



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Sistemas Elomecânicos

Newton-Euler/Kirchhoff e Lagrange

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de
Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

3373-8650



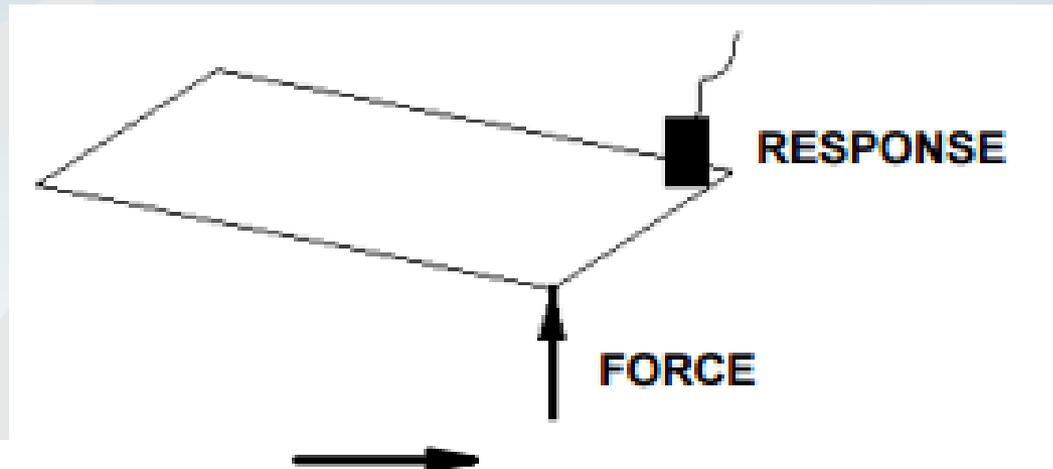
Objetivo

Exercícios

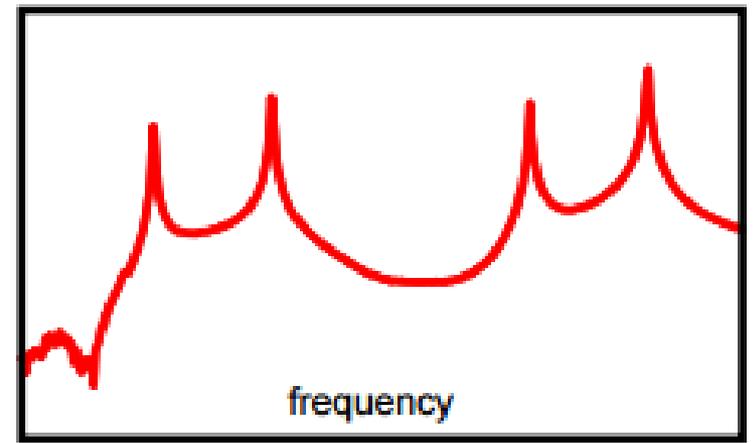
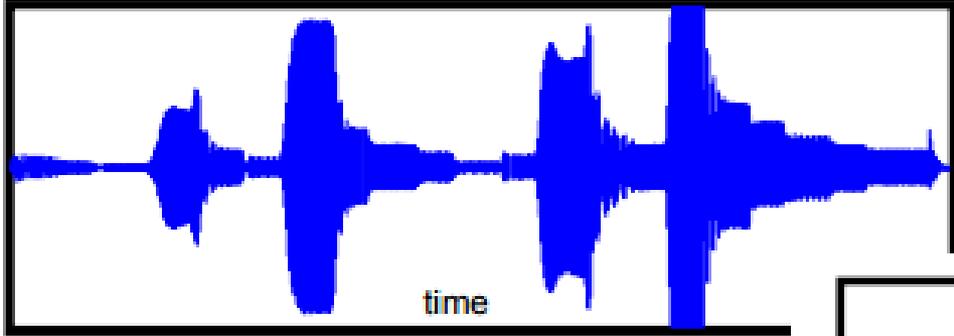


Ex1.

