



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Otimização

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

3373-8650



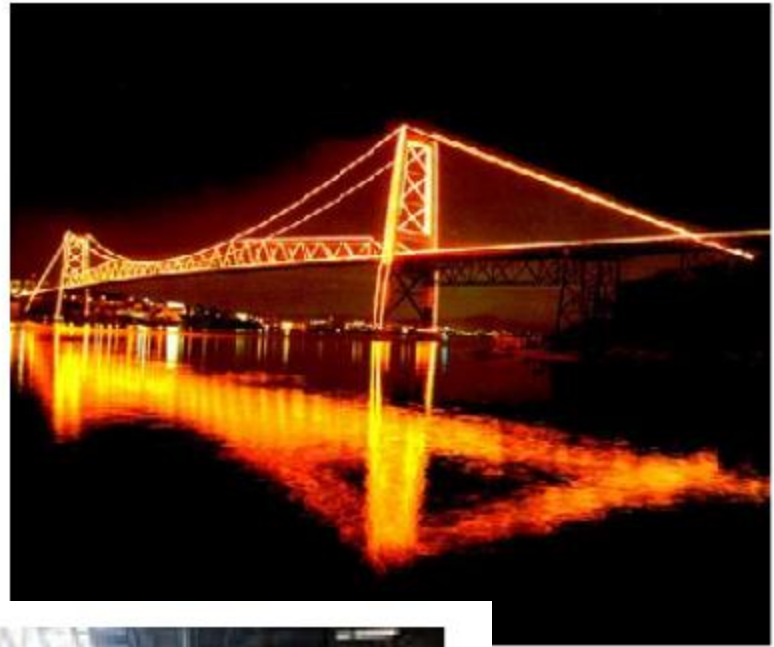
Objetivo

Introduzir conceitos de otimização básica

Fonte: Rao, Engineering Optimization

Abordagem útil para a resolução de problemas de otimização e modelagem por multicorpos.

