



*Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo*

Cinemática

Parte 2

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva

mairams@sc.usp.br

3373-8650



Objetivo

With respect to a **coordinate frame** whose origin coincides with the body's **center of mass**, they can be expressed in matrix form as:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \boldsymbol{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{cm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{cm} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_{cm} \boldsymbol{\omega} \end{pmatrix},$$

where

$\mathbf{F}$ = total **force** acting on the center of mass

m = mass of the body

$\mathbf{I}_3$ = the 3x3 **identity matrix**

$\mathbf{a}_{cm}$ = acceleration of the **center of mass**

$\mathbf{v}_{cm}$ = velocity of the **center of mass**

$\boldsymbol{\tau}$ = total torque acting about the center of mass

$\mathbf{I}_{cm}$ = **moment of inertia** about the center of mass

$\boldsymbol{\omega}$ = **angular velocity** of the body

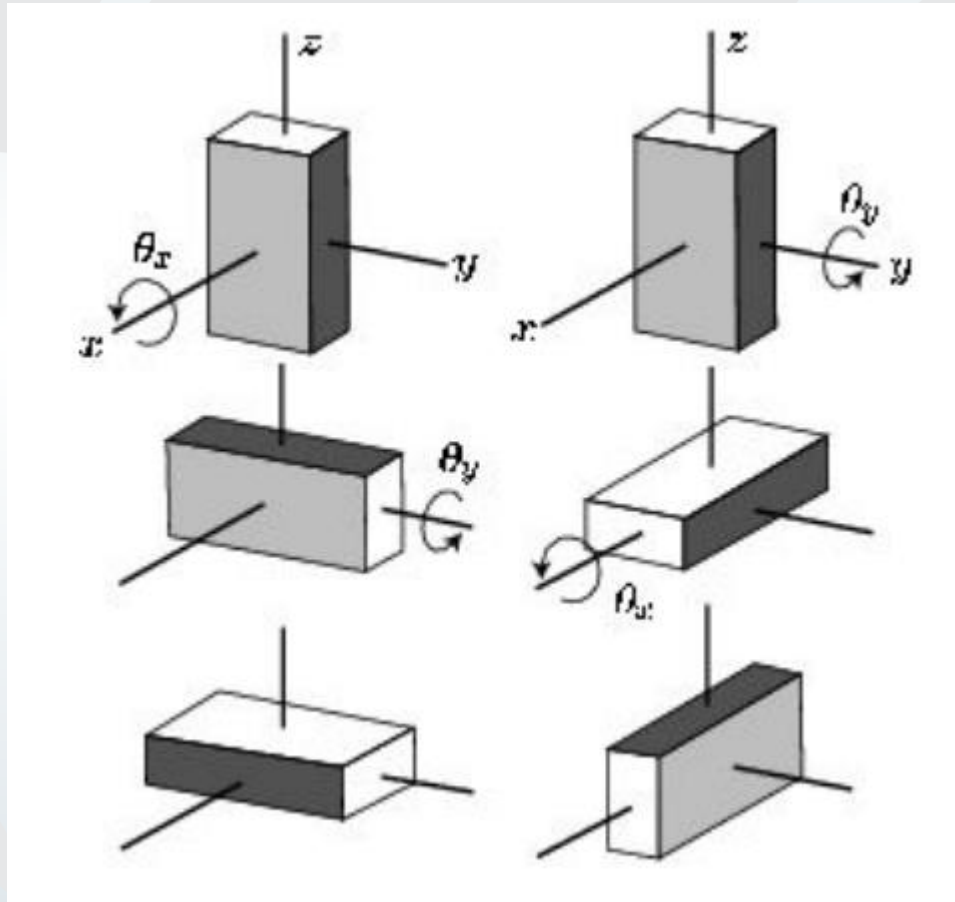
$\boldsymbol{\alpha}$ = **angular acceleration** of the body

Ref: Hibbeler, Trindade

(http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0100-73862000000200015) e
MIT (<http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/>)

