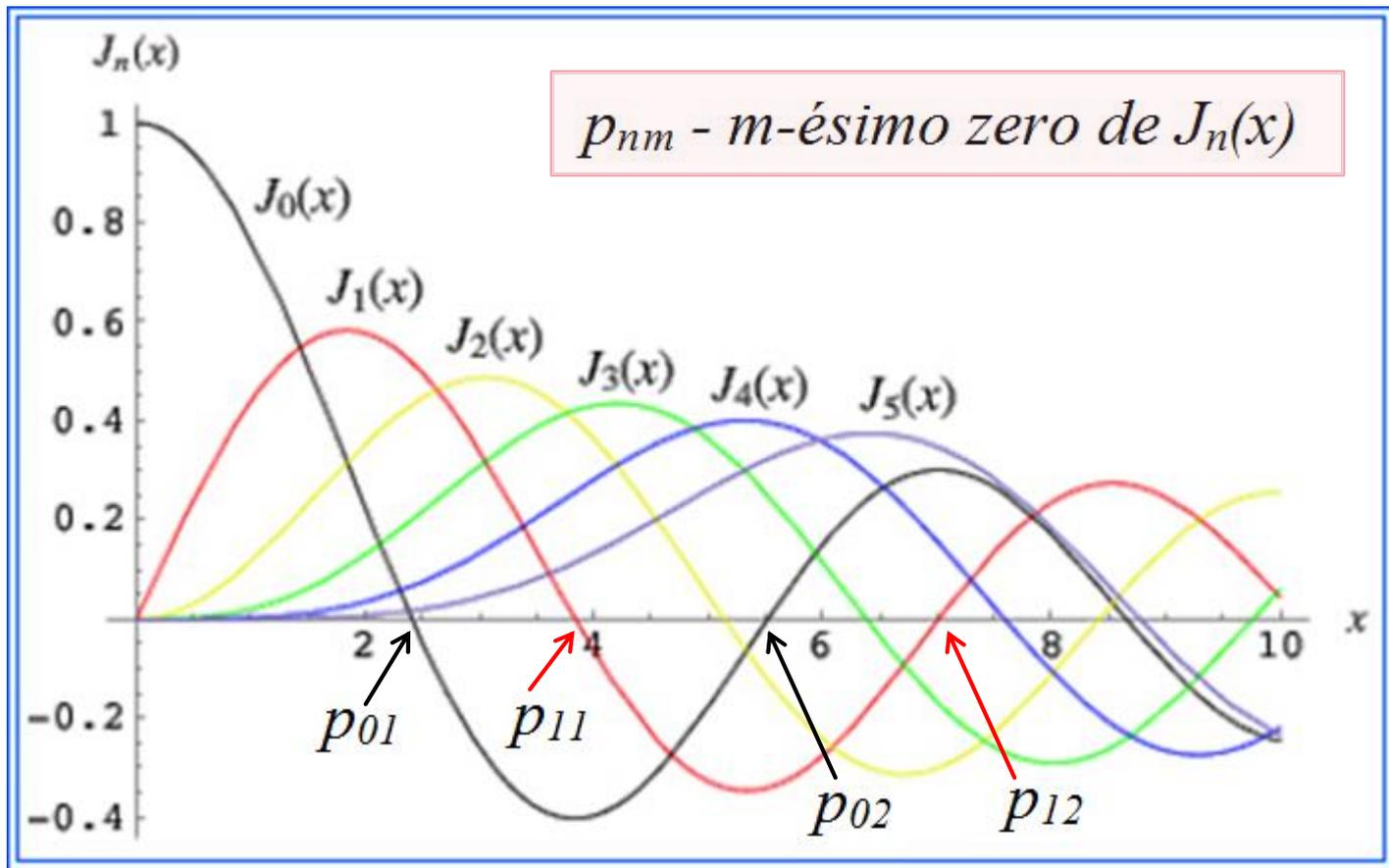
- Cálculo da frequência de corte  $f_c$  do modo TM

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} \rightarrow f_c = \frac{k_c}{2\pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}}$$

- Condição de contorno
  - Na parede metálica ( $r = a$ ) tem-se  $E_z = 0$
  - Logo  $J_n(k_c \cdot a) = 0 \rightarrow k_c \cdot a$  é zero da função  $J_n$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Funções de Bessel de primeira espécie $J_n(x)$



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos $\text{TM}_{nm}$

- Aplicando-se a **condição de contorno** em  $r = a$ , tem-se

$$E_z(r, \phi, z)|_{r=a} = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot a) e^{-j \cdot \beta \cdot z} = 0$$

- Logo  $J_n(k_c \cdot a) = 0 \rightarrow k_c \cdot a = p_{nm} \rightarrow k_c = \frac{p_{nm}}{a}$

sendo,

$p_{nm}$  — **m-ésimo zero** da função de Bessel de ordem **n**

- Frequência de corte do modo  $\text{TM}_{nm}$

$$f_c = \frac{k_c}{2\pi \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}} \rightarrow f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Qual o modo TM com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Qual o modo TM com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

→ Modo  $TM_{01}$

→ Pois  $p_{01}=2,405$  é o menor zero de  $J_n(x)$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio  $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c(\text{TM}_{01}) = ?$$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$$

$$f_c(\text{TM}_{11}) = ?$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

- Zeros das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$P_{n1}$	$P_{n2}$	$P_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio  $a = 50$  mm