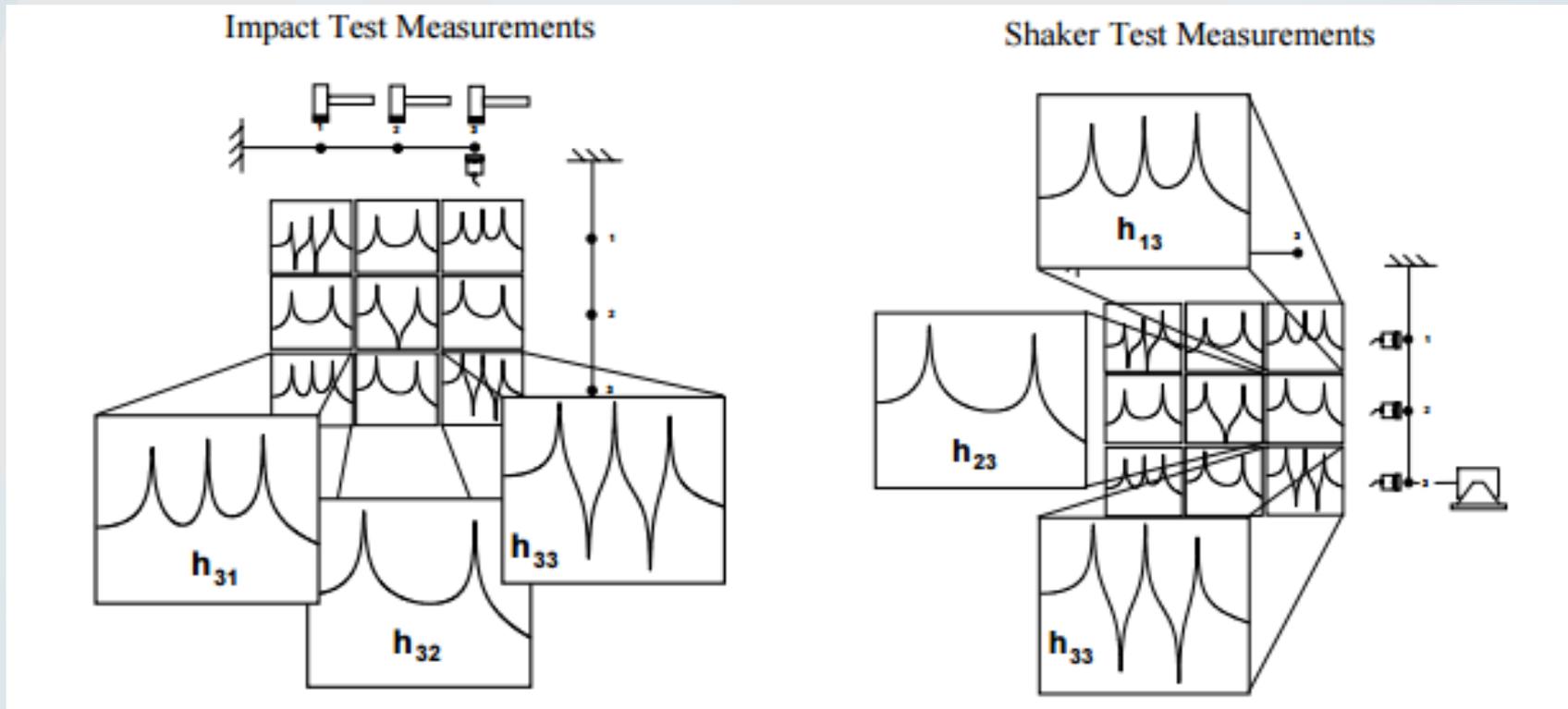
Entrada varredura
senoidal



increasing rate of oscillation

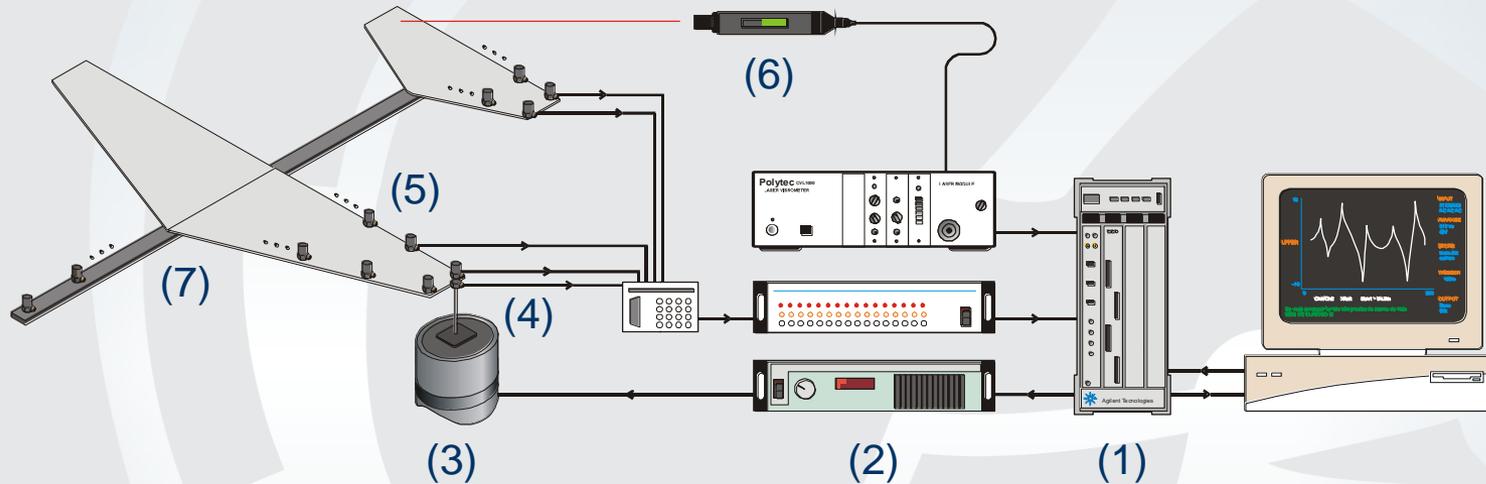


Ex1.



Ex1.

Como é um experimento?

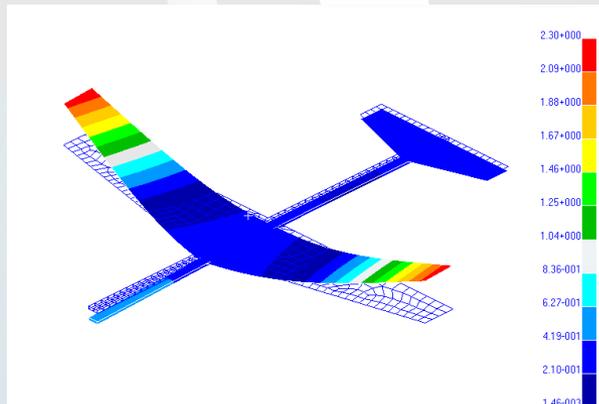
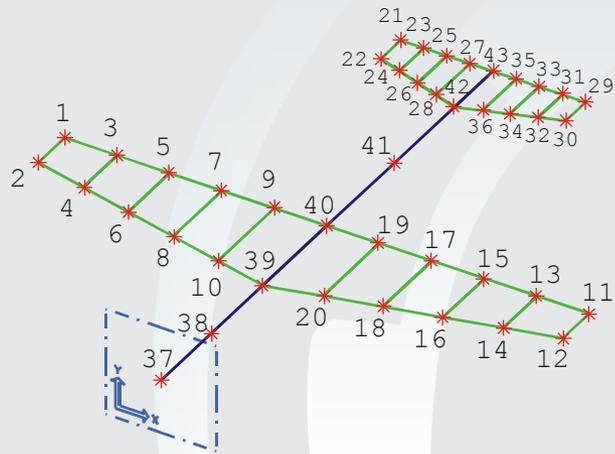


- (1) Agilent VXI 1432A (16 channels)
