Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Mecânica - Cinemática

Parte 2

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
3373-8650

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Sistemas Mecânicos

Três elementos básicos podem ser utilizados para modelar o movimento de corpos rígidos dinamicamente:

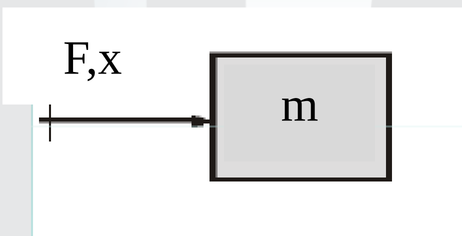
- o elemento **mola**
- o elemento **amortecedor**
- o elemento **inércia**

em suas versões translacionais e rotacionais.

Sistemas Mecânicos

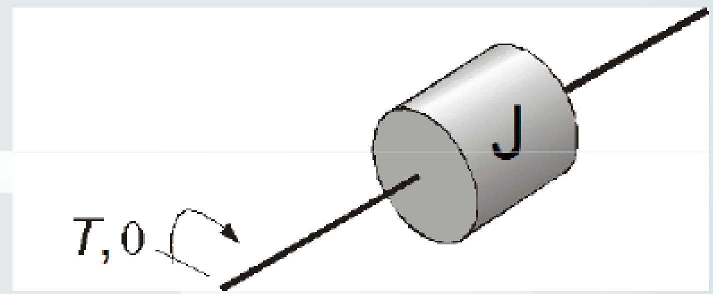
É a medida de resistência de um corpo ao movimento.