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot P_{nm}$$
$$f_c(TM_{01}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 2,405 = 2,3 \text{ GHz}$$
$$f_c(TM_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,832 = 3,66 \text{ GHz}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos $TM_{nm}$

- Constante de propagação  $\beta_{nm}$

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2}$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

$$k_c = \frac{p_{nm}}{a} \quad \text{e} \quad k_c^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\beta_{nm} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{p_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Comprimento de onda guiado do modo  $TM_{mn}$

$$\beta_{nm} = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\beta_{nm}}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

As demais componentes dos fasores de E e H são obtidas de:

$$E_r = \frac{-j}{k_c^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\omega \mu}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

$$E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

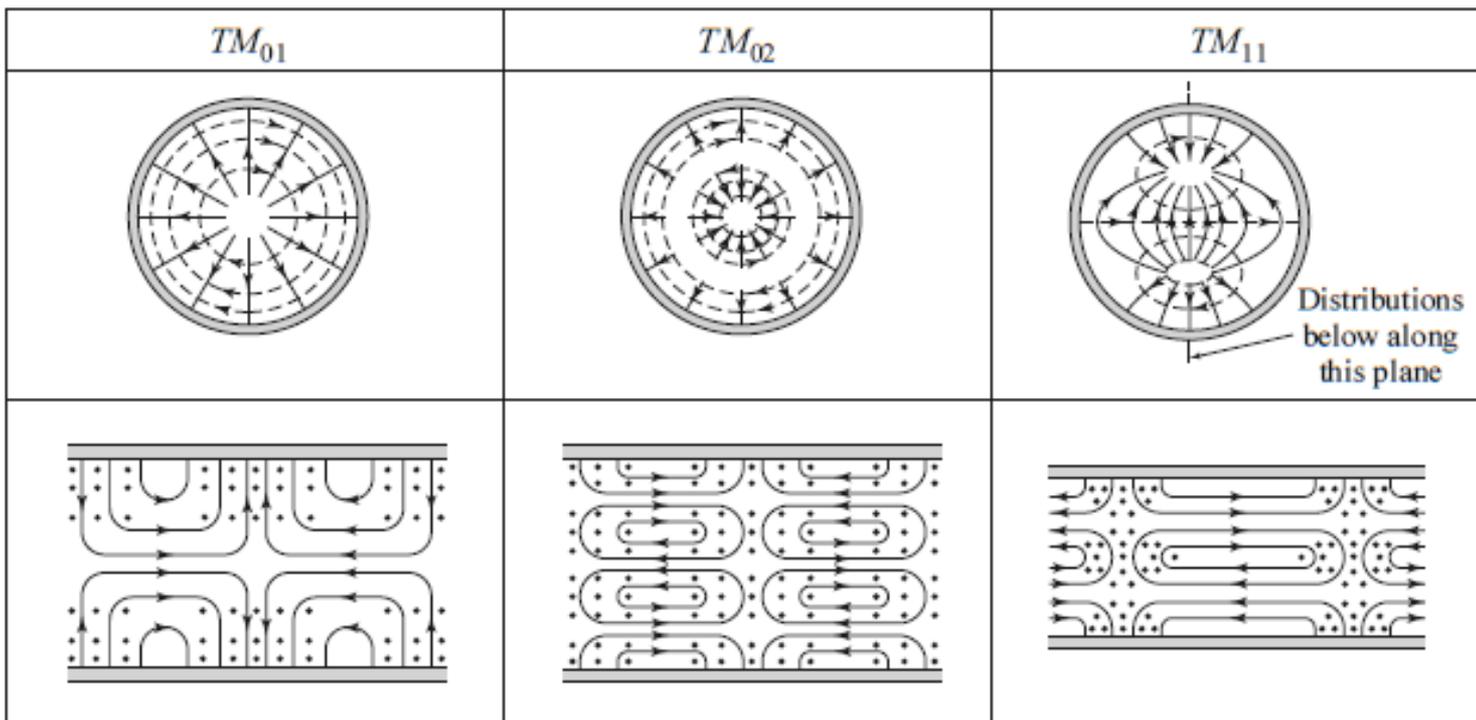
$$H_r = \frac{j}{k_c^2} \left( \frac{\omega \epsilon}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$$

$$H_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left( \omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right)$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TM

Distribuição de campo dos modos  $TM_{01}$ ,  $TM_{02}$  e  $TM_{11}$  E (—) e H (- - -)



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

■ Tem-se

$$H_z \neq 0 \quad e \quad E_z = 0$$

■ Sendo

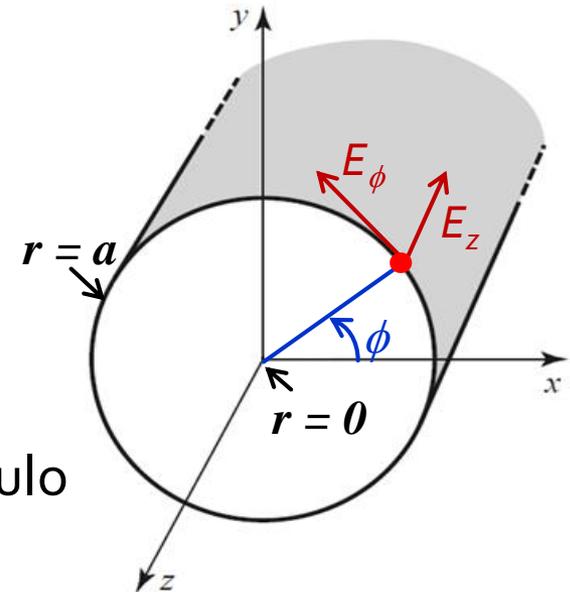
$$H_z(r, \phi, z) = R(r) \cdot F(\phi) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