- (2) Power Amplifier
- (3) Shaker MB Dynamics Modal 50
- (4) Kistler 912 Force Transducer

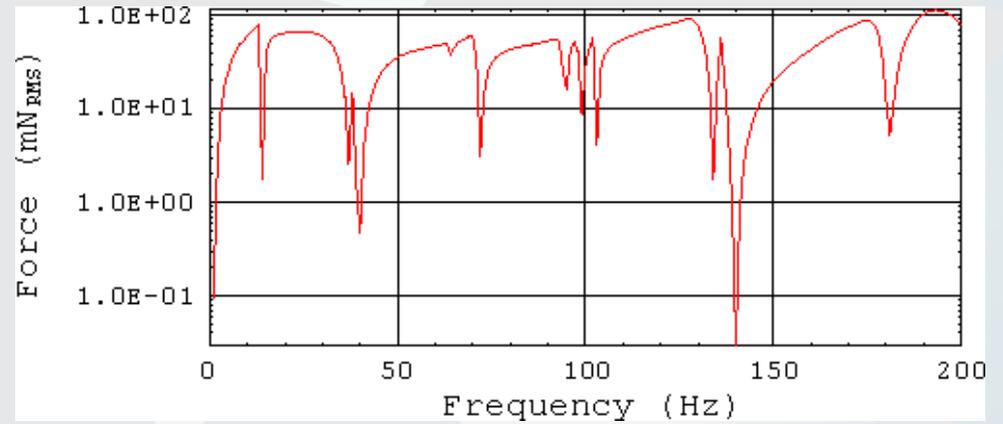
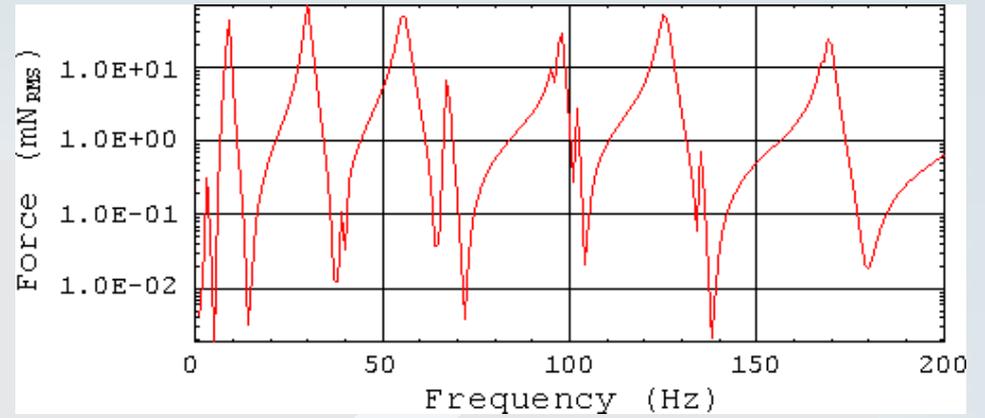
- (5) PCB 333B Accelerometer
- (6) LDV PolyTech CLV 700
- (7) Aircraft Type of Structure 1m long and 1m span