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

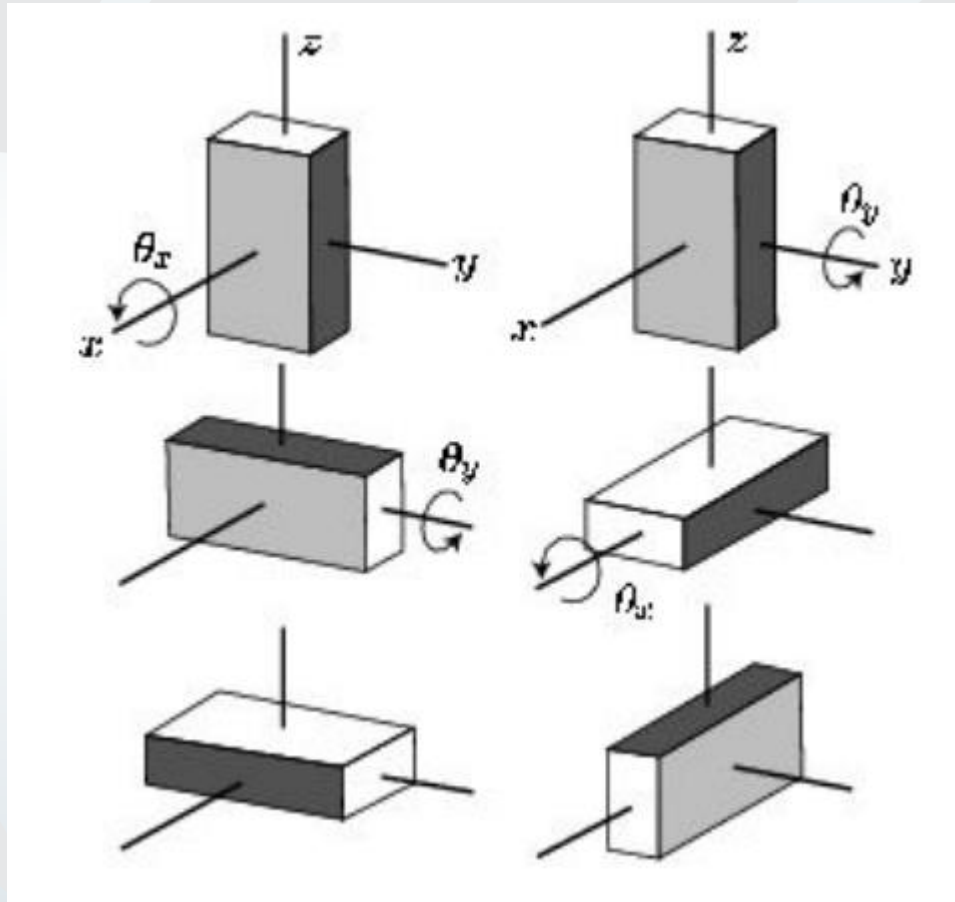
Rotações Finitas $\theta_x \hat{i} + \theta_y \hat{j} = \theta_y \hat{j} + \theta_x \hat{i} \quad ??$



Podemos trabalhar com elas como se fossem vetores?

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Rotações Finitas $\theta_x \hat{i} + \theta_y \hat{j} = \theta_y \hat{j} + \theta_x \hat{i} \quad ??$



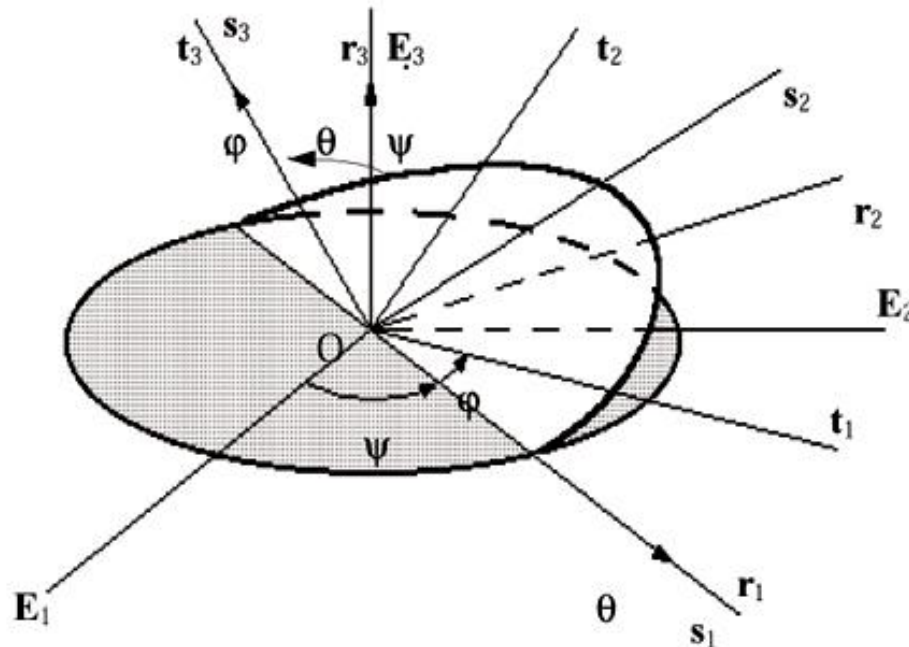
Podemos trabalhar com elas como se fossem vetores? **NÃO!**