■ Resolve-se a equação de onda

■ Aplica-se as condições de contorno

■ Campo elétrico tangencial ao condutor é nulo

Em  $r = a \rightarrow E_\phi = 0$



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Da equação de onda obtém-se a expressão de  $H_z$

$$H_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Sendo,

$J_n$  – Função de Bessel de primeira espécie e ordem  $n$

$$k_c = \omega_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon} = 2\pi \cdot f_c \cdot \sqrt{\mu \cdot \varepsilon}$$

$f_c$  – Frequência de corte do modo de propagação

- Para determinar  $k_c \rightarrow$  condição de contorno
  - Na parede metálica  $r = a \rightarrow E_\phi = 0$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Cálculo de  $E_\phi \rightarrow E_\phi = \frac{-j}{k_c^2} \left( \frac{\beta}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial r} \right)$

- Em modos TE tem-se  $E_z = 0$ , logo  $\rightarrow E_\phi = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial r}$

- Sendo

$$H_z(r, \phi, z) = [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J_n(k_c \cdot r) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

- Obtém-se

$$E_\phi(r, \phi, z) = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot \underbrace{J'_n(k_c \cdot r)} \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z}$$

Derivada da função de Bessel de primeira espécie

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos $TE_{nm}$

- Condição de contorno  $E_\phi = 0$  em  $r = a$  (parede do guia de ondas)

$$E_\phi(r, \phi, z)\Big|_{r=a} = j \frac{\omega\mu}{k_c^2} [A \cdot \text{sen}(n \cdot \phi) + B \cdot \text{cos}(n \cdot \phi)] \cdot J'_n(k_c \cdot a) \cdot e^{-j \cdot \beta \cdot z} = 0$$

- Então, em  $r = a$

$$E_\phi(a, \phi, z) = 0 \quad \rightarrow \quad J'_n(k_c \cdot a) = 0 \quad \rightarrow \quad k_c = \frac{p'_{nm}}{a}$$

- Frequência de corte dos modos TE

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$$

$p'_{nm}$  - m-ésimo zero de  $J'_n(x)$   
primeira derivada  
da função de Bessel

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos $TE_{nm}$

- Zeros da primeira derivada da função de Bessel de primeira espécie –  $J'_n$

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Qual o modo TE com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Zeros da primeira derivada funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Qual o modo TE com menor frequência de corte?

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm} \quad \rightarrow \text{Modo TE}_{11}$$

$\rightarrow$  Pois  $p'_{11} = 1,841$  é o menor zero de  $J_n'(x)$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$P'_{n1}$	$P'_{n2}$	$P'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio  $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$

$$f_c(\text{TE}_{11}) = ?$$

$$f_c(\text{TE}_{21}) = ?$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Zeros da primeira derivada das funções de Bessel de primeira espécie

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

- Exemplo – guia circular, preenchido com ar e raio  $a = 50 \text{ mm}$

$$f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{mn}$$
$$f_c(TE_{11}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 1.841 = 1,76 \text{ GHz}$$
$$f_c(TE_{21}) = \frac{3 \cdot 10^{11}}{2\pi \cdot 50} \cdot 3,054 = 2,92 \text{ GHz}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Frequências de corte dos modos TE e TM

**Modo TM**  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

**TE<sub>11</sub>** -  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 1,841 \rightarrow$  modo fundamental

**TM<sub>01</sub>** -  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot 2,405 \rightarrow$  segundo modo

- Relação entre frequências de corte do segundo modo e do modo fundamental

$$\frac{f_c(\text{TM}_{01})}{f_c(\text{TE}_{11})} = \frac{2,405}{1,841} = 1,31$$

- Banda em que se propaga apenas o modo fundamental no guia cilíndrico
  - em torno de 30%
  - menor que a do guia de ondas retangular que é da ordem de 52% para  $b=a/2$

**Modo TE**  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Frequências de corte dos modos TE e TM

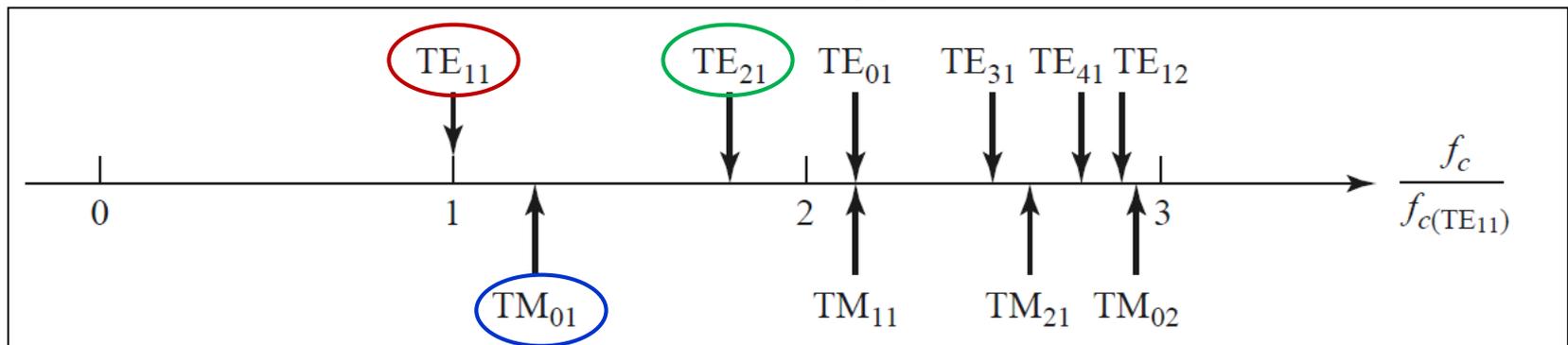
**Modo TM**  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p_{nm}$

