EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Multicorpos

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
3373-8650

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

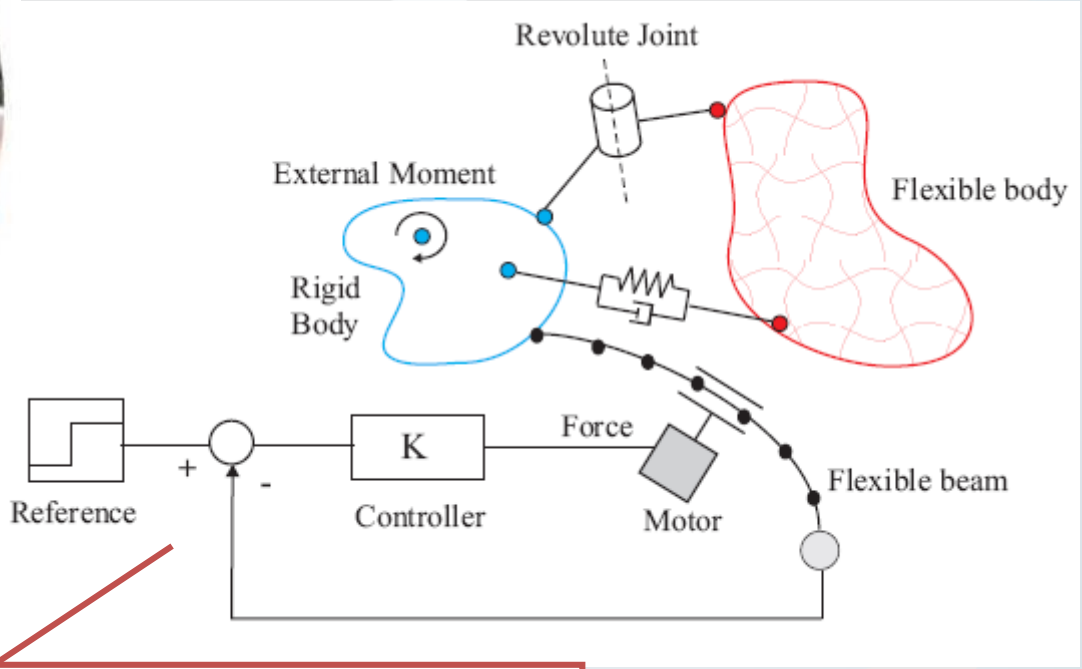
Objetivo

Introduzir conceitos de multicorpos

Introdução

Mecatrônica

pode ser definida como a ciência do controle do movimento que inclui o controle do movimento desejado e o cancelamento do movimento indesejado (Van Brussel, 1996).