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Para definir a matriz de rotação precisamos definir a ordem das rotações finitas.

Ângulos de Euler

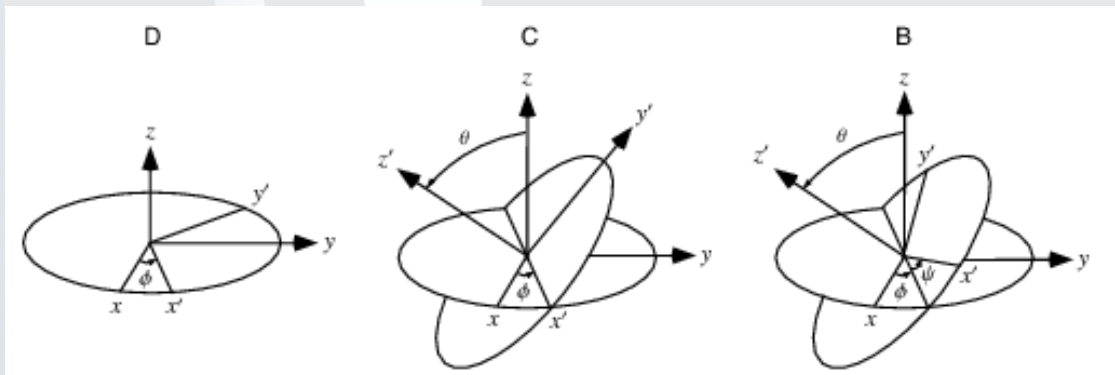
- 1- Uma rotação de ψ (precessão) em torno do eixo E_3 : $R_1(z, \psi)$
- 2- Uma rotação de θ (nutação) em torno do eixo r_1 : $R_2(x, \theta)$
- 3- Uma rotação de ϕ (rotação própria) em torno do eixo s_3 : $R_3(z, \phi)$



Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Para definir a matriz de rotação precisamos definir a ordem das rotações finitas.

Ângulos de Euler = R=BCD



$$\begin{aligned} D &\equiv \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ C &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ B &\equiv \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Ângulos de Bryant

- 1- Uma rotação de ψ (yaw) em torno do eixo E_3 : $R_1(z, \psi)$
- 2- Uma rotação de θ (pitch) em torno do eixo r_2 : $R_2(y, \theta)$
- 3- Uma rotação de ϕ (roll) em torno do eixo s_1 : $R_3(x, \phi)$

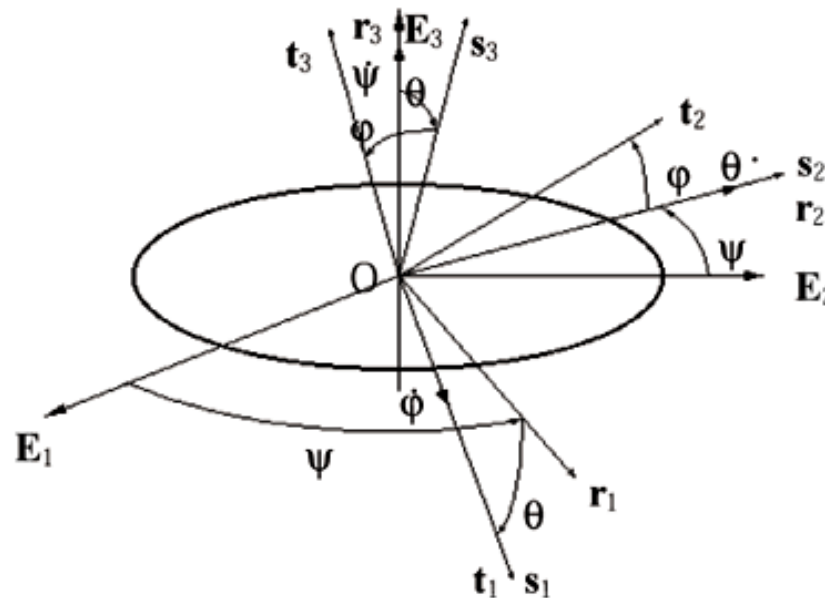


Figura 8: Representação dos ângulos de Bryant.