Translação



$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

Rotação



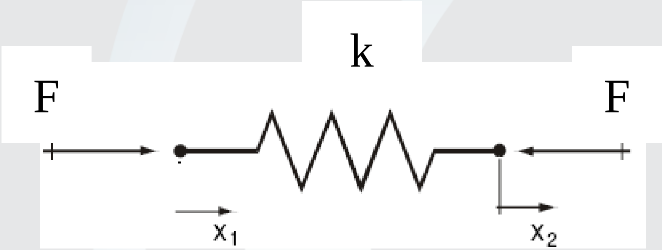
3D

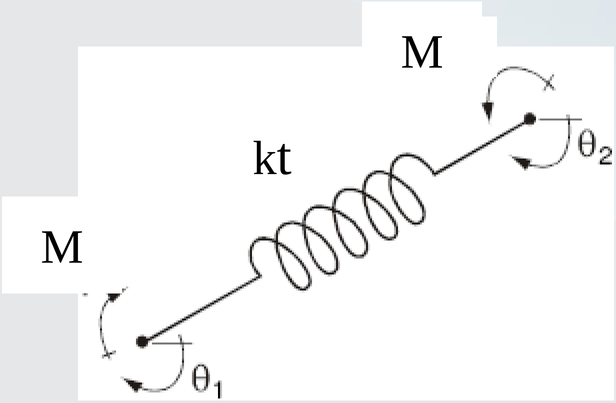
$$T = \frac{J\dot{\theta}^2}{2}$$

$$T = \frac{\dot{\theta}^T J \dot{\theta}}{2}$$

Sistemas Mecânicos

Mola





$$F = k(x_1 - x_2) = kx$$

$$M = k_t(\theta_1 - \theta_2) = k_t\theta$$

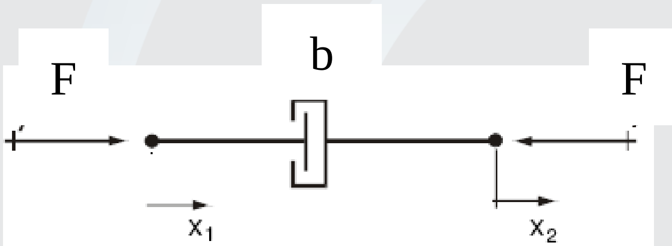
Energia Potencial

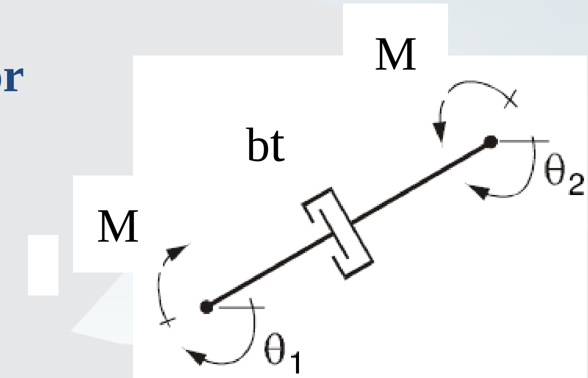
$$V = \frac{kx^2}{2}$$

$$V = \frac{k_t\theta^2}{2}$$

Sistemas Mecânicos

Amortecedor





$$F = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = b\dot{x}$$

$$M = b_t(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = b_t\dot{\theta}$$

Energia Dissipada

$$D = \frac{b\dot{x}^2}{2}$$

$$D = \frac{b_t\dot{\theta}^2}{2}$$

Sistemas Mecânicos

Você pode usar as Equações de Newton-Euler para modelar sistemas mecânicos dinamicamente! Para isso, você precisa para isso conhecer as acelerações do CG.

Leis da Física

Leis de Newton, Equações de Newton-Euler
Princípio do Impulso e da Quantidade de movimento

2D

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum M = J\ddot{\theta}$$

3D

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$
$$\sum F_z = ma_z$$

$$\vec{H} = J\dot{\vec{\theta}}$$

$$\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}}$$

Sistemas Mecânicos

Você pode usar as Equações de Lagrange para modelar sistemas mecânicos dinamicamente! Para isso, você precisa para isso conhecer a velocidade do CG.