MULTICORPOS-FLEXÍVEL COMBINADO COM AS AÇÕES DE CONTROLE

Revisão Multicorpos

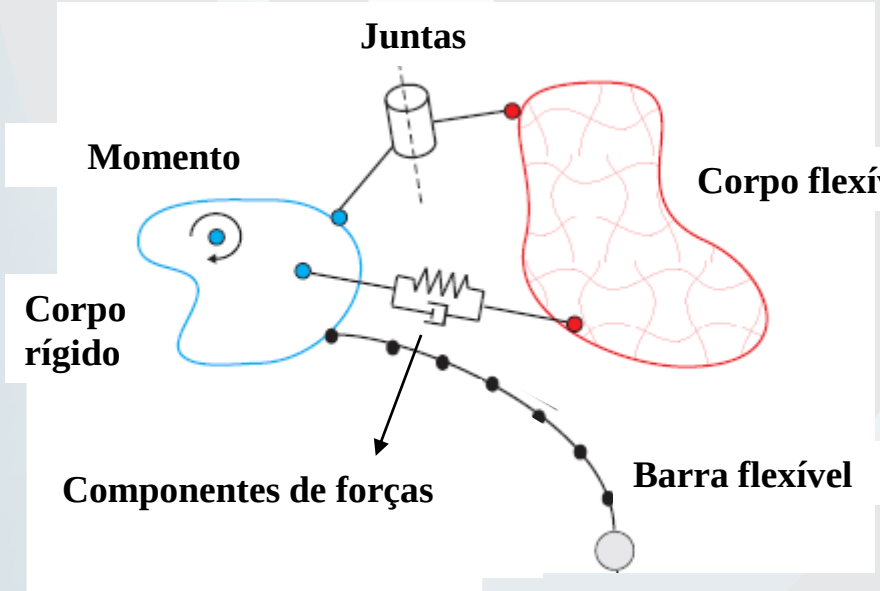
Forças dos vínculos/juntas

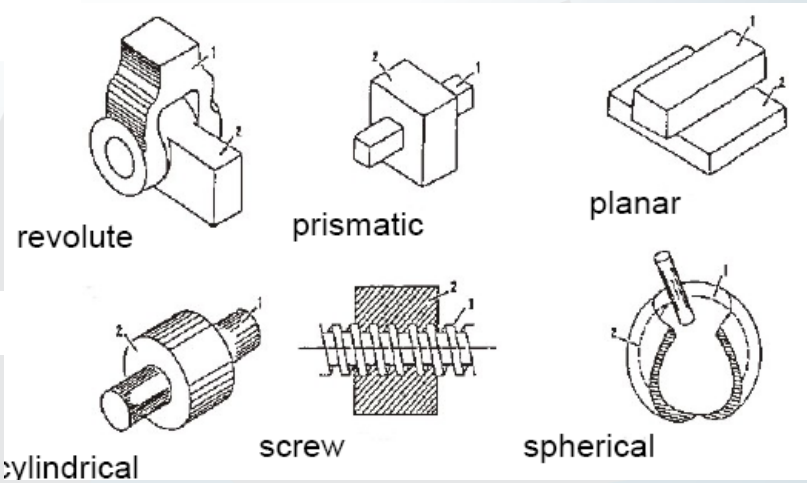
Matriz de massa

Forças externas, internas e inerciais complementares

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{q})\lambda = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$$
$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = 0$$

Juntas



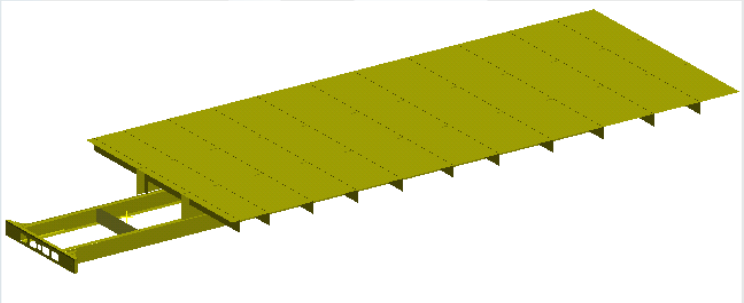


Revisão Multicorpos

Elementos Finitos × Multicorpos

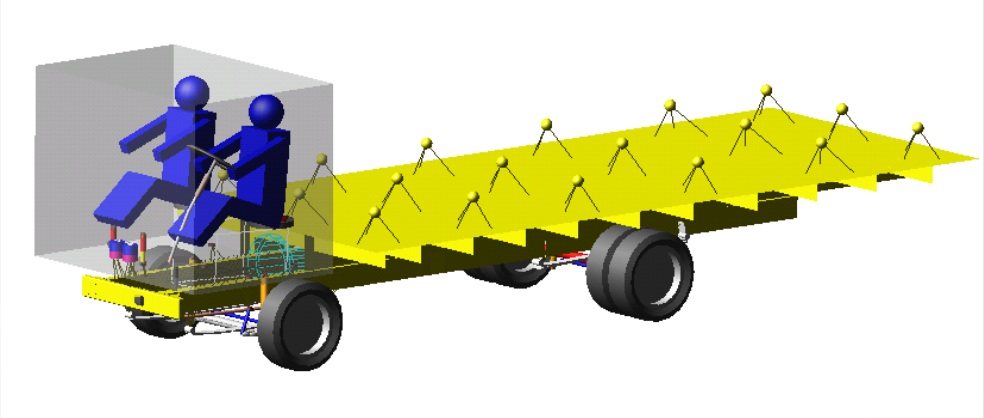
- corpos flexíveis
- análise estrutural e modal (deformações pequenas)