Input Signals: Burst Random (0 ~ 200 Hz), Sine Dwell, Sine Swept
Rectangular Window

Ex1.



PATRAN / NASTRAN



Ex1.

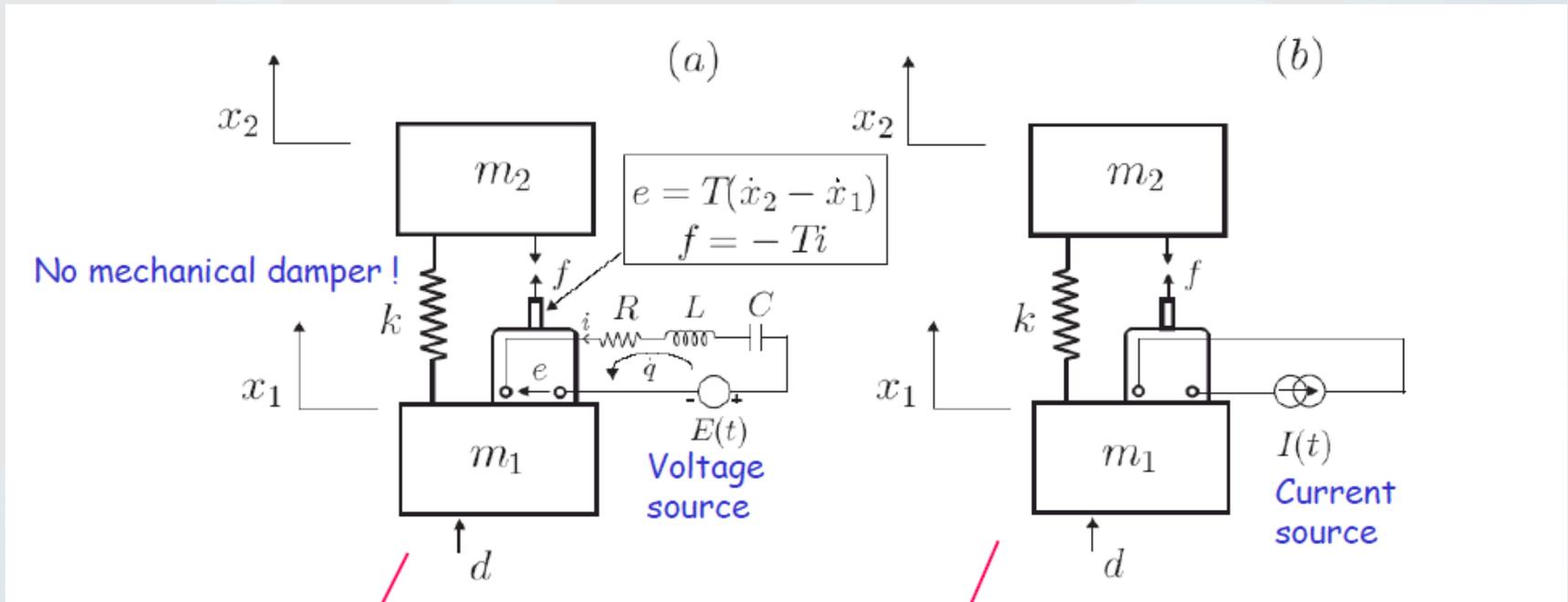
Mas como funciona um shaker?

Lousa ...



Ex2.

