EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Sistemas Elétricos

Kirchhoff e Lagrange

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
3373-8650

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Objetivo

Relembrar as Leis de Kirchhoff e introduzir a Formulação de Lagrange para sistemas elétricos

Sistemas Elétricos

Três elementos básicos de sistemas elétricos podem ser utilizados para modelar o comportamento dinâmico de circuitos elétricos:

- o elemento **capacitor**
- o elemento **resistor**
- o elemento **indutor**

Os circuitos elétricos estão sujeitos a carga elétrica *q* e ao fluxo magnético λ, função da corrente *i* e da tensão *e*:

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

Sistemas Elétricos

A teoria de parâmetros concentrados se baseia na teoria quasi-estática do eletromagnetismo:

dimensões dos elementos << comprimento de onda magnético

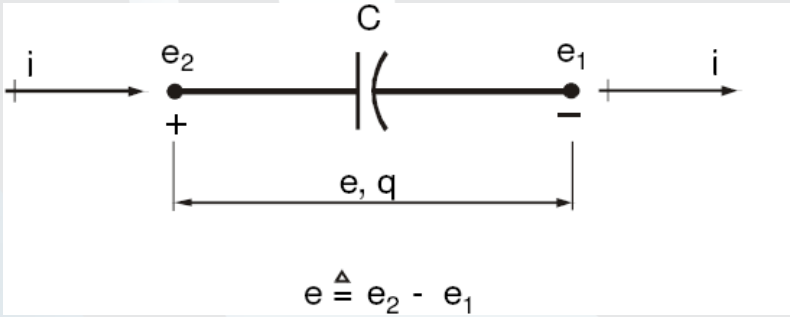
Assim o campo de forças será sempre de origem elétrica ou magnética. Assim modelos mecânicos, elétricos e eletro-mecânicos podem ser obtidos usando elementos **puros** e **ideais**.

Capacitor

Elemento composto por duas superfícies separadas por um material dielétrico.

$$q = Ce$$

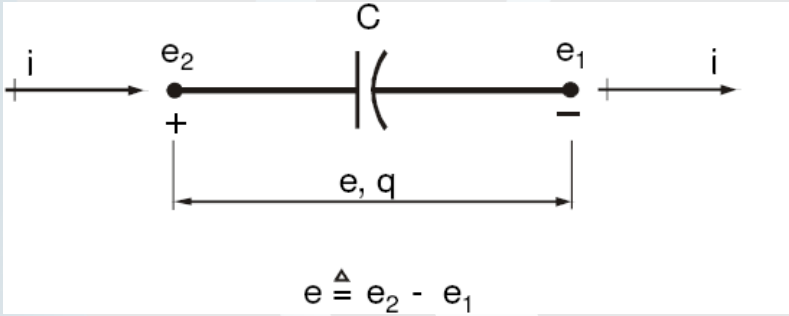
q: Carga no capacitor (Coulombs)
e: tensão entre os terminais (Volts)
i : Corrente (Amperes)
C: Capacitância (Farads)



Usando, $i = \frac{dq}{dt}$ temos $e = \frac{1}{C}\int i dt$

Capacitor

Elemento composto por duas superfícies separadas por um material dielétrico.



$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$q = Ce$$

Trabalho é integral da potência

Energia Elétrica

$$W_e(q) = \int_0^t eidt = \int_0^q edq = \frac{q^2}{2C}$$

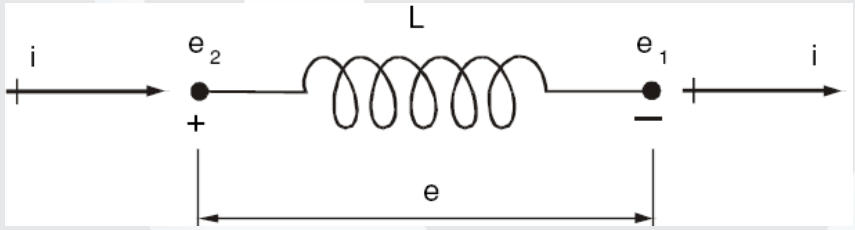
Co-Energia Elétrica

$$W_e^*(e) = \frac{1}{2}Ce^2$$

Indutor

Ao passar por um indutor, a corrente elétrica gera um campo magnético.