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = p(t)$$



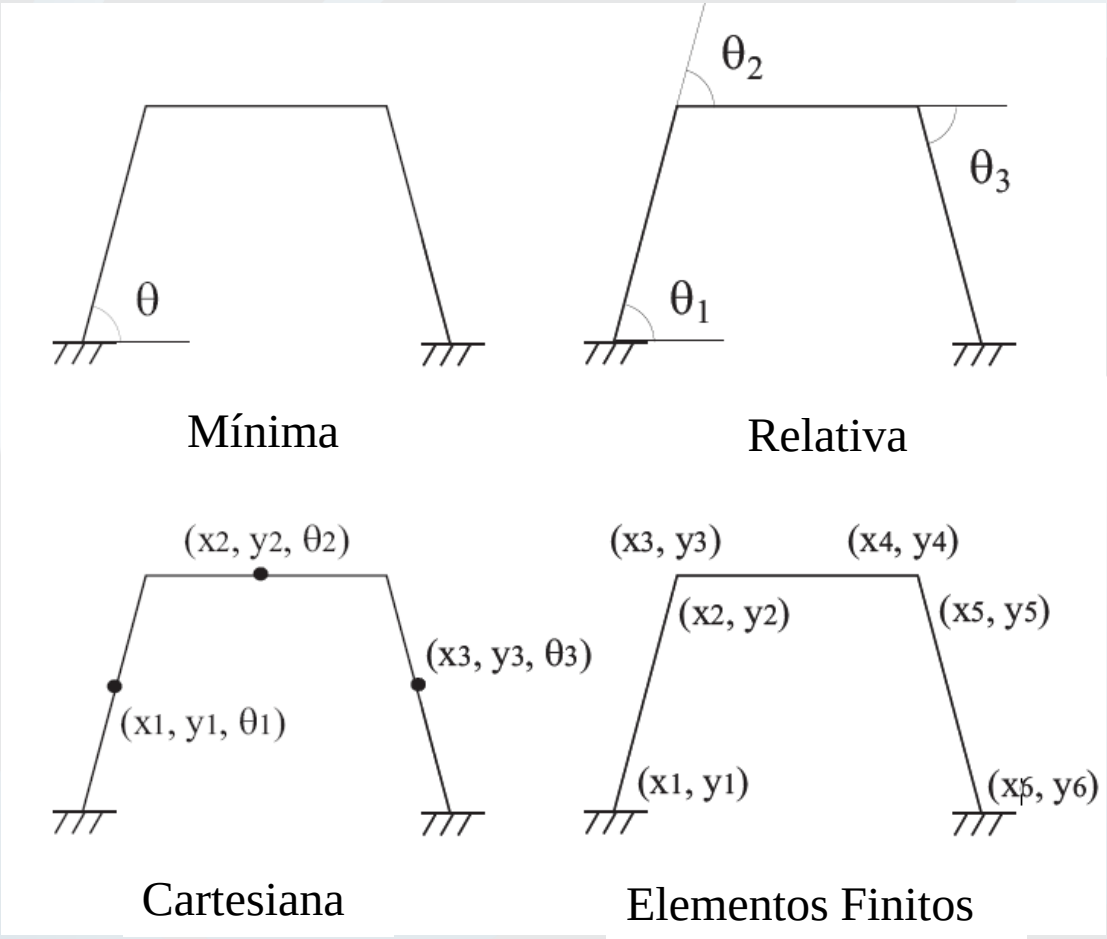
- corpos rígidos/flexíveis
- grandes movimentos

$$M(q)\ddot{q} + c(q,\dot{q},t) = Q + J^T\lambda$$
$$g(q,t) = 0$$



Revisão Multicorpos – A escolha das coordenadas

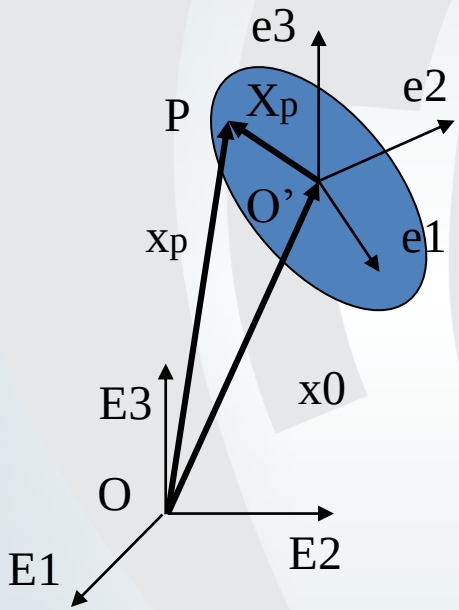
Coordenadas generalizadas são o conjunto de coordenadas que permitem a descrição completa de um sistema com respeito ao referencial.



Generalidade
X
Eficiência

Revisão Multicorpos – A cinemática de corpo rígido

Considerando um corpo rígido movendo-se com respeito ao referencial {E1,E2,E3}. Seu movimento espacial pode ser representado por 3 coordenadas cartesianas referentes ao ponto O' e a a orientação do referencial {e1,e2,e3}.