Leis da Física

Equações de Lagrange

Princípio do Hamilton para um sistema de coordenadas generalizadas

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i}$$

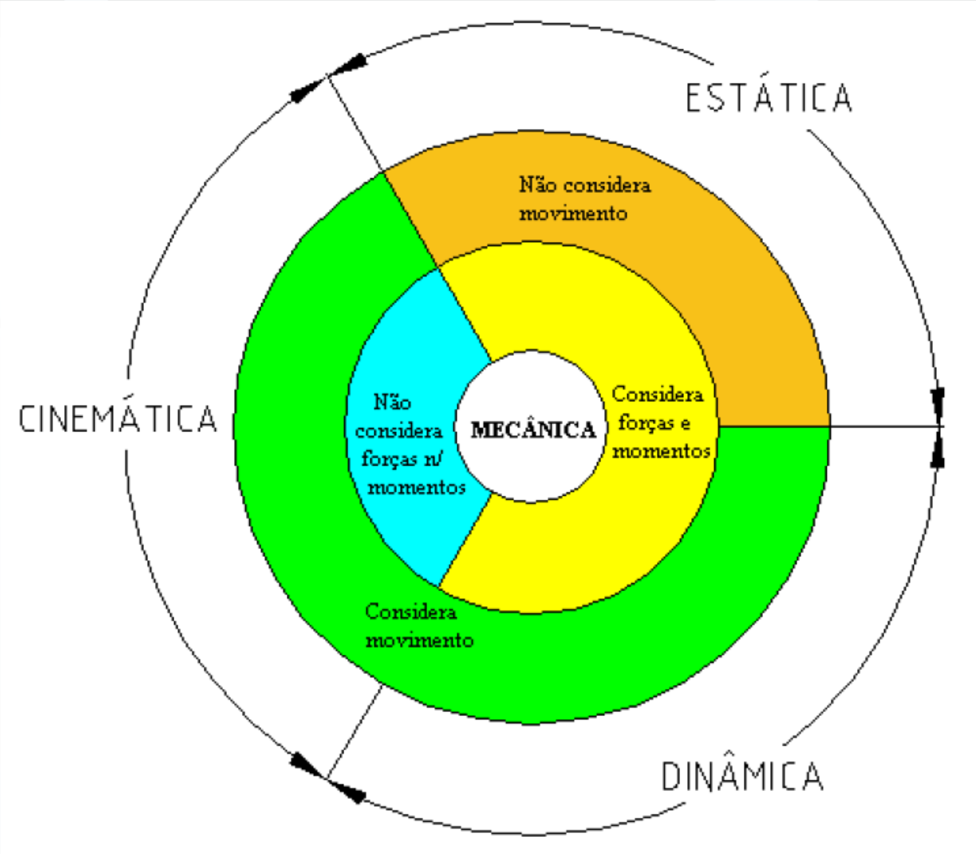
Coordenadas generalizadas: x_i

Lagrangiano: $L = T - V$

Força generalizadas: Q_i $\boxed{\delta W_{NC} = Q_i \delta x_i}$

Cinemática

Relembrar o conteúdo de Cinemática para encontrarmos o modelo dinâmico do sistema.



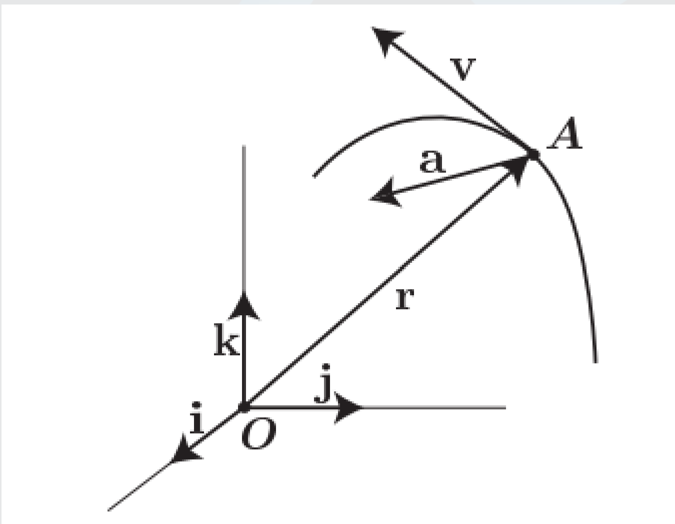
Cinemática

Vamos relembrar nessa aula:

- Equações do Movimento Geral
- Cinemática de Partículas (2D-3D)
  - Coordenadas Cartesianas
  - Coordenadas Tangencial/Normal & Bi-normal
  - Coordenadas Polares & Cilíndricas & Esféricas
- Cinemática Corpos Rígidos (2D)
  - Referencial em translação
  - Referencial em translação e rotação

Ref: Hibbeler, Trindade e http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes/