$$\lambda = Li$$

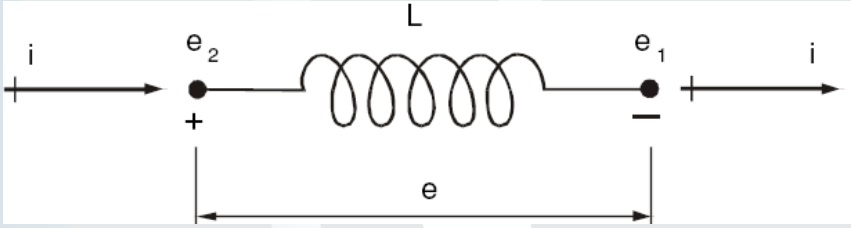


λ: Fluxo magnético(Tesla)
e: Tensão (Volts)
i : Corrente (Amperes)
L: Indutância (Henrys)

Usando, $e = \frac{d\lambda}{dt}$ temos $e = L\frac{di}{dt}$

Indutor

Ao passar por um indutor, a corrente elétrica gera um campo magnético.



$$\lambda = Li$$

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

Energia Magnética

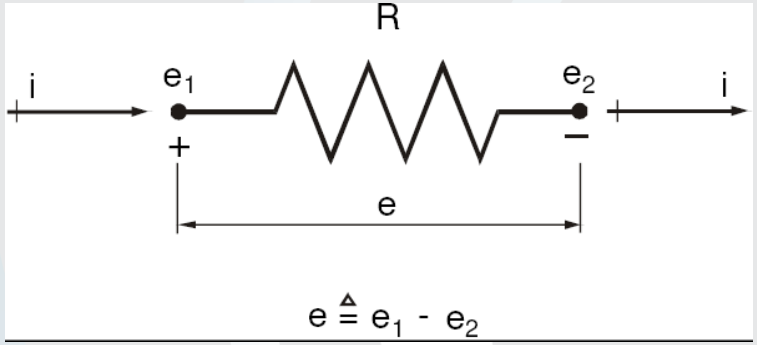
$$W_m(\lambda) = \int_0^t eidt = \int_0^\lambda id\lambda = \frac{\lambda^2}{2L}$$

Co-Energia Magnética

$$W_m^*(i) = \frac{1}{2}Li^2$$

Sistemas Elétricos

Resistor



$$e = Ri$$

e: Tensão (Volts)
i : Corrente (Amperes)
λ: Fluxo (Tesla)
R: Resistência (Ohms)

$$e = \frac{d\lambda}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Energia Dissipada (q)

$$D(q) = \frac{1}{2} R\dot{q}^2 = \frac{1}{2} Ri^2$$

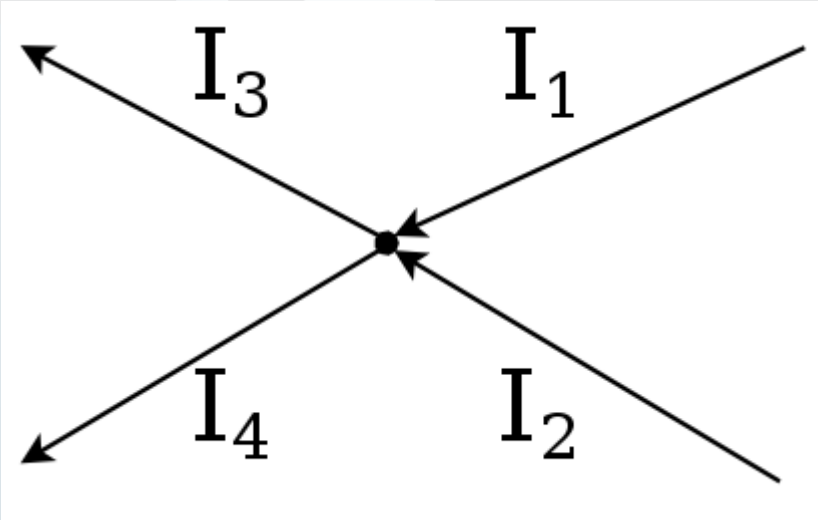
Energia Dissipada (λ)

$$D(\lambda) = \frac{e^2}{2R} = \frac{1}{2R}\dot{\lambda}^2$$

Leis de Kirchhoff

Lei das Correntes nos Nós: A somatória das correntes que chegam em um nó de um circuito é igual à somatória das correntes que saem deste nó.

A corrente vai do terminal com maior voltagem para com o terminal com menor voltagem (+ para 0 -).