$n$	$p_{n1}$	$p_{n2}$	$p_{n3}$
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.174
2	5.135	8.417	11.620

**Modo TE**  $f_c = \frac{v}{2\pi \cdot a} \cdot p'_{nm}$

$n$	$p'_{n1}$	$p'_{n2}$	$p'_{n3}$
0	3.832	7.016	10.174
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.970

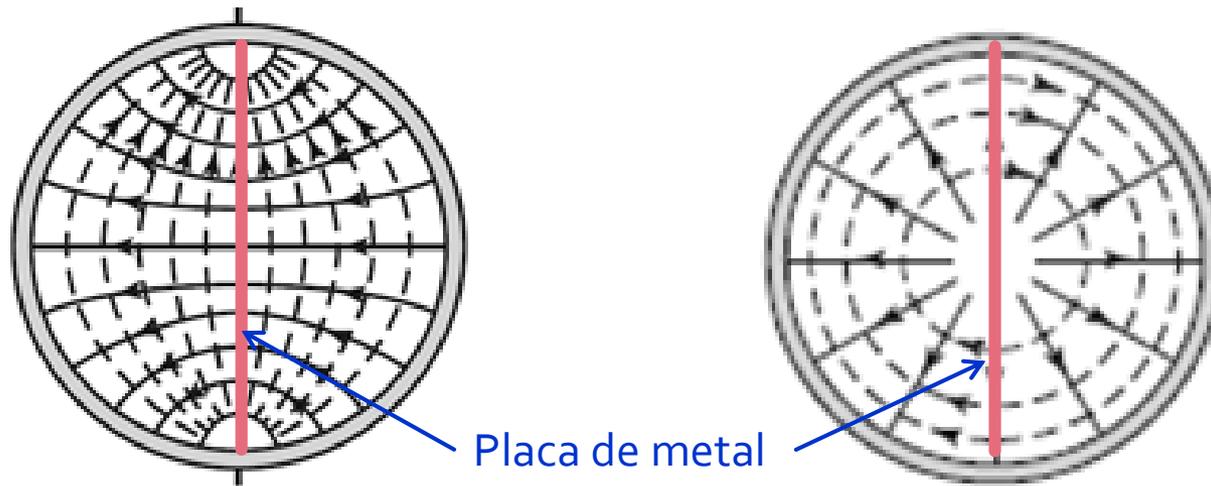
- Frequência de corte dos primeiros modos TE e TM, normalizadas em relação à frequência de corte do modo fundamental,  $f_c(TE_{11})$



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Frequências de corte dos modos TE e TM

- Técnica para alargar a banda de operação do guia de ondas circular
  - Suprimir o segundo modo de propagação  $TM_{01}$  sem afetar o modo fundamental  $TE_{11}$
  - Placa metálica perpendicular ao campo elétrico do modo  $TE_{11}$  (esse modo não é prejudicado) e tangencial ao campo elétrico do modo  $TM_{01}$  (esse modo é suprimido)



TE<sub>11</sub> - modo fundamental

TM<sub>01</sub> - Segundo modo

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Componentes de campo do modo TE<sub>11</sub> – modo fundamental (com  $B=0$ )

$$H_z = A \sin \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho = \frac{-j\omega\mu}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_\phi = \frac{j\omega\mu}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho = \frac{-j\beta}{k_c} A \sin \phi J_1'(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