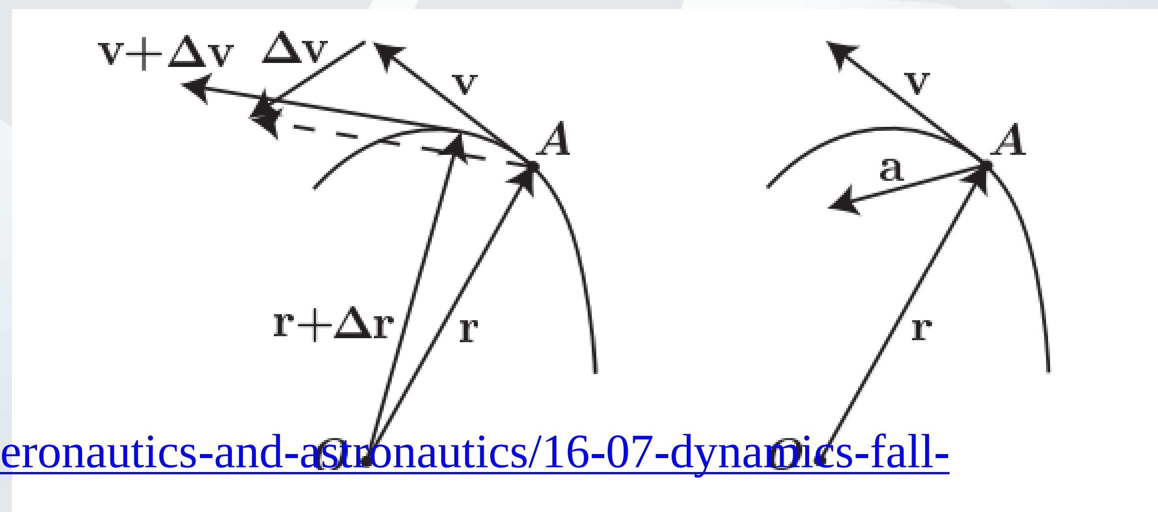
Cinemática de Partículas



Quantos GDL tem uma partícula no espaço?

3GDLs: TX,TY, TZ

A velocidade é sempre tangencial à curva. E a aceleração?

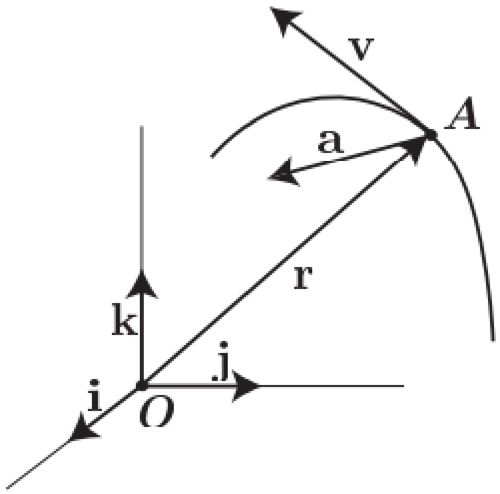


http://ocw.mit.edu/courses/aeronautics-and-astronautics/16-07-dynamics-fall-2009/lecture-notes

Cinemática de Partículas

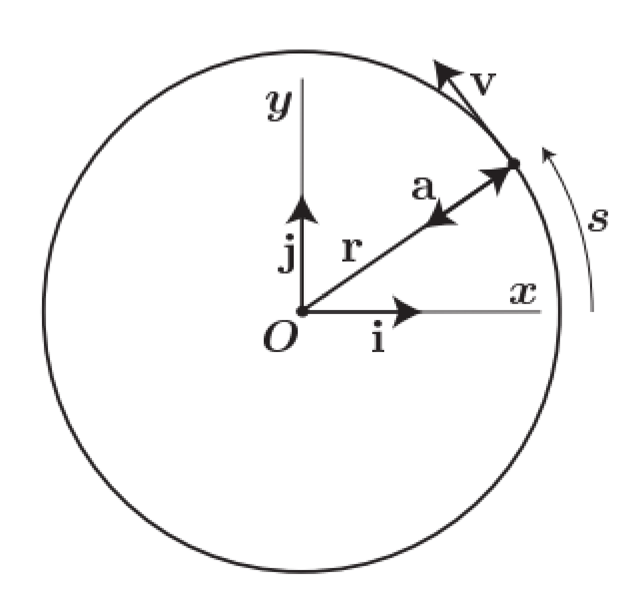
Coordenada Cartesiana:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v}(t) &= v_x(t)\boldsymbol{i} + v_y(t)\boldsymbol{j} + v_z(t)\boldsymbol{k} = \dot{x}(t)\boldsymbol{i} + \dot{y}(t)\boldsymbol{j} + \dot{z}(t)\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{r}}(t) \\
\boldsymbol{a}(t) &= a_x(t)\boldsymbol{i} + a_y(t)\boldsymbol{j} + a_z(t)\boldsymbol{k} = \dot{v}_x(t)\boldsymbol{i} + \dot{v}_y(t)\boldsymbol{j} + \dot{v}_z(t)\boldsymbol{k} = \dot{\boldsymbol{v}}(t)
\end{aligned}
$$