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

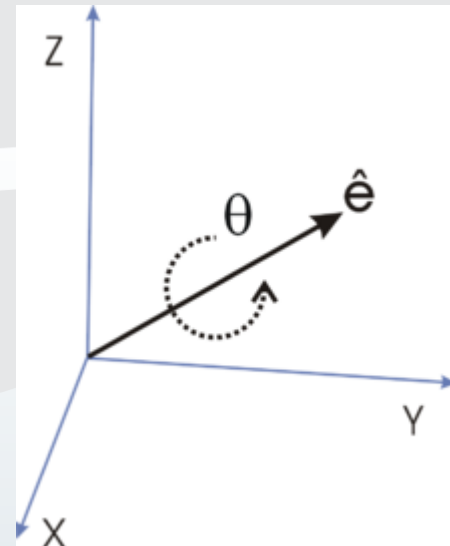
Teorema de Euler. Qualquer rotação ao redor de um ponto fixo de um corpo rígido pode ser descrito por uma rotação ao redor de um eixo e um ângulo ao redor desse eixo.

Eixo Instantâneo de Rotação !

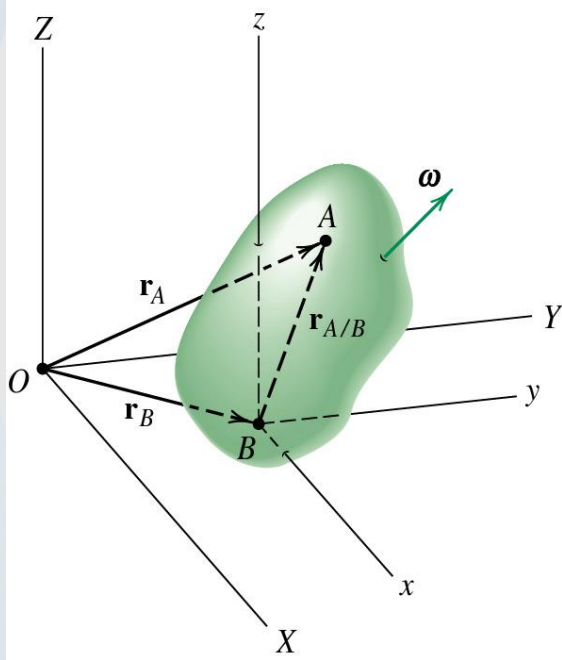
Posso então descrever as rotações usando esse conceito.

As possibilidades são várias.

Para mais infos leiam o paper do Trindade, por exemplo.



Cinemática de Corpos Rígidos – 3D



Eixo em translação

$$\vec{\mathbf{V}}_A = \vec{\mathbf{V}}_B + \vec{\mathbf{V}}_{A/B}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_A = \vec{\mathbf{a}}_B + \vec{\mathbf{a}}_{A/B}$$

$$\vec{\mathbf{V}}_A = \vec{\mathbf{V}}_B + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_{A/B}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_A = \vec{\mathbf{a}}_B + \dot{\vec{\boldsymbol{\omega}}} \times \vec{\mathbf{r}}_{A/B} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}_{A/B})$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Eixo em translação e rotação