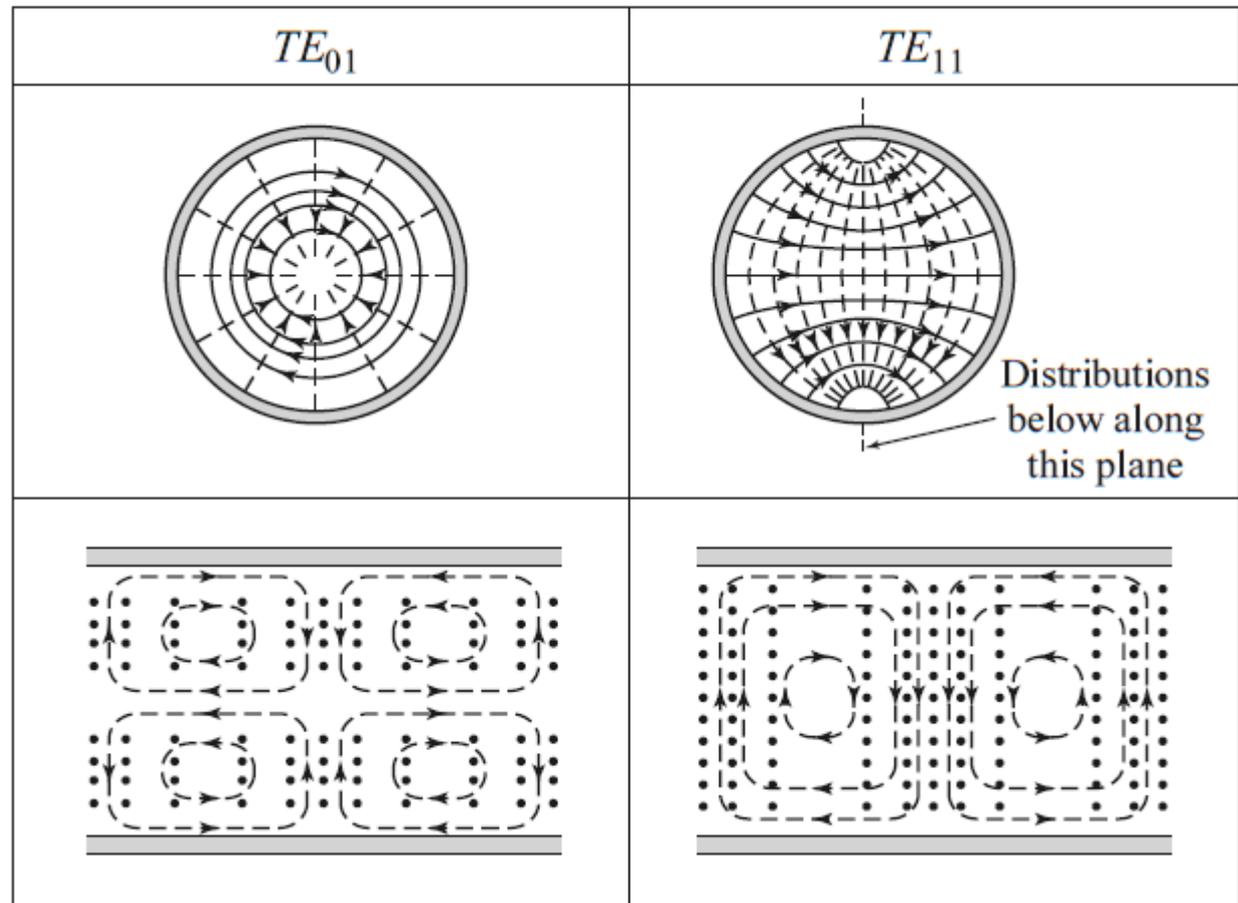
$$H_\phi = \frac{-j\beta}{k_c^2 \rho} A \cos \phi J_1(k_c \rho) e^{-j\beta z}$$

$$E_z = 0$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

Modos  $TE_{01}$  e  $TE_{11}$   
 E (—) e H (---)



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE

- Fator de propagação

$$\beta_{nm} = \sqrt{k^2 - k_c^2} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{p'_{nm}}{a}\right)^2}$$

- Frequência de corte

$$f_{c_{nm}} = \frac{k_c}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{p'_{nm}}{2\pi a\sqrt{\mu\epsilon}}$$

- Impedância de onda

$$Z_{\text{TE}} = \frac{E_\rho}{H_\phi} = \frac{-E_\phi}{H_\rho} = \frac{\eta k}{\beta}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE - atenuação

- Atenuação do modo  $TE_{n,m}$  devido a perdas condutivas

$$\alpha_c = \frac{R_s}{a \eta \left[ 1 - \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 \right]^{1/2}} \cdot \left[ \left( \frac{f_c}{f} \right)^2 + \frac{n^2}{p'_{nm}{}^2 - n^2} \right]$$

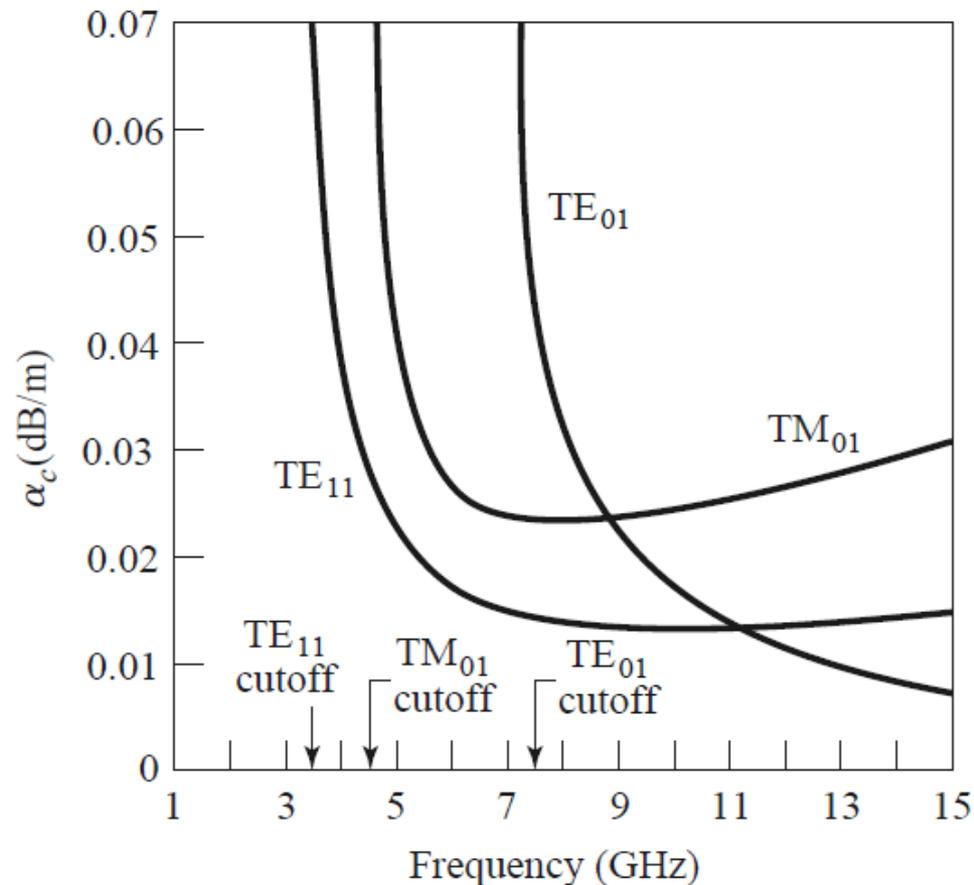
sendo  $R_s = \sqrt{\frac{\pi f \mu}{\sigma}}$