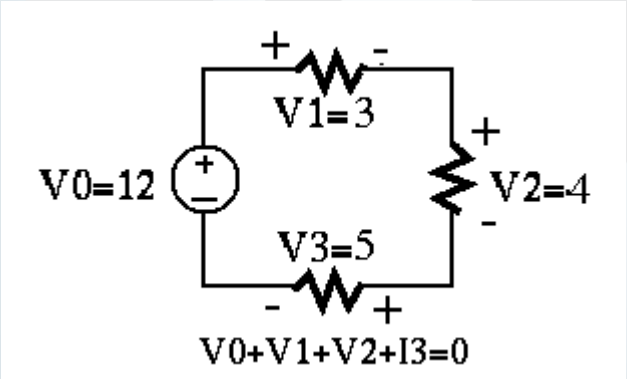


$$i1+i2-i3-i4=0$$

Leis de Kirchhoff

Lei da Tensão nas Malhas: A somatória das diferenças de potencial elétrico ao longo de uma malha percorrida num mesmo sentido é igual a zero.

A queda da voltagem tem o mesmo sentido da corrente.

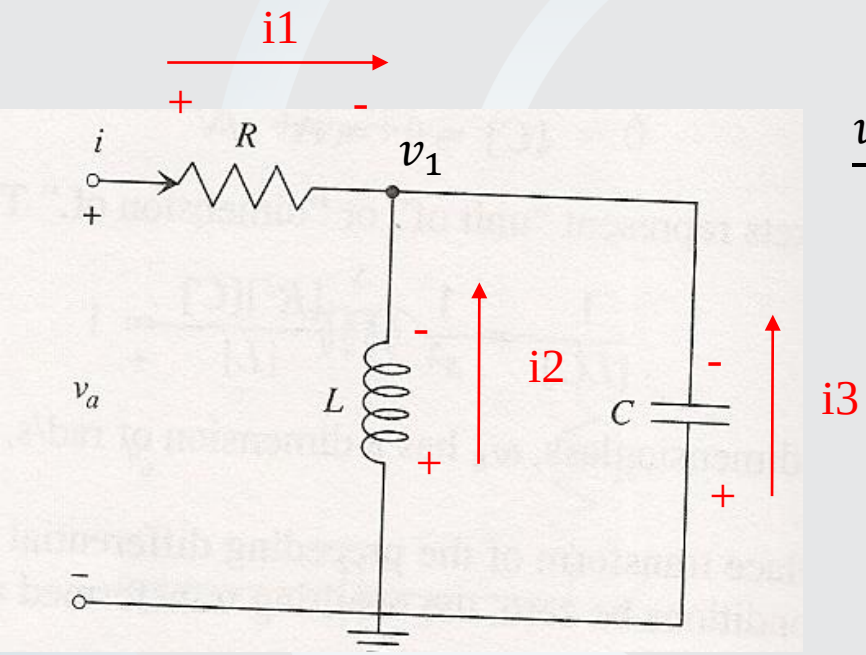


$$v1+v2+vi3-v0=0$$

Sistemas Elétricos

Leis dos nós

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$



$$\frac{v_a - v_1}{R} + \frac{1}{L}\int (0 - v_1)dt + C\frac{d(0 - v_1)}{dt} = 0$$

Deriva

$$C\ddot{v}_1 + \frac{\dot{v}_1}{R} + \frac{1}{L}v_1 = \frac{\dot{v}_a}{R}$$

Laplace

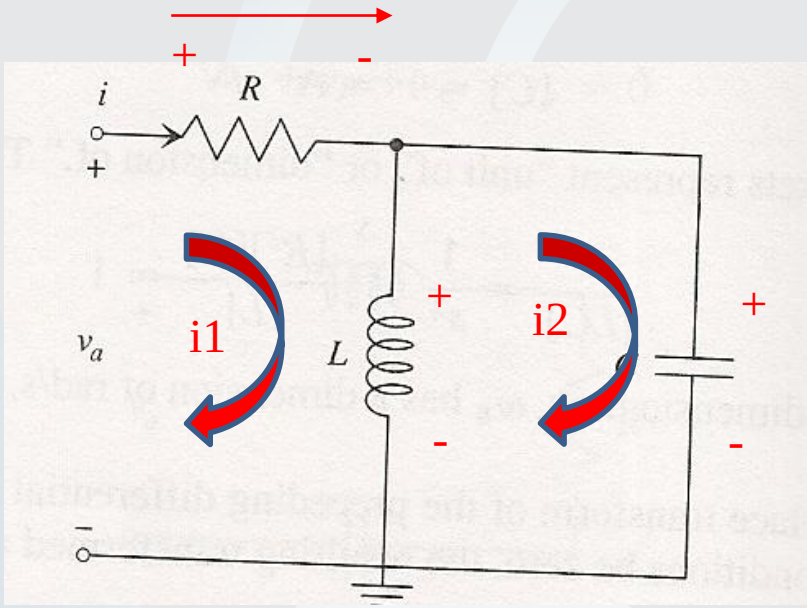
$$\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right)V_1(s) = \frac{s}{R}V_a(s)$$