Exemplos

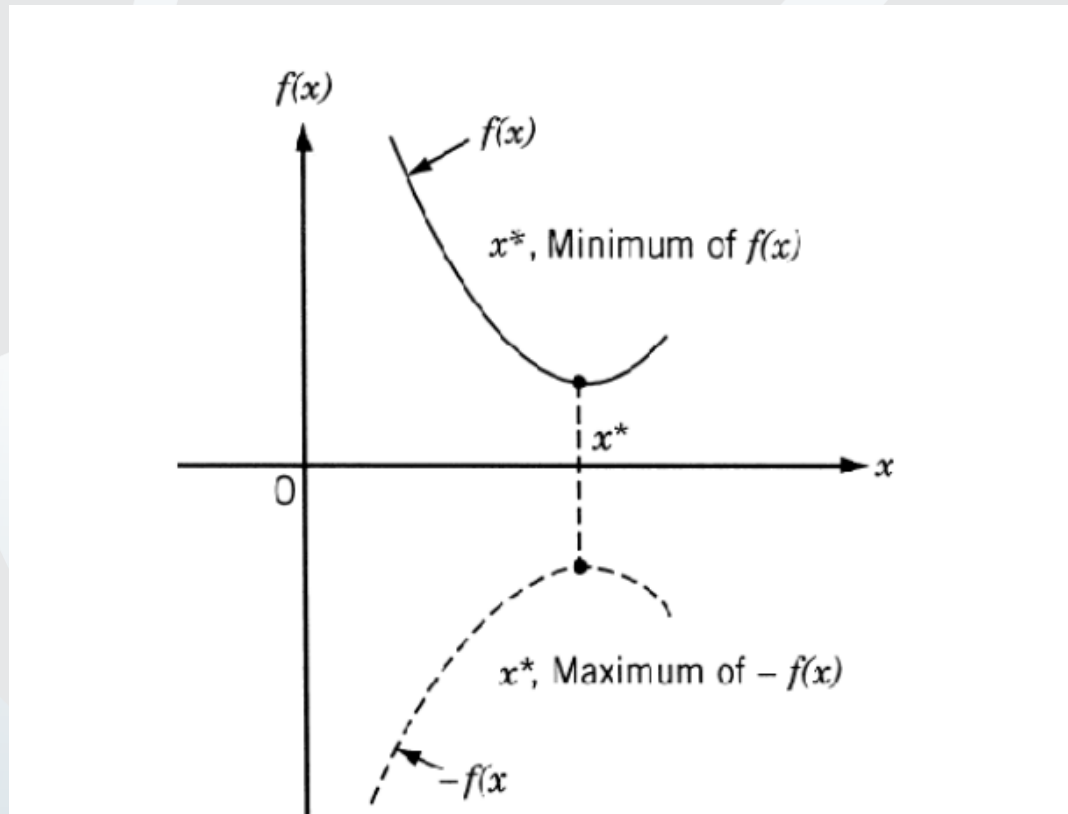


Exemplos

- Projeto ótimo de cames, mecanismos, máquinas-ferramenta, e outros equipamentos mecânicos
- Projeto ótimo de circuitos eletrônicos
- O caminho mais rápido que um vendedor por realizar ao
- visitar vários clientes
- Projeto ótimo de sistemas de controle

Definição

Otimização é o ato de obter o melhor resultado para dadas circunstâncias



Definição

Encontrar $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ que minimiza $f(\mathbf{X})$
sujeito as restrições

$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$l_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Definição

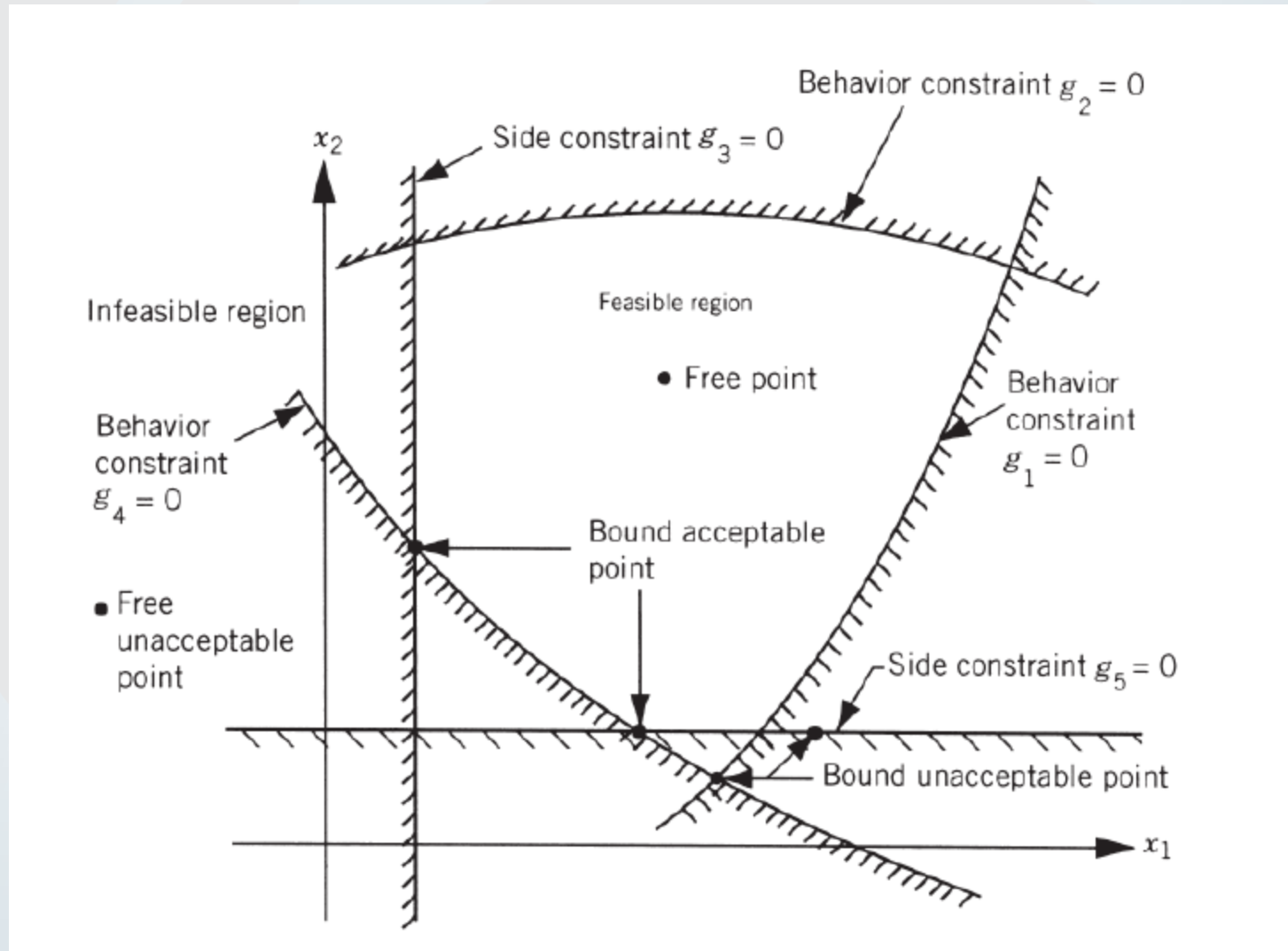
$$\min_{\mathbf{X}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T} f(\mathbf{X})$$