$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \qquad \mathbf{X} = [X_1 \quad X_2 \quad X_3]^T$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{X}$$

3x3 matriz de rotação

$$R^{-1} = R^T$$

Para o ponto P $\quad \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \mathbf{R}\mathbf{X}_p$

$$v_p = \dot{x}_p = \dot{R}X_p = \underbrace{\dot{R}R^T}_{\tilde{\omega}} x_p$$

Matriz das velocidades angular

$$V_p = R^T \dot{x}_p = R^T \dot{R} X_p = \underbrace{R^T \dot{R}}_{\tilde{\Omega}} X_p$$

Matriz das velocidades angular materiais

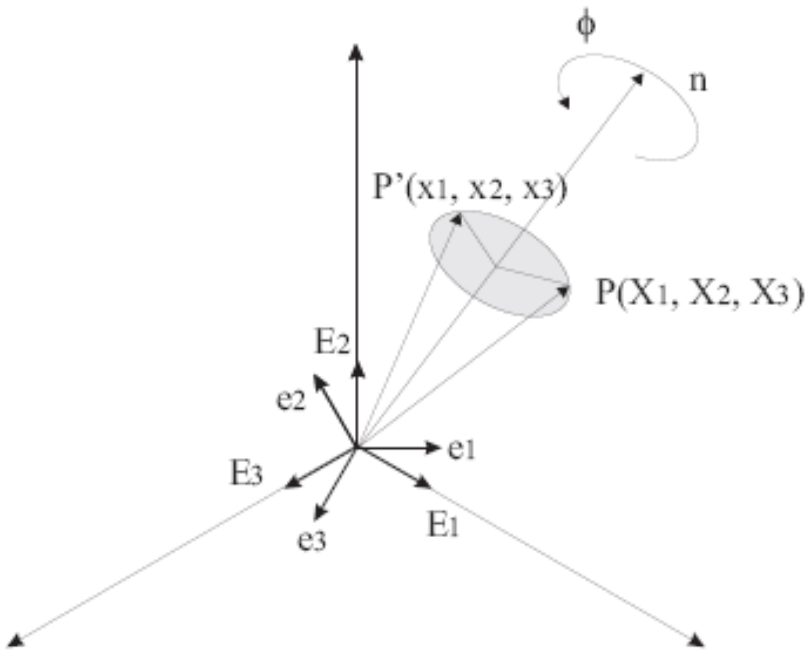
Revisão Multicorpos – A cinemática de corpo rígido

A princípio 3 parâmetros independentes podem ser usados para descrever **R**, mas para evitar singularidades, mais parâmetros são normalmente usados (várias opções: ângulos de Euler, ângulos de Bryant, o vetor de rotação Cartesiano etc)

Considerando o vetor de rotação Cartesiano

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{n}\phi$$

a matriz de rotação pode ser descrita como



$$\mathbf{R}(\mathbf{\Psi}) = \mathbf{I} + \frac{sin\|\mathbf{\Psi}\|}{\|\mathbf{\Psi}\|}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \frac{1 - cos\|\mathbf{\Psi}\|}{\|\mathbf{\Psi}\|^2}\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}$$

Considerando as relações, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{T}(\mathbf{\Psi})\dot{\mathbf{\Psi}}$

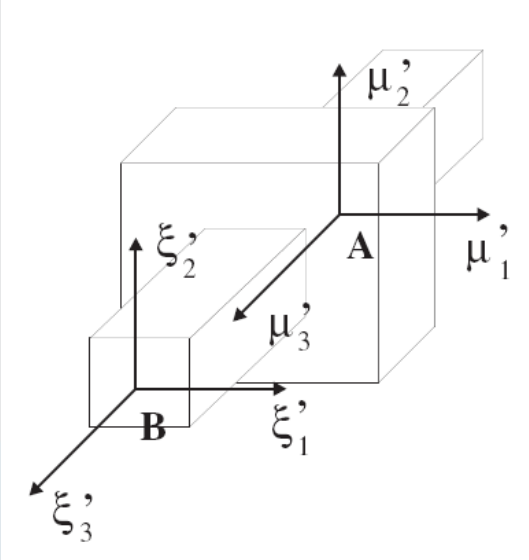
$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}^T(\mathbf{\Psi})\dot{\mathbf{\Psi}}$ o operador tangente pode ser escrito como

$$\mathbf{T}(\mathbf{\Psi}) = \mathbf{I} + \frac{cos\|\mathbf{\Psi}\| - 1}{\|\mathbf{\Psi}\|^2}\tilde{\mathbf{\Psi}} + \left(1 - \frac{sin\|\mathbf{\Psi}\|}{\|\mathbf{\Psi}\|}\right)\frac{\tilde{\mathbf{\Psi}}\tilde{\mathbf{\Psi}}}{\|\mathbf{\Psi}\|^2}$$

$$\boxed{\Psi = \begin{bmatrix} 0 & -\Psi_3 & \Psi_2 \\ \Psi_3 & 0 & -\Psi_1 \\ -\Psi_2 & \Psi_1 & 0 \end{bmatrix}}$$