Formulação voltagem/fluxo

$$\frac{V_1}{V_a}(s) = \frac{s}{R\left(Cs^2 + \frac{1}{R}s + \frac{1}{L}\right)}$$

Sistemas Elétricos

Leis das malhas



$$Ri_1 + L\frac{d(i_1 - i_2)}{dt} - v_a = 0$$

$$\frac{1}{C}\int i_2 dt + L\frac{d(i_2 - i_1)}{dt} = 0$$

Deriva:

$$\begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{i}_1 \\ \ddot{i}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{v}_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

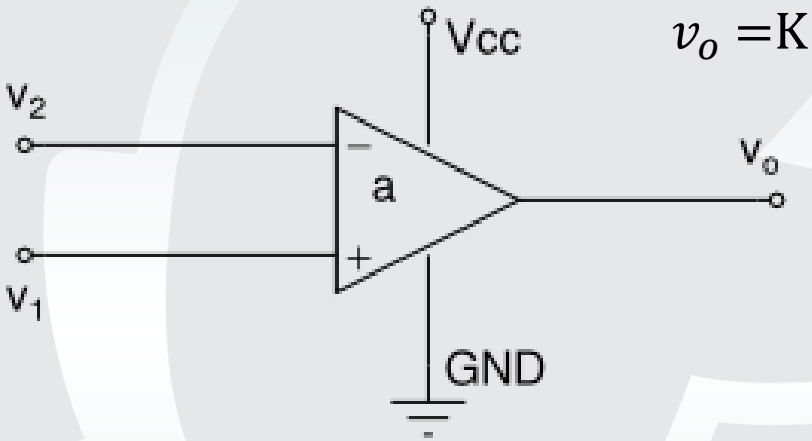
Formulação corrente/carga

Kramer:

$$\frac{I_1}{V_a}(s) = \frac{Ls^2 + \frac{1}{C}}{RLs^2 + \frac{L}{C}s + \frac{R}{C}}$$

$$\frac{I_2}{V_a}(s) = \frac{Ls^2}{RLs^2 + \frac{L}{C}s + \frac{R}{C}}$$

Amplificador Operacional

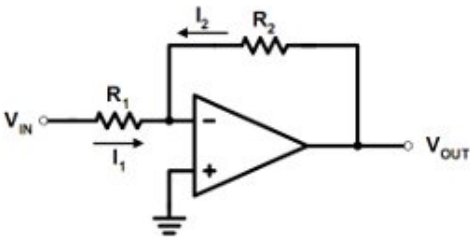


$$v_o = K(v_1 - v_2)$$

741

- Corrente no amplificador é quase nula
- É um elemento ativo (precisa ser alimentado)
- É um CI
- K é uma ganho grande e positivo
- v_o é limitado
- $v_1 - v_2 \sim 0$ ou $v_1 \sim v_2$

Montagem Inversora (Amplificador Inversor)



$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Montagem Inversora

$V^+ = 0 \Rightarrow V^- = 0$

$$I_1 = \frac{V_{IN} - V^-}{R_1} = \frac{V_{IN}}{R_1}$$

e

$$I_2 = \frac{V_{OUT} - V^-}{R_2} = \frac{V_{OUT}}{R_2}$$

Como não existe corrente na entrada do amplificador operacional ideal ($I_1 + I_2 = 0$) pode escrever-se

$$\frac{V_{OUT}}{R_1} + \frac{V_{IN}}{R_2} = 0$$

https://www.electronica-pt.com/amplificadores-operacionais-ampop

Montagem Não Inversora (Amplificador Não Inversor)