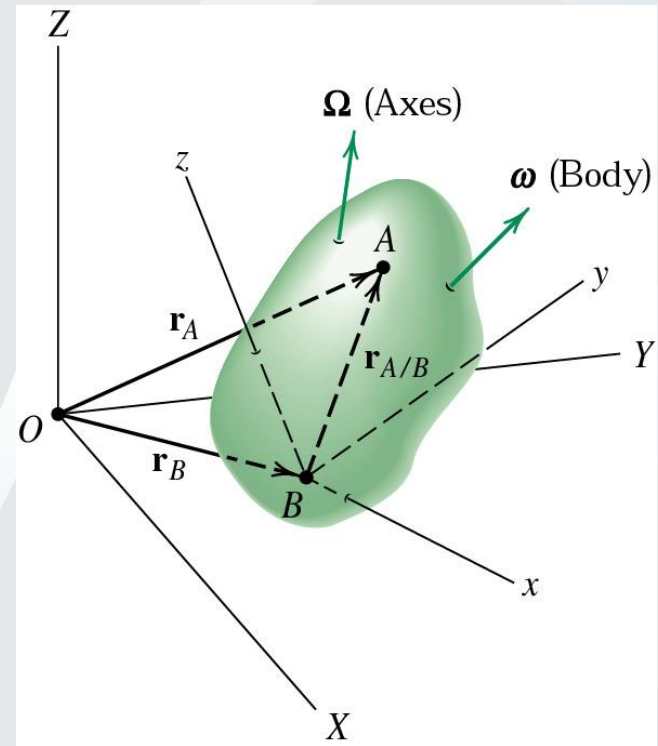
$$\dot{\vec{i}} = \vec{\Omega} \times \vec{i}$$

$$\dot{\vec{j}} = \vec{\Omega} \times \vec{j}$$

$$\dot{\vec{k}} = \vec{\Omega} \times \vec{k}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{v}_{\text{rel}}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{A/B} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{A/B}) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{rel}}$$



Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

No momento, eu sei as matrizes de rotação e as equações. Para usa-las eu preciso conhecer as velocidades e acelerações.

Rotações finitas não podem ser tratadas como vetores.

Mas as infinitesimais podem!

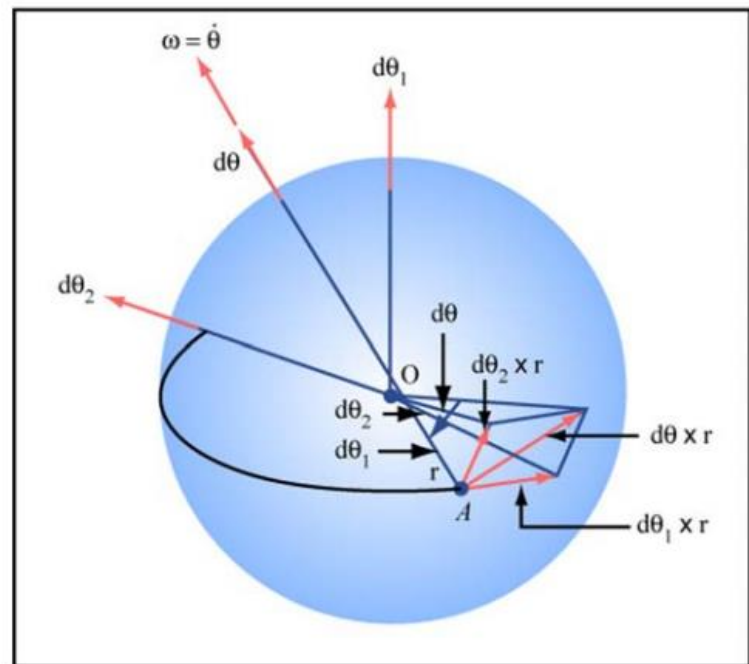
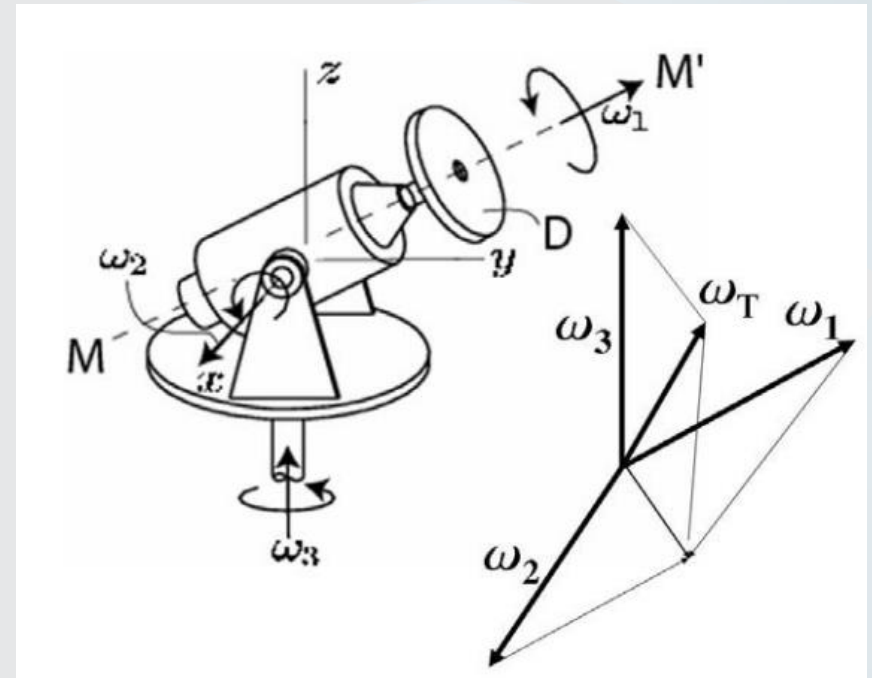