s.t.

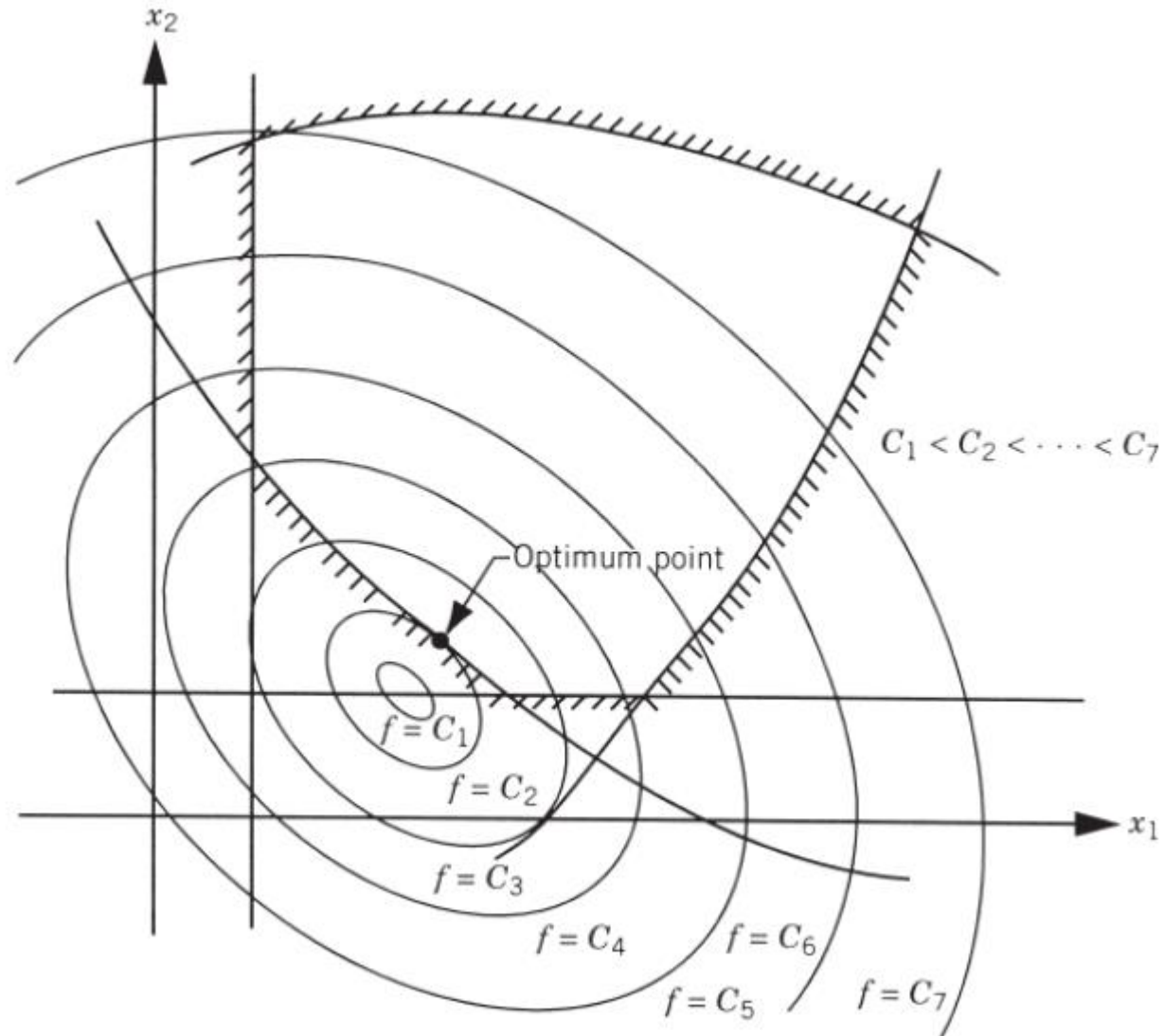
$$g_j(\mathbf{X}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m$$