Suspensão Ativa

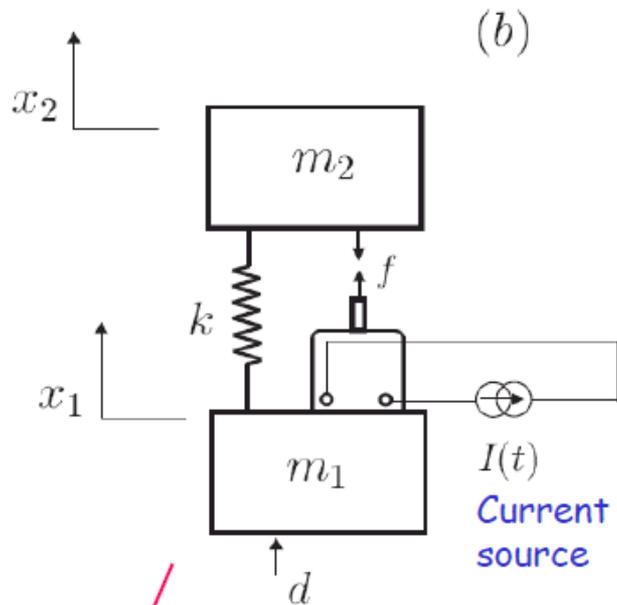


Modo de Corrente: a corrente i não é variável do problema, coordenadas generalizadas x

Modo de Tensão: a corrente é variável do problema, coordenadas generalizadas x, q

Ex2.

Suspensão Ativa



Modo de Corrente: a corrente i não é variável do problema, coordenadas generalizadas x_1, x_2

Formulação Lagrange Carga

$$L = T - V + \cancel{W_m^*} - \cancel{W_e} = 0$$

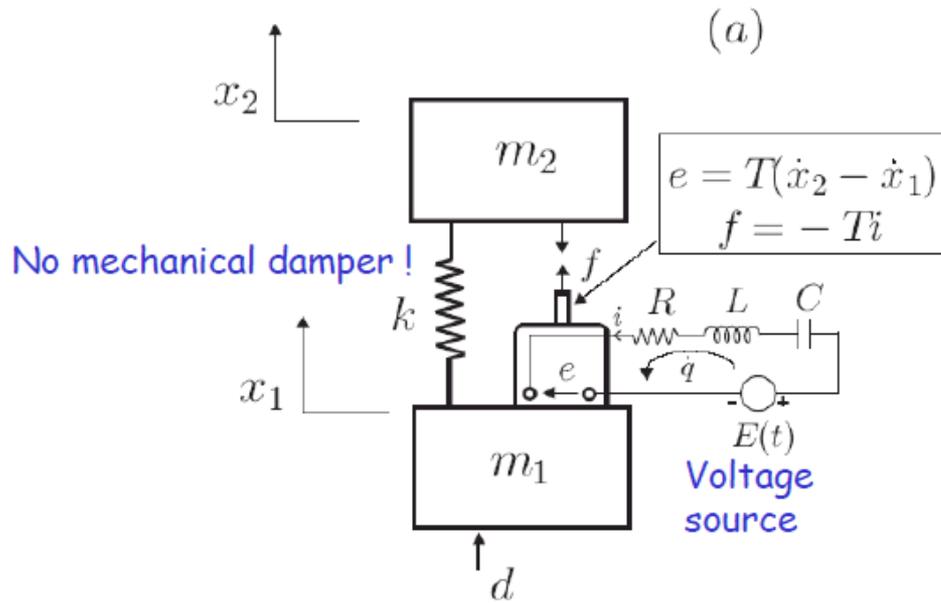
Trabalho = fx

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + Ti(x_2 - x_1 - x_0) - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + Ti &= d \\ m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) - Ti &= 0 \end{aligned}$$

Ex2.

Suspensão Ativa



Modo de Tensão: a corrente é variável do problema, coordenadas generalizadas x, q