Revisão Multicorpos – A cinemática de corpo rígido

A cinemática de um junta de translação



Os referenciais $\boldsymbol{\mu}_1', \boldsymbol{\mu}_2', \boldsymbol{\mu}_3{}'$ e $\boldsymbol{\xi}_1', \boldsymbol{\xi}_2', \boldsymbol{\xi}_3{}'$ são encontrados mapeando a configuração referencial e a atual.

$$\boldsymbol{\xi}_i' = \mathbf{R}_A \boldsymbol{\xi}_i \qquad \boldsymbol{\mu}_i' = \mathbf{R}_B \boldsymbol{\mu}_i$$

Eliminando as rotações:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_1 &= \boldsymbol{\mu}_1'^T \boldsymbol{\xi}_3' = \boldsymbol{\mu}_1^T \mathbf{R}_A^T \mathbf{R}_B \boldsymbol{\xi}_3 = 0 \\
\boldsymbol{\Phi}_2 &= \boldsymbol{\mu}_2'^T \boldsymbol{\xi}_3' = \boldsymbol{\mu}_2^T \mathbf{R}_A^T \mathbf{R}_B \boldsymbol{\xi}_3 = 0 \\
\boldsymbol{\Phi}_3 &= \boldsymbol{\mu}_1'^T \boldsymbol{\xi}_2' = \boldsymbol{\mu}_1^T \mathbf{R}_A^T \mathbf{R}_B \boldsymbol{\xi}_2 = 0
\end{aligned}$$

Eliminando as translações em 1 e 2:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_4 &= \boldsymbol{\mu}_1'^T (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = (R_A \boldsymbol{\mu}_1)^T (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0 \\
\boldsymbol{\Phi}_5 &= \boldsymbol{\mu}_2'^T (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = (R_A \boldsymbol{\mu}_2)^T (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0
\end{aligned}$$

Revisão Multicorpos – O formalismo para obter as equações

Euleriano

baseado nas
Equações de Newton-Euler

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i = \mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{x}}_i \\ \mathbf{M}_i = \mathbf{I}_i \alpha_i + \omega_i \times \mathbf{I}_i \omega_i \end{cases}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + {}^{\iota}\mathbf{R}$$

Forças de reação

Forças aplicadas

Vínculos (juntas) $\mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = 0$ **e a sua derivada**

$$\dot{\mathbf{\Phi}}_i = \sum_{j=1}^{n_{cp}} \frac{\partial \mathbf{\Phi}_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{B}_{ij} \dot{\mathbf{q}}_j = 0$$

As forças de reação podem ser rescritas como

$${}^{\iota}\mathbf{R} = -\mathbf{B}^T(\mathbf{q})\lambda$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{q})\lambda = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \end{gathered}}$$

Revisão Multicorpos – O formalismo para obter as equações

Lagrangiano

baseado nas Equações de Lagrange

$$\partial \int_{t_1}^{t_2} (\underbrace{\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} + \mathcal{W} - \lambda^T \mathbf{\Phi}) dt = 0$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{V}$$

Lagrangiano

Energia Cinética

Vínculos: Multiplicadoresde Lagrange

Trabalho das forças não-conservativas

Energia Potencial

Integrando por partes

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{B}\lambda = \mathbf{R} \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \end{cases}$$

E substituindo

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}\mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}) + \mathbf{B}^T(\mathbf{q})\lambda = \mathbf{R}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \\ \mathbf{\Phi}(\mathbf{q}) = 0 \end{gathered}}$$