- Atenuação devido a perdas dielétricas

$$\alpha_d = \frac{k^2 \tan \delta}{2\beta} \quad \text{sendo:} \quad \beta = \sqrt{k^2 - k_c^2}, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \quad \text{e} \quad k_c = \frac{p'_{nm}}{a}$$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE e TM – atenuação versus frequência



# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE e TM – Sumário

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$k$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$	$\omega\sqrt{\mu\epsilon}$
$k_c$	$\frac{p'_{nm}}{a}$	$\frac{p_{nm}}{a}$
$\beta$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$	$\sqrt{k^2 - k_c^2}$
$\lambda_c$	$\frac{2\pi}{k_c}$	$\frac{2\pi}{k_c}$
$\lambda_g$	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\beta}$
$v_p$	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{\omega}{\beta}$
$\alpha_d$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$	$\frac{k^2 \tan \delta}{2\beta}$

# Guia de Ondas Cilíndrico

## Modos TE e TM – Sumário

Quantity	TE <sub>nm</sub> Mode	TM <sub>nm</sub> Mode
$E_z$	0	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_z$	$(A \sin n\phi + B \cos n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	0
$E_\rho$	$\frac{-j\omega\mu n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$E_\phi$	$\frac{j\omega\mu}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\rho$	$\frac{-j\beta}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{j\omega\epsilon n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$H_\phi$	$\frac{-j\beta n}{k_c^2 \rho} (A \cos n\phi - B \sin n\phi) J_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$	$\frac{-j\omega\epsilon}{k_c} (A \sin n\phi + B \cos n\phi) J'_n(k_c \rho) e^{-j\beta z}$
$Z$	$Z_{TE} = \frac{k\eta}{\beta}$	$Z_{TM} = \frac{\beta\eta}{k}$

# Guia de Ondas

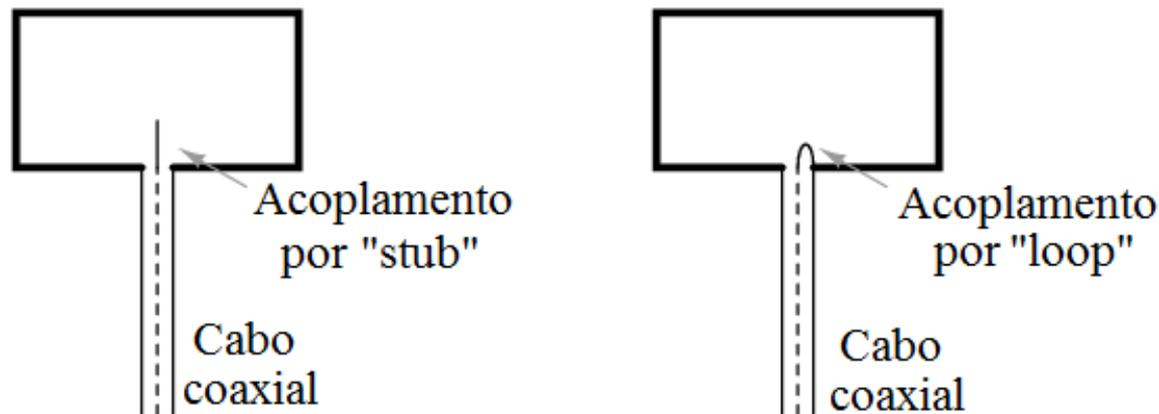
## Excitação de guias de ondas

- Processo de inserir ou retirar sinais EM de guias de ondas
- Alguns métodos usais de excitar guias de ondas
  - Alimentação por cabo coaxial
    - Acoplamento elétrico
    - Acoplamento magnético
  - Alimentação por meio de outro guia de ondas
    - Acoplamento por meio de fendas

# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

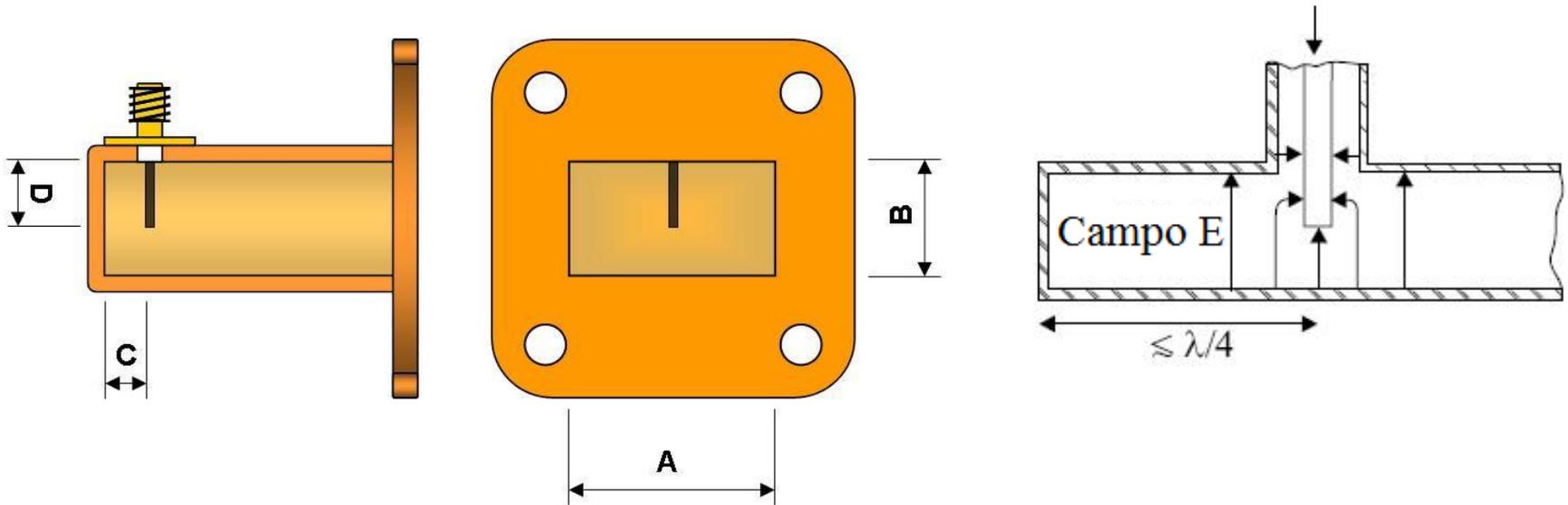
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
  - Acoplamento por campo elétrico – usando sonda em aberto
  - Acoplamento por campo magnético – usando espira aterrada



# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

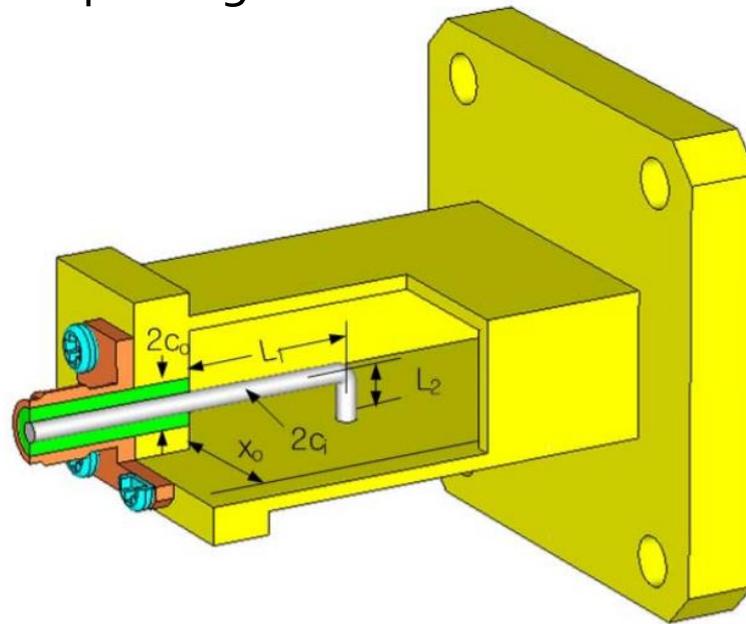
- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
  - Acoplamento por campo elétrico



# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por meio de cabo coaxial
  - Acoplamento por campo magnético



**Design and Fabrication of an End-Launched Rectangular Waveguide Adapter Fed by a Coaxial Loop**

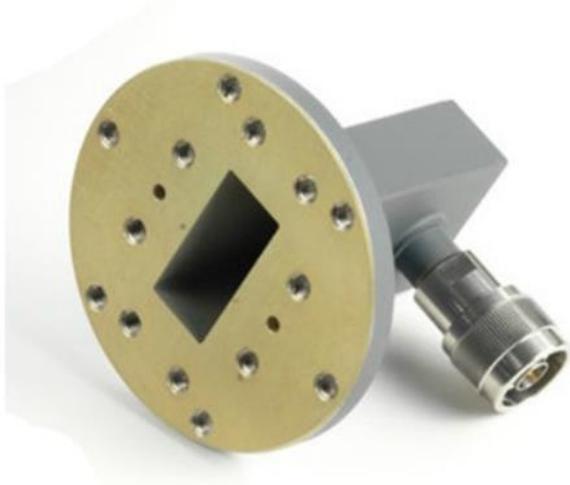
**Doo-Yeong Yang, Member, KIICE**

Department of Telecommunication Engineering, Jeju National University, Jeju 690-756, Korea

# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

Exemplos de adaptadores guia de ondas- coaxial (Keysight)