Formulação Lagrange Carga

$$L = T - V + \cancel{W_m^*} - \cancel{W_e}$$

Trabalho = fx $q^2/2C$

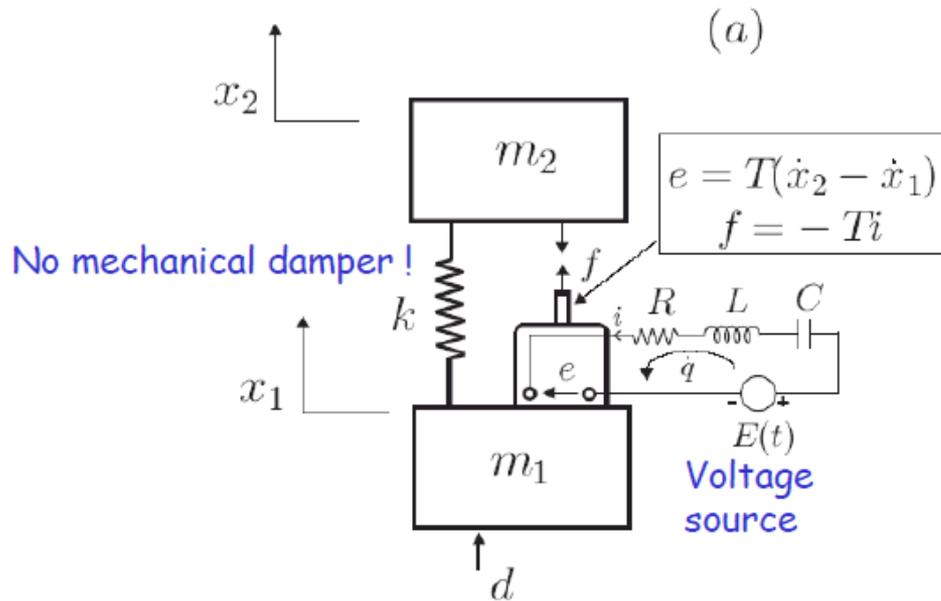
$$L = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + T \dot{q} (x_2 - x_1 - x_0) - \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 - \frac{q^2}{2C}$$

$$D = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$$

$$\delta W_{nc} = d \delta x_1 + E \delta q$$

Ex2.

Suspensão Ativa



Modo de Tensão: a corrente é variável do problema, coordenadas generalizadas x, q

Formulação Lagrange Carga

$$L = T - V + \underbrace{W_m^*}_{\text{Trabalho} = fx} - \underbrace{W_e}_{q^2/2C}$$

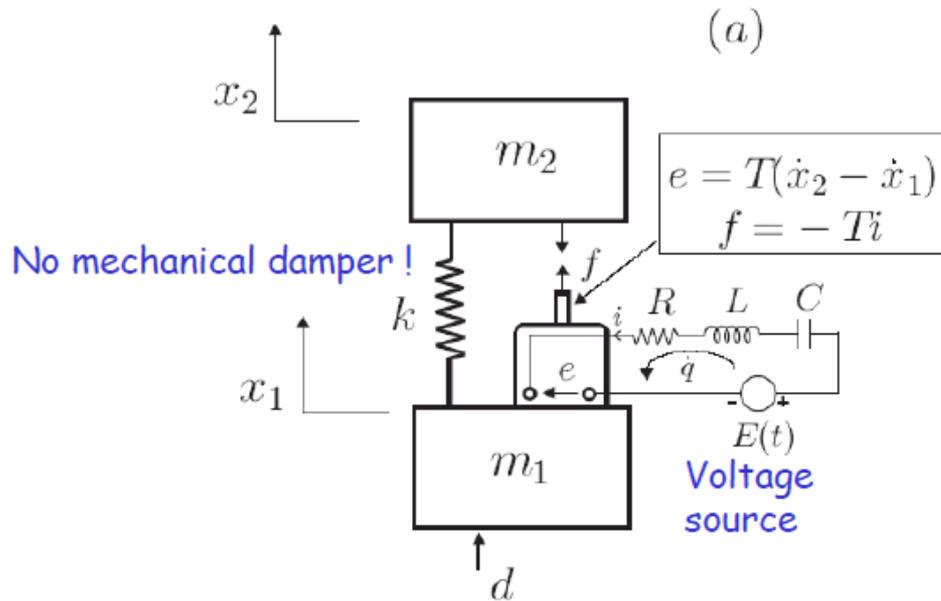
$$m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + T\dot{q} = d$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) - T\dot{q} = 0$$

$$L\ddot{q} + T(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + R\dot{q} + \frac{q}{C} = E$$

Ex2.

Suspensão Ativa



Modo de Tensão: a corrente é variável do problema, coordenadas generalizadas x, q

Formulação Lagrange Carga

Somente shunt resistivo

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + T\dot{q} &= d \\ m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) - T\dot{q} &= 0 \\ T(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + R\dot{q} &= 0 \end{aligned}$$