Revisão Multicorpos – A implementação computacional

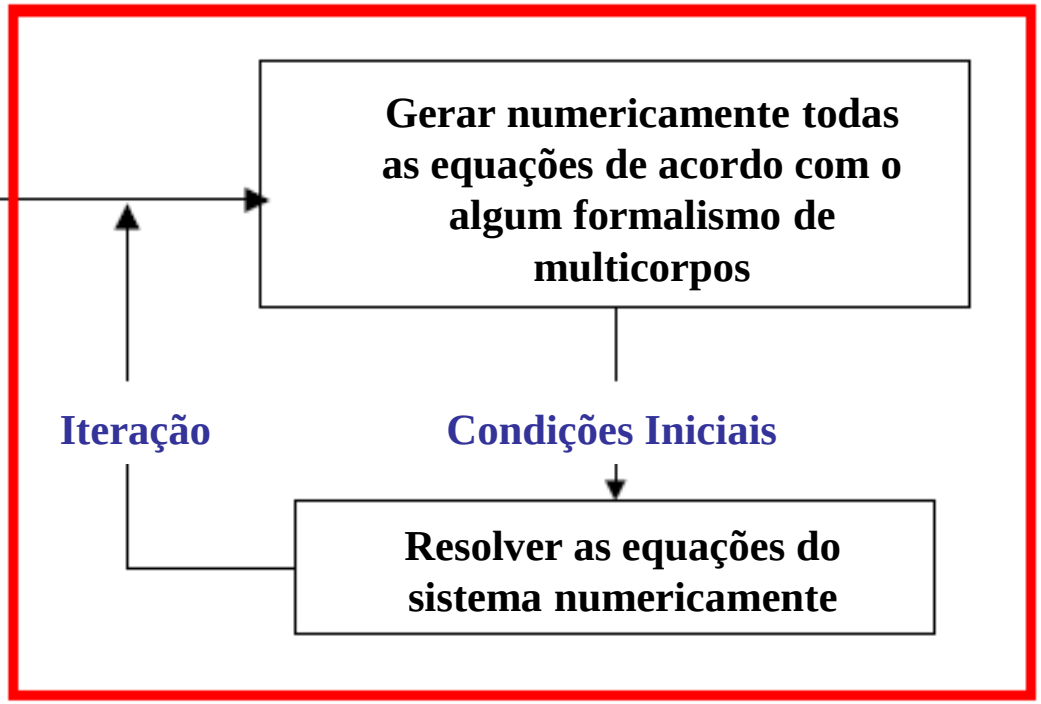
Numérica × Simbólica

Descrição multicorpos

Dados numéricos

Incluindo:

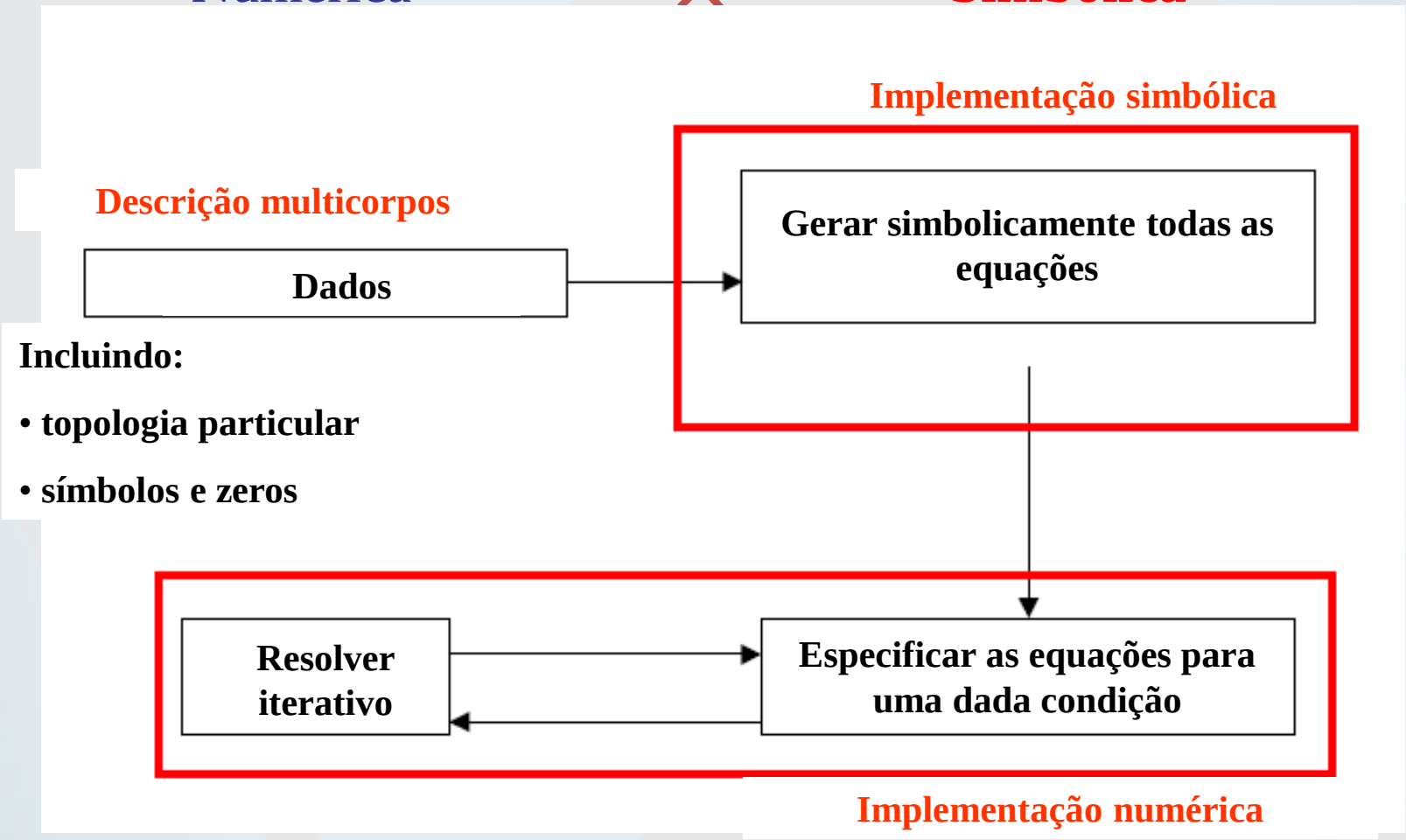
- **topologia particular**
- **valores constantes**
- **Valores iniciais q, dq/dt**