$$l_i(\mathbf{X}) = 0, i = 1, 2, \dots, p$$

Definição - restrições

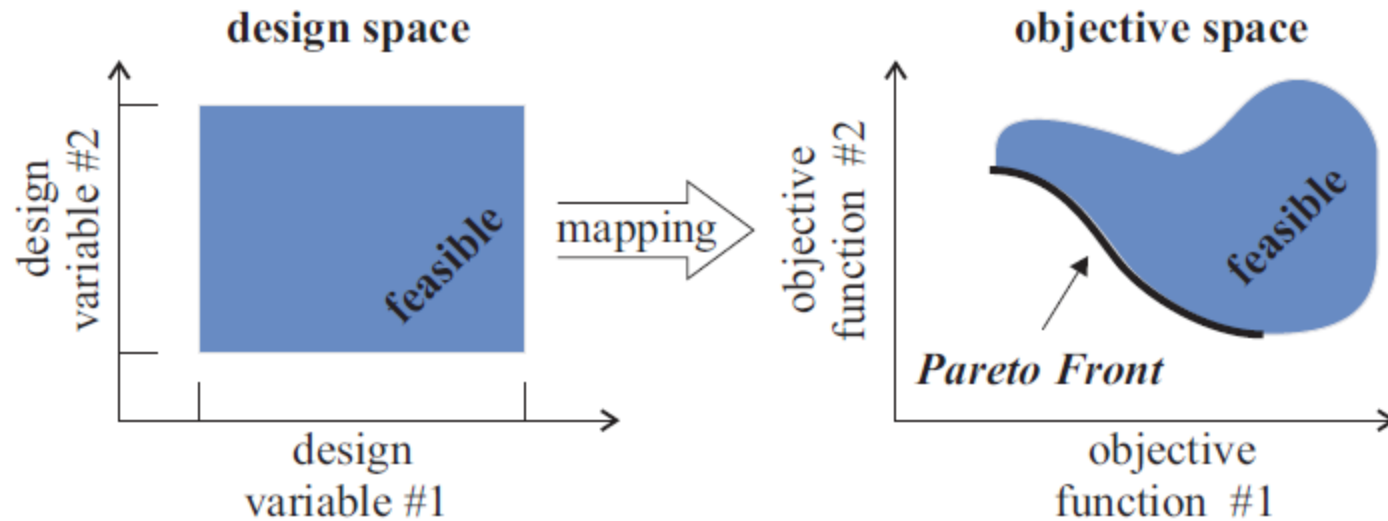


Definição – função objetivo



Definição – função objetivo

A função objetivo faz esse mapeamento:

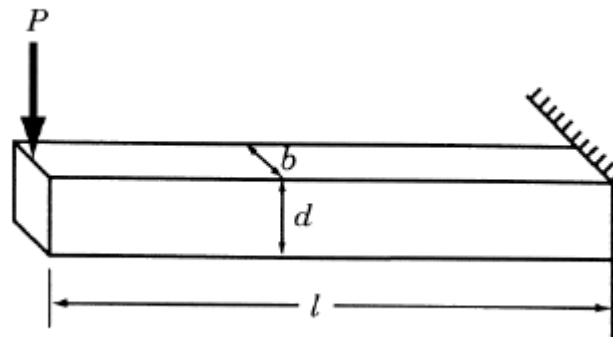


Definição – exemplo

$$\min_{[b,d]} f(\rho l b d)$$

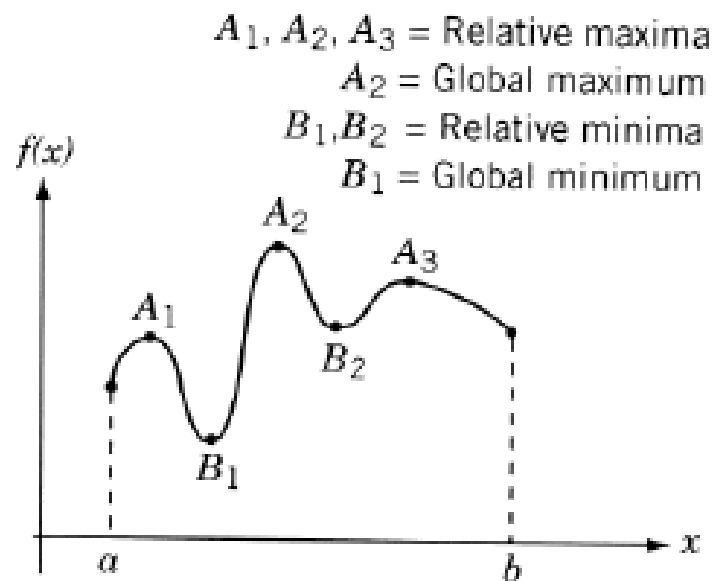
sujeito à

$$\delta_{tip} \leq \delta_{max}, b \geq 0 \text{ e } d \geq 0$$



Otimização com uma variável

Encontrar x que minimiza $f(x)$



Otimização com uma variável

Condição Necessária

Se a função $f(x)$ é definida no intervalo $a \leq x \leq b$ e tem um Mínimo local em $x = x^*$, onde $a \leq x^* \leq b$, e se a derivada $df(x)/dx = f'(x)$ existe como um número finito no ponto $x = x^*$, então $f'(x^*) = 0$.

Condição Suficiente

Sendo $f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$,
mas $f^{(n)}(x^*) \neq 0$. então $f(x^*)$ é

- ① um Mínimo de $f(x)$ if $f^{(n)}(x^*) > 0$ e n for par;
- ② um máximo de $f(x)$ if $f^{(n)}(x^*) < 0$ e n for par;
- ③ nenhum dos dois se n for ímpar.

Otimização com uma variável

Determinar os max e min de $f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$.
 $f'(x) = 0$ para $x = 1$, $x = 2$ and $x = 0$

$x = 1$ $f''(x) = -60$, então esse é um máximo local
($f(1) = 12$)

$x = 2$ $f''(x) = 240$, então esse é um Mínimo local
($f(2) = -11$)

$x = 0$ $f''(x) = 0$, $f'''(x) = 240 > 0$ então esse não é nem um máximo nem um Mínimo local, esse é um ponto de inflexão

Otimização multivariável

Encontrar $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ que minimiza $f(\mathbf{X})$

Otimização multivariável

Condição Necessária

Se $f(\mathbf{X})$ tem um ponto extremo (máximo ou Mínimo) em $\mathbf{X} = \mathbf{X}^*$ e se as primeiras derivadas parciais de $f(\mathbf{X})$ existem em $\mathbf{X}^*$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{X}^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{X}^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{X}^*) = 0$$