Como não existe corrente na entrada do amplificador operacional ideal, obtém-se

$$V^- = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{OUT}$$

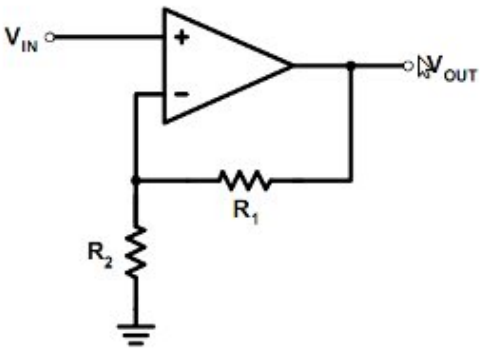
No Amplificador ideal tem-se $V^+ = V^-$

$$V^- = V^+ = V_{IN} = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{OUT}$$

Resultando

$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \mathbf{A}$$

O Ganho *A* é sempre Maior que 1



$$\frac{V_{OUT}}{V_{IN}} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

Montagem Não Inversora

https://www.electronica-pt.com/amplificadores-operacionais-ampop

Leis da Física

Equações de Lagrange, Formulação de Fluxo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial \lambda_k}=I_k$$

Lagrangiano: $L\left(\dot{\lambda}_k,\lambda_k\right)=W_e^*\left(\dot{\lambda}_k\right)-W_m\left(\lambda_k\right), \quad e_k=\dot{\lambda}_k$

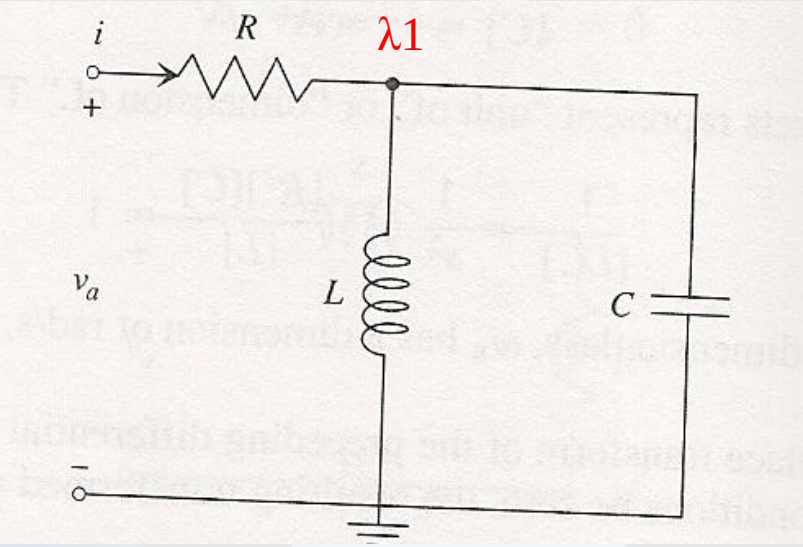
Trabalho dos componentes não-conservativos: $\delta W_{NC}=I_k\delta\lambda_k$

Sistemas Elétricos

Leis dos nós $$C\ddot{v}_1 + \frac{\dot{v}_1}{R} + \frac{1}{L}v_1 = \frac{\dot{v}_a}{R}$$

$$W_e^*(e) = \frac{1}{2}Ce^2$$

Formulação voltagem/fluxo



$$W_m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L}$$

$$\delta W_{NC} = I_k \delta\lambda_k$$

$$W_e^* = \frac{1}{2}C\dot{\lambda}_1{}^2 \qquad W_m = \frac{\lambda_1{}^2}{2L}$$

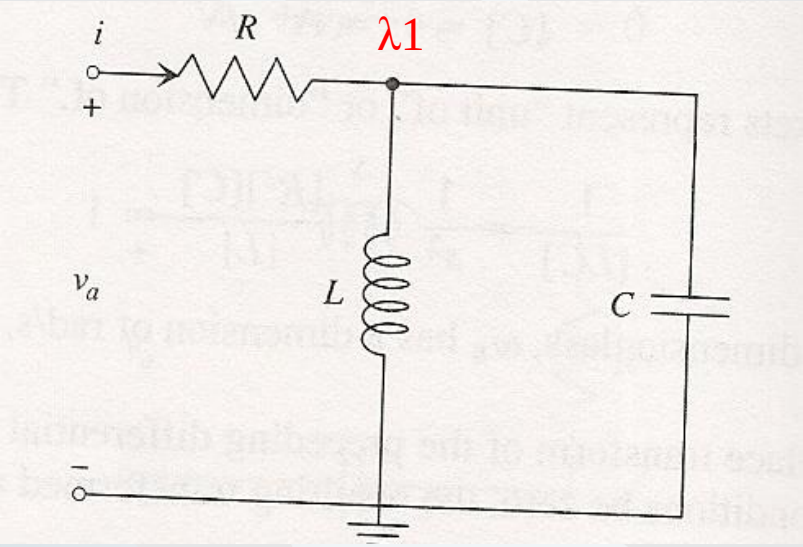
$$\delta W_{nc} = \left(\frac{v_a - v_1}{R}\right)\delta\lambda_1 = \left(\frac{\dot{\lambda}_a - \dot{\lambda}_1}{R}\right)\delta\lambda_1$$