Implementação numérica

Revisão Multicorpos – A implementação computacional

Numérica × **Simbólica**



Revisão Multicorpos – Métodos de integração das equações

Acrônimo	Nome	Tipo	Uso
PECE	Predict, Evaluate, Correct, Evaluate	Explícito, multi-passos	Discontínuos e não rígidos
BDF	Backward Differentiation Formula	Implícito, multi-passos	Contínuos e rígidos
RK	Runge-Kutta	Explícito, passo único	discontínuos

Multi-passos: requer a solução de vários passos precedentes
Passo único: requer a solução do passo anterior
Implícito:

$$\underline{\mathbf{y}}_i^{t+h} = \Lambda'(\underline{\mathbf{y}}_i^{\leq t}, \underline{\dot{\mathbf{y}}}_i^{\leq t}, \underline{\dot{\mathbf{y}}}_i^{t+h})$$

Explícito:

$$\underline{\mathbf{y}}_i^{t+h} = \Lambda'(\underline{\mathbf{y}}_i^{\leq t}, \underline{\dot{\mathbf{y}}}_i^{\leq t})$$

Encontrado através de relações algébricas (como a regra trapezoidal).
São estáveis.

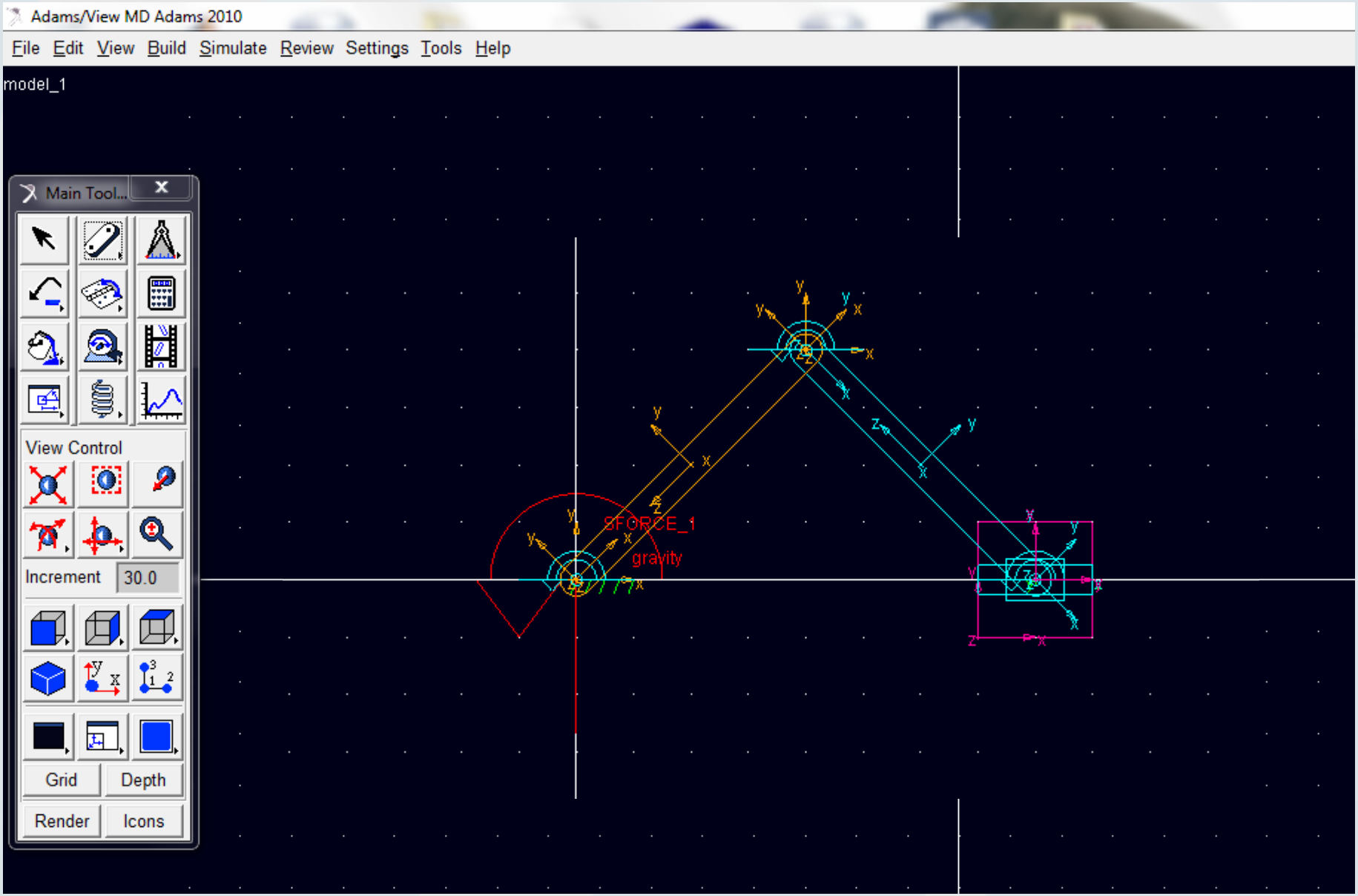
Software

- **Multicorpos comerciais / Co-simulação usando Matlab/Simulink**