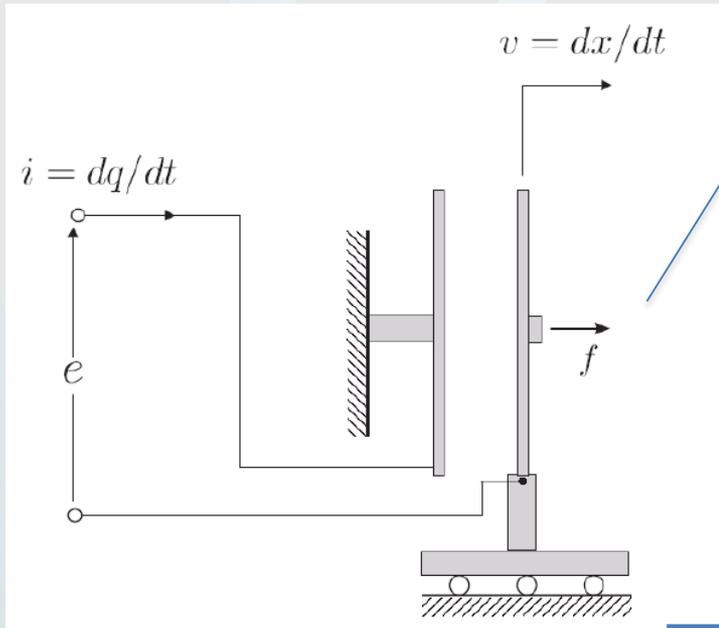


$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + \frac{T^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k(x_1 - x_2) &= d \\ m_2 \ddot{x}_2 + \frac{T^2}{R}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Ex3.

Capacitor com placa móvel

Armazena energia, transformando energia mecânica em elétrica



Balanea a força de atração eletrostática

Comportamento do capacitor:

$$q = C(x)e$$

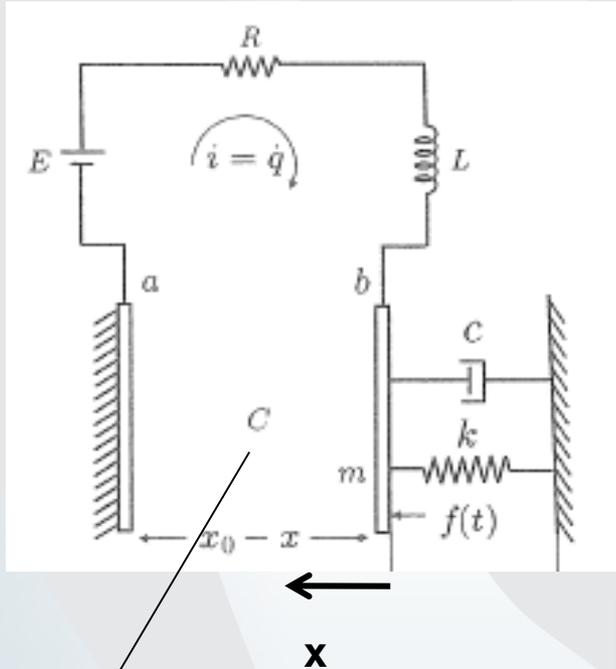
$$W_e(q) = \frac{q^2}{2C(x)}$$

Por ser um sistema conservativo:

$$f = \frac{\partial W_e}{\partial x} = -\frac{q^2}{2C(x)^2} C'(x) = -\frac{e^2}{2} C'(x)$$

Ex3.

Dispositivo Capacitivo



No equilíbrio, a carga q_0 no capacitor produz uma força de atração entre as placas que é balanceada pela ação da mola.

q_0 : carga em equilíbrio

x_0 : distância entre os terminais

x_1 : deformação da mola no equilíbrio

Força eletrostática: força de atração das superfícies do capacitor em equilíbrio

$$f_e = - \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_0 = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{2C(x)} \right]_0 = \frac{q_0^2}{2\epsilon A}$$

$$C(x) = \frac{\epsilon A}{x_0 - x}$$

No equilíbrio:

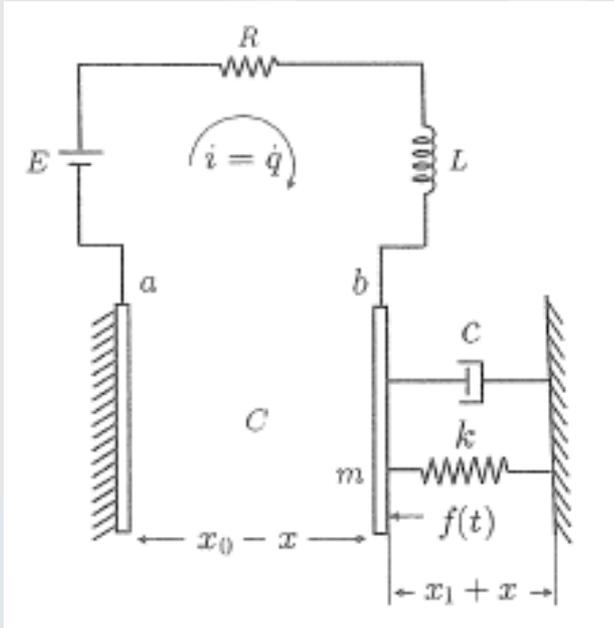
$$kx_1 = \frac{q_0^2}{2\epsilon A}$$

Ex3.