Adaptador guia de ondas WR137/coaxial  
5,85 – 8,20 GHz



Adaptador guia de ondas WR42/coaxial  
18,0 – 26,5 GHz

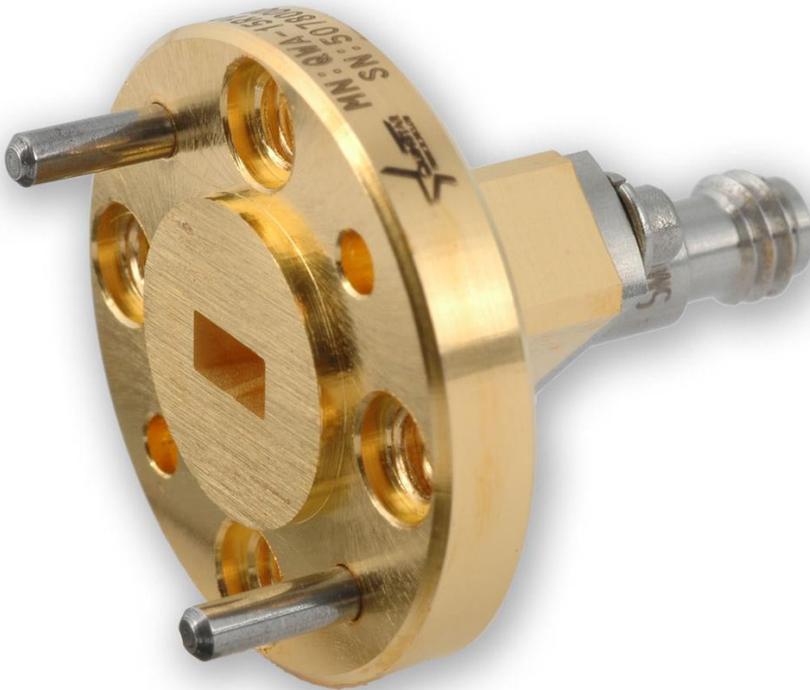


Adaptador guia de ondas WR12/coaxial  
60 – 90 GHz

# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

Exemplo de adaptador guia de ondas- coaxial  
(QuinStar Technology Inc.)



Adaptador guia de ondas  
WR15/coaxial  
50 – 75 GHz  
( $a=3,76$  mm,  $b=1,88$  mm)

# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
  - Acoplamento por fendas
  - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular – acoplamento de campo magnético

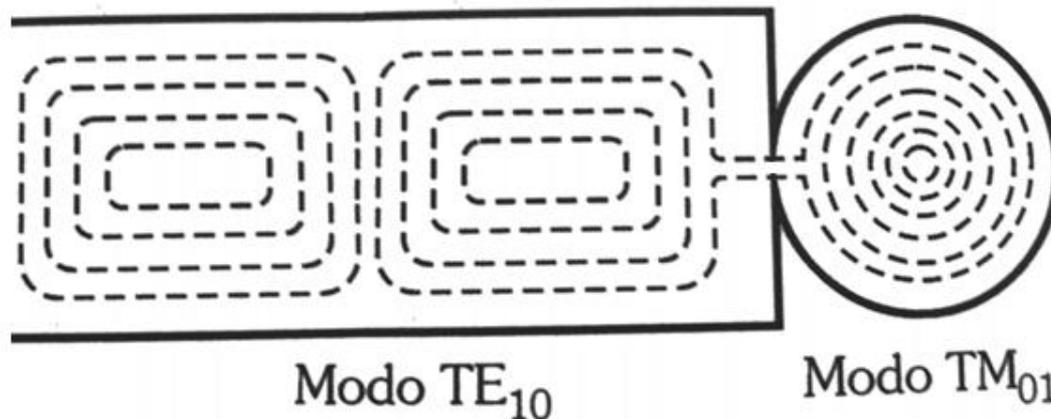


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações, de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica

# Guia de Ondas

## Excitação de guias de ondas

- Guia de ondas alimentado por outro guia de ondas
  - Guia de ondas cilíndrico excitado por meio de guia de ondas retangular

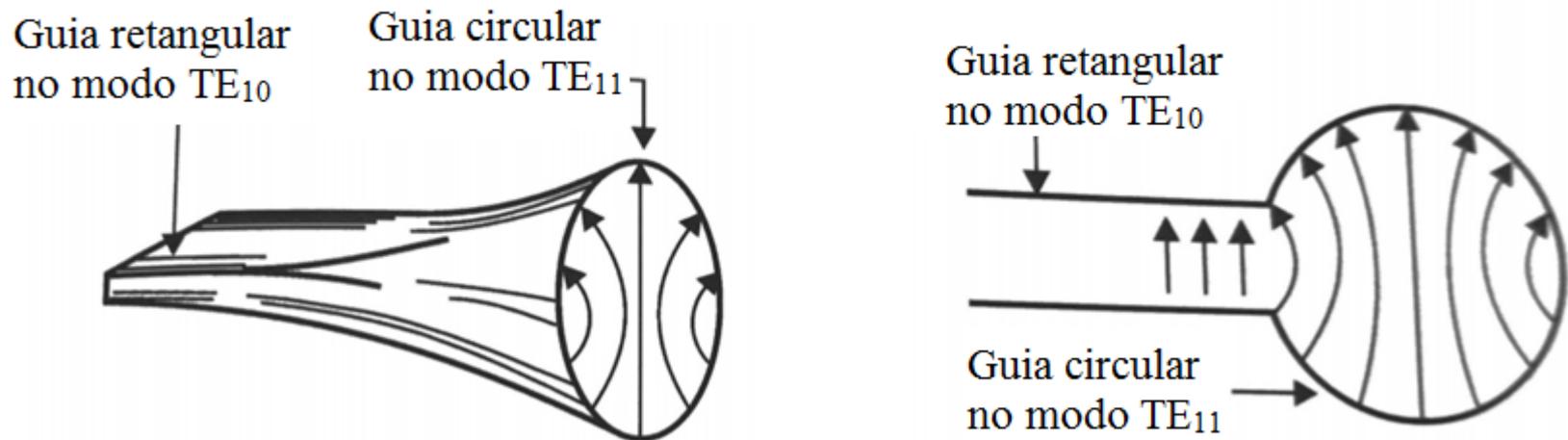


Figura do livro: Engenharia de Microondas – Fundamentos e aplicações,  
de José Antonio Justino Ribeiro, Editora Érica