Image by MIT OpenCourseWare.

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Rotações finitas não podem ser tratadas como vetores.

Mas as infinitesimais podem!

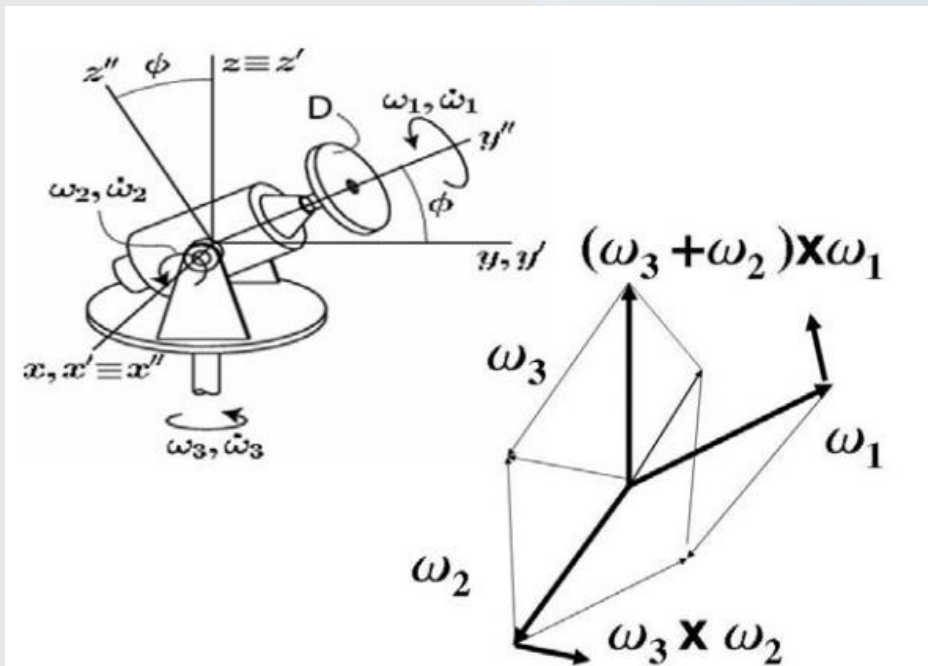


$$\boldsymbol{\omega} = \omega_2 \mathbf{i} + \omega_1 \cos \phi \mathbf{j} + (\omega_1 \sin \phi + \omega_3) \mathbf{k} .$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Rotações finitas não podem ser tratadas como vetores.

Mas as infinitesimais podem!



The angular velocity of the disc with respect to the fixed axes will be simply

$$\Omega = \omega_2 \mathbf{i}' + \omega_1 \mathbf{j}'' + \omega_3 \mathbf{k} .$$