$$I_1 = \left(\frac{\dot{\lambda}_a - \dot{\lambda}_1}{R}\right)$$

Sistemas Elétricos

Leis dos nós $$C\ddot{v}_1 + \frac{\dot{v}_1}{R} + \frac{1}{L}v_1 = \frac{\dot{v}_a}{R}$$

Formulação voltagem/fluxo



$$W_e^* = \frac{1}{2}C\dot{\lambda}_1{}^2$$

$$W_m = \frac{\lambda_1{}^2}{2L}$$

$$L = W_e^* - W_m$$

$$I_1 = \left(\frac{\dot{\lambda}_a - \dot{\lambda}_1}{R}\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = I_1}$$

Deriva:

$$C\ddot{v}_1 + \frac{\dot{v}_1}{R} + \frac{1}{L}v_1 = \frac{\dot{v}_a}{R}$$

$$\frac{d}{dt}(C\dot{\lambda}_1) - \left(-\frac{\lambda_1}{L}\right) = C\ddot{\lambda}_1 + \frac{\lambda_1}{L} = \frac{\dot{\lambda}_a - \dot{\lambda}_1}{R}$$

Leis da Física

Equações de Lagrange, Formulação de Carga

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=E_k$$

Lagrangiano: $L(\dot{q}_k, q_k)=W_m^*(\dot{q}_k)-W_e(q_k), \quad i_k=\dot{q}_k$

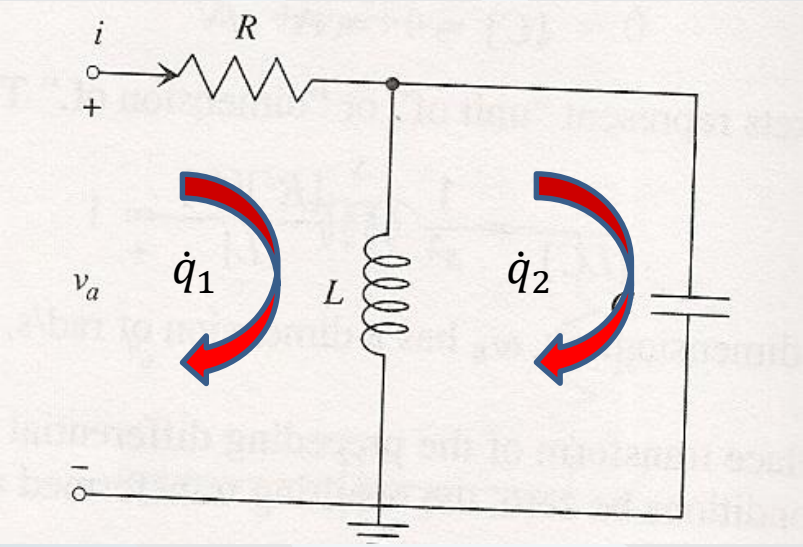
Trabalho dos componentes não-conservativos: $\delta W_{NC}=E_k\delta q_k$

Sistemas Elétricos

Leis das malhas

Formulação corrente/carga

$$\begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{i}_1 \\ \ddot{i}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{v}_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$W_e(q) = \frac{q^2}{2C}$$