Otimização multivariável

Condição Suficiente

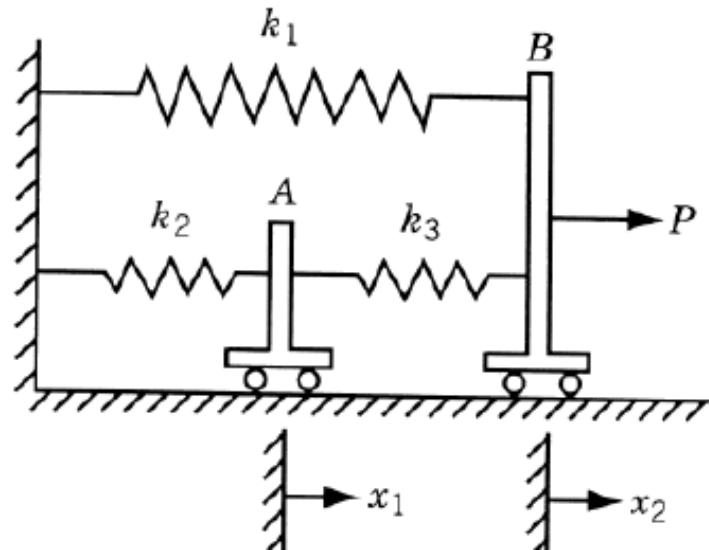
A Condição suficiente para que um ponto $\mathbf{X}^*$ ser um extremo é que a matrix das segunda derivadas (matrix Hessiana) de $f(\mathbf{X})$ avaliada em $\mathbf{X}^*$ é

- 1 positiva definida quando $\mathbf{X}^*$ é um Mínimo e
- 2 negativa definida quando $\mathbf{X}^*$ é uma máximo local.

$$\text{Matrix Hessiana: } \mathbf{J}|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \right]$$

Otimização multivariável - Exemplo

Encontrar os deslocamentos x_1 and x_2 sob a força P usando o Princípio da Energia Potencial Mínima.



Otimização multivariável com restrição

Encontrar $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ que minimiza $f(\mathbf{X})$

sujeito á s restrições

$$g_j(\mathbf{X}) = 0, j = 1, 2, \dots, m, m \leq n$$

Otimização multivariável com restrição

Solução pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange

Problema com 2 variáveis e 1 restrição

$$\begin{array}{ll}\min & f(x_1, x_2) \\ \text{s.a.} & \\ & g(x_1, x_2) = 0\end{array}$$

A condição necessária para f ter um mínimo no ponto (x_1^*, x_2^*) é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Otimização multivariável com restrição

A restrição tem que ser obedecida no ponto ótimo

$$g(x_1^*, x_2^*) = 0$$

Variações nesse ponto também !

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0$$

Em outras palavras, mesmo com as variações, as restrições são obedecidas.

Otimização multivariável com restrição

A expansão de Taylor de $g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2)$ leva a

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = g(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*)dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)dx_2 = 0$$

Como $g(x_1^*, x_2^*) = 0$, definimos:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 = 0, \text{ no ponto } (x_1^*, x_2^*)$$

Otimização multivariável com restrição

Assumindo que $\frac{\partial g}{\partial x_2} \neq 0$

$$dx_2 = \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2}(x_1^*, x_2^*) dx_1$$


$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

Otimização multivariável com restrição

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} dx_1 = 0$$

=0!

Vamos definir o Multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = - \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2} \Big|_{(x_1^*, x_2^*)}$$

Otimização multivariável com restrição

Solução pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange

$$\textcircled{1} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) |_{(x_1^*, x_2^*)} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) |_{(x_1^*, x_2^*)} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad g(x_1, x_2) |_{(x_1^*, x_2^*)} = 0$$

são as condições necessárias para a existência de um ponto extremo em (x_1^*, x_2^*) .

Otimização multivariável com restrição

As condições necessárias são geradas usando a função de Lagrange:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

As condições necessárias para o extremo são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) = g(x_1, x_2) = 0$$

Otimização multivariável com restrição

Exemplo : encontrar as dimensões de um cilindro que maximiza a área e é sujeito à área 24π

Otimização multivariável com restrição

Exercício Uma caixa de papel de base x altura z e largura y deve ser construída com volume de 10 dm^3 . Essa caixa deve ser construída com 4 camadas de papelão em seu fundo, 2 camadas de papelão em seus lados e uma camada de papelão em sua tampa. Sabendo que o custo de produção da caixa é avaliado pela área de cada lado qual o valor de x , y e z para que a caixa seja fabricada de modo mais barato possível?

$$\text{CUSTO} = 5xy + 4zy + 4xz$$

$$\text{RESTRIÇÃO} = xyz = 10$$



EESC • USP

www.eesc.usp.br