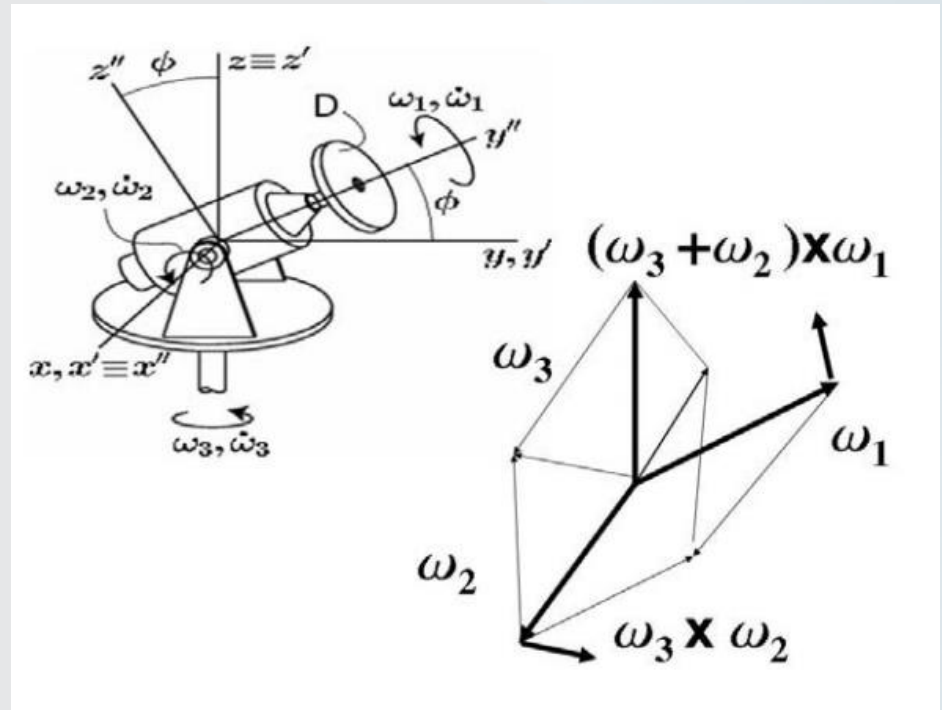
At the instant considered, $\mathbf{i}' = \mathbf{i}$ and $\mathbf{j}'' = \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k}$. Therefore, we can also write,

$$\Omega = \omega_2 \mathbf{i} + \omega_1 \cos \phi \mathbf{j} + (\omega_1 \sin \phi + \omega_3) \mathbf{k} .$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Rotações finitas não podem ser tratadas como vetores.

Mas as infinitesimais podem!



$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\Omega}{dt} \right)_{xyz} &= \dot{\omega}_2 \mathbf{i}' + \dot{\omega}_1 \mathbf{j}'' + \omega_2 \mathbf{i}' \times \omega_1 \mathbf{j}'' + \omega_3 \mathbf{k} \times (\omega_2 \mathbf{i}' + \omega_1 \mathbf{j}'') + \dot{\omega}_3 \mathbf{k} \\
 &= \dot{\omega}_2 \mathbf{i}' + \dot{\omega}_1 \mathbf{j}'' + \omega_1 \omega_2 \mathbf{k}'' + \omega_2 \omega_3 \mathbf{j} - \omega_1 \omega_3 \cos \phi \mathbf{i} + \dot{\omega}_3 \mathbf{k} \\
 &= (\dot{\omega}_2 - \omega_1 \omega_3 \cos \phi) \mathbf{i} + (\dot{\omega}_1 \cos \phi + \omega_2 \omega_3 - \omega_1 \omega_2 \sin \phi) \mathbf{j} + (\dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_1 \sin \phi + \omega_1 \omega_2 \cos \phi) \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Posição relativa:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{R} \mathbf{X}$$

Velocidade Relativa:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{X} \quad \text{e} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}^T (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad [\tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}} (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Posição relativa:

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_O + \mathbf{R} \mathbf{X}$$

Velocidade Relativa:

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \mathbf{R}^T (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O) \Rightarrow \dot{\mathbf{x}}_P = \dot{\mathbf{x}}_O + \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \quad [\tilde{\mathbf{w}}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \tilde{\mathbf{w}} (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_O)$$

Aceleração Relativa

$$\ddot{\mathbf{x}}_P = \ddot{\mathbf{x}}_O + \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{X} \quad \ddot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T) - \dot{\mathbf{R}} \dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\tilde{\mathbf{w}}} + \tilde{\mathbf{w}} \tilde{\mathbf{w}}$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 3D

Conclusão:

- A cinemática de partículas (2D e 3D) e a de corpo rígido (2D) são facilmente implementadas
- O formalismo necessário para a cinemática 3D de corpos rígidos é maior
- Muitos softwares podem ser utilizados para essa avaliação (MuJoCo, Adams, SimMechanics, etc.)



EESC • USP

www.eesc.usp.br