Dispositivo Capacitivo

Equações de Lagrange, Formulação de carga

$$L(\dot{x}, x, \dot{q}, q) = T + W_m^* - V - W_e$$



$$T^* = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2}k(x + x_1)^2$$

$$W_m^* = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

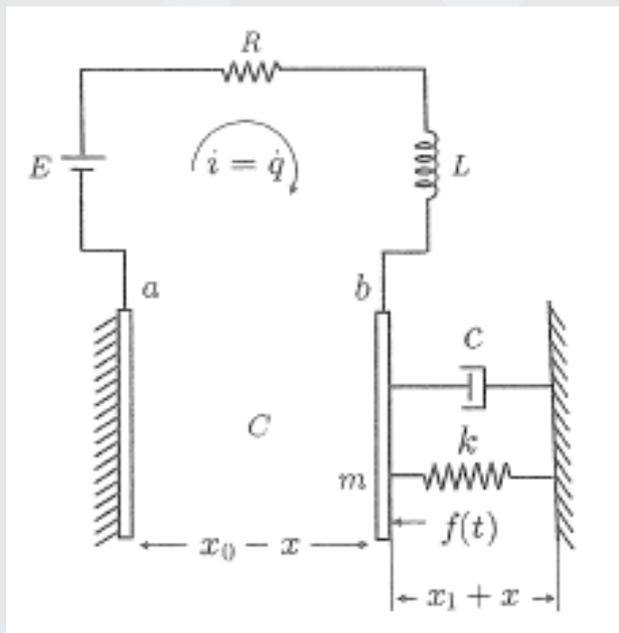
$$\delta W_{nc} = E(t)\delta q + f\delta x$$

$$W_e = \frac{1}{2C}(q_0 + q)^2 = \frac{x_0 - x}{2\epsilon A}(q_0 + q)^2$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}L\dot{q}^2 - \frac{1}{2}k(x + x_1)^2 - \frac{x_0 - x}{2\epsilon A}(q_0 + q)^2$$

Ex3.

Dispositivo Capacitivo



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = f$$

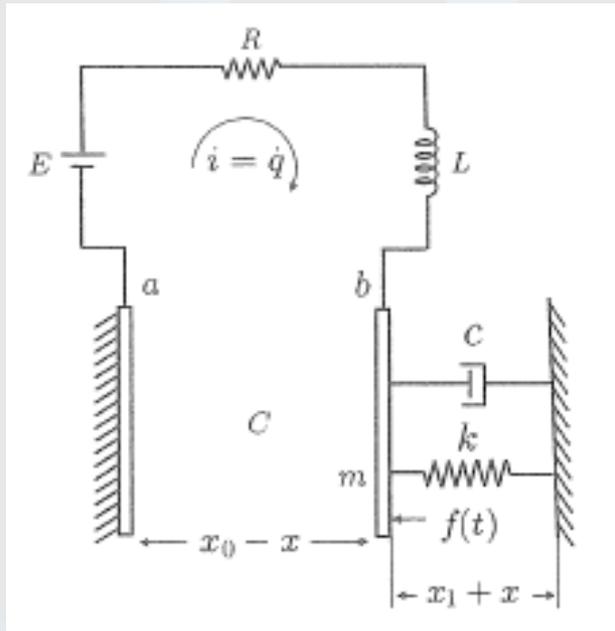
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = E$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + x_1) - \frac{(q_0 + q)^2}{2\epsilon A} = f$$

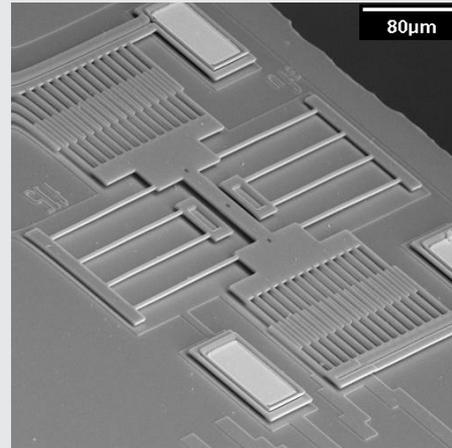
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{x_0 - x}{\epsilon A} (q_0 + q) = E$$

Ex3.

Dispositivo Capacitivo



Comb Drive



Sensor de Pressão



Wii



Força eletrostática

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + x_1) - \frac{(q_0 + q)^2}{2\epsilon A} = f$$

➡ Atuador

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{x_0 - x}{\epsilon A}(q_0 + q) = E$$

➡ Sensor



EESC • USP

www.eesc.usp.br