  - MSC.ADAMS http://www.mscsoftware.com/Contents/Products/CAE-Tools/Adams.aspx
  - LMS.Virtual Lab
  - Simpack;

- **Multicorpos pacotes utilizados para pesquisa**
  - Robotran
  - Ofelie
  - MBDyn

  - Lista http://www.cs.rpi.edu/~trink/sim_packages.html

Adams

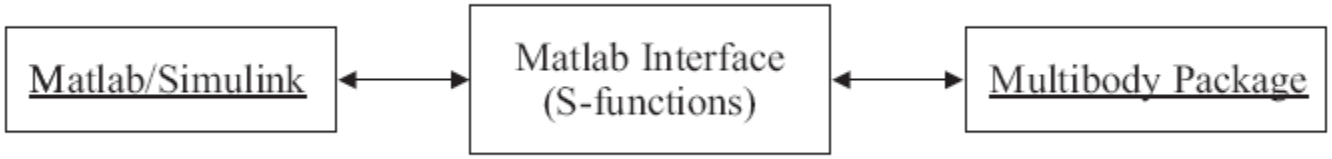

Adams/View MD Adams 2010
File Edit View Build Simulate Review Settings Tools Help
model_1
Main Tool...
View Control
Increment
30.0
Grid
Depth
Render
Icons
SFORCE_1
gravity

Ferramentas computacionais: Multicorpos

Dinâmica de sistemas mecatrônicos: Co-simulação

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{w}, t) + \mathbf{y} \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{q}, t) \end{aligned}$$



1. **Modo de co-simulação**: ambos ambientes (controle e multicorpos) integram as equações em paralelo. Os dados são trocados em determinados instantes de tempo.

2. **Modo de avaliação do bloco**: o sistema multicorpos é tratado pelo ambiente de controle como um bloco contendo um sistema não-linear. As equações são integradas pelo ambiente de controle.

EESC • USP

www.eesc.usp.br