$$\delta W_{NC} = E_k \delta q_k$$

$$W_m^*(i) = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

$$W_e = \frac{{q_2}^2}{2C}$$

$$W_m = \frac{L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2}$$

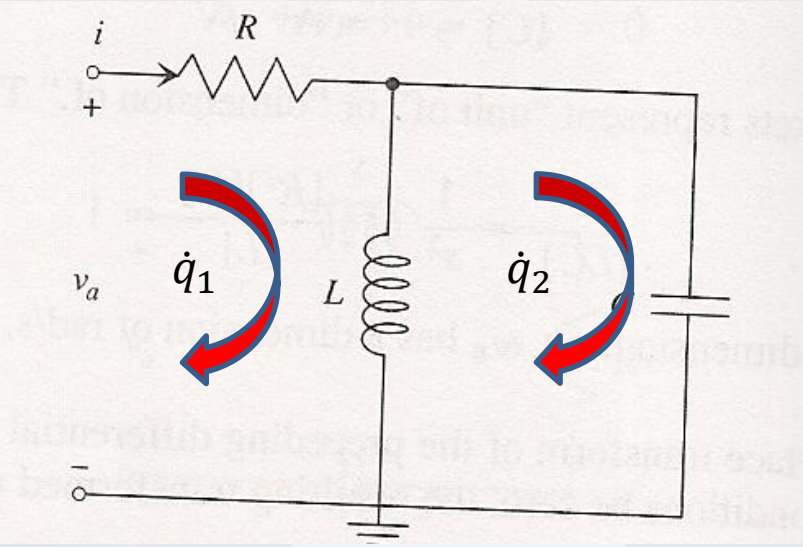
$$\delta W_{nc} = -R\dot{q}_1\delta q_1 + v_a \delta q_1$$

Sistemas Elétricos

Leis das malhas

Formulação corrente/carga

$$\begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{i}_1 \\ \ddot{i}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{v}_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$W_e = \frac{{q_2}^2}{2C} \qquad W_m = \frac{L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2}$$

$$\delta W_{nc} = -R\dot{q}_1\delta q_1 + v_a\delta q_1$$

$$L(\dot{q}_k, q_k) = W_m^*(\dot{q}_k) - W_e(q_k), \quad i_k = \dot{q}_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} = E_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\right) = -R\dot{q}_1 + v_a$$

$$L\ddot{q}_1 - L\ddot{q}_2 + R\dot{q}_1 = v_a$$

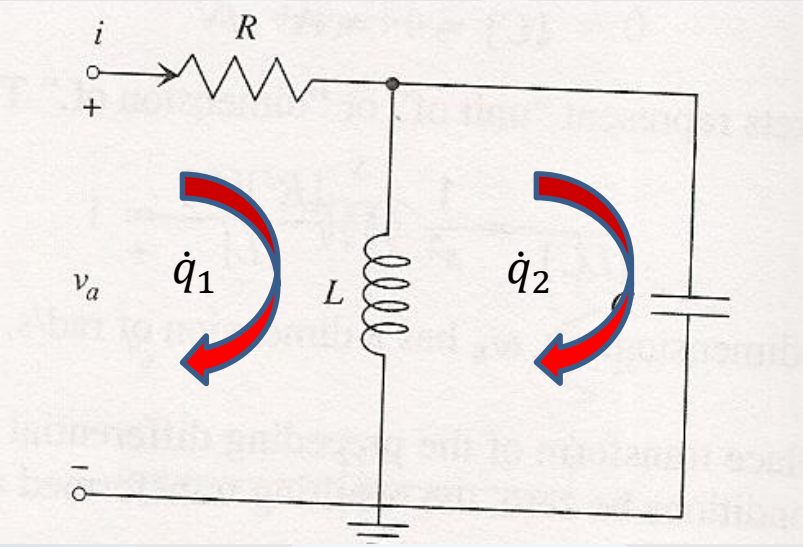
Deriva: $L\ddot{i}_1 - L\ddot{i}_2 + Ri_1 = \dot{v}_a$

Sistemas Elétricos

Leis das malhas

Formulação corrente/carga

$$\begin{bmatrix} L & -L \\ -L & L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{i}_1 \\ \ddot{i}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & {}^{1}/_{C} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{v}_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$W_e = \frac{{q_2}^2}{2C} \qquad W_m = \frac{L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2}{2}$$

$$\delta W_{nc} = -R\dot{q}_1\delta q_1 + v_a\delta q_1$$

$$L(\dot{q}_k, q_k) = W_m^*(\dot{q}_k) - W_e(q_k), \quad i_k = \dot{q}_k$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} = E_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(-L(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)\right) + \frac{q_2}{C} = 0$$

$$-L\ddot{q}_1 + L\ddot{q}_2 + \frac{q_2}{C} = 0$$

Deriva: $-L\ddot{i}_1 + L\ddot{i}_2 + \frac{i_2}{C} = 0$

EESC • USP

www.eesc.usp.br