Cinemática de Partículas

Coordenada Cartesiana. Exemplo:



Velocidade constante e raio constante:

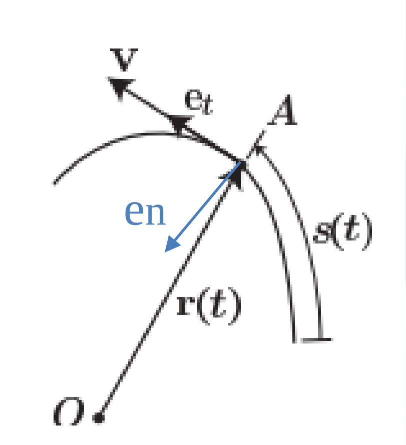
$$\boldsymbol{r}(t) = R\cos(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{i} + R\sin(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{j}\ .$$

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = -v_0\sin(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{i} + v_0\cos(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{j}\ ,$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = -\frac{v_0^2}{R}\cos(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{i} - \frac{v_0^2}{R}\sin(\frac{v_0 t}{R})\boldsymbol{j}\ .$$

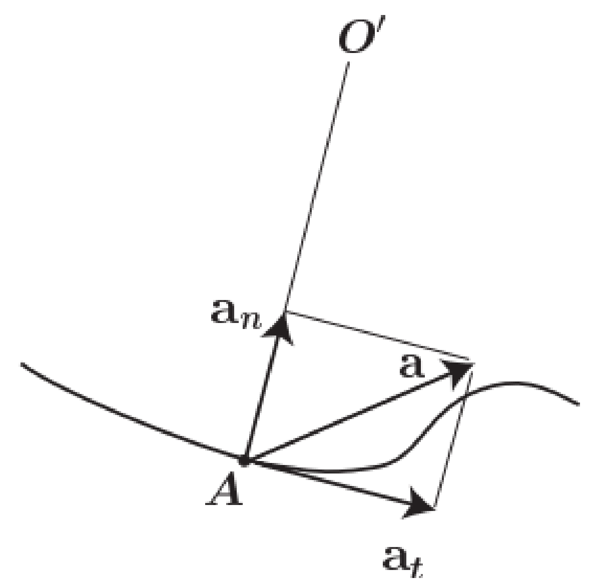
Cinemática de Partículas

Tangencial/Normal



$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t \ ,$$

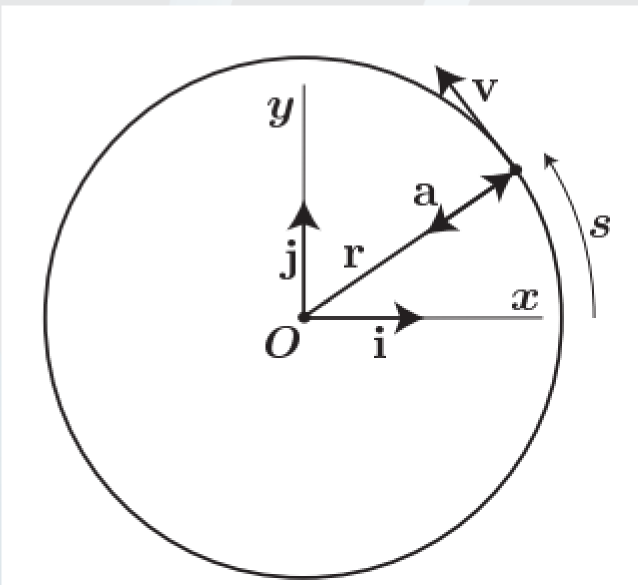
$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n = a_t\boldsymbol{e}_t + a_n\boldsymbol{e}_n \ .$$



Normal para dentro
da curva

Cinemática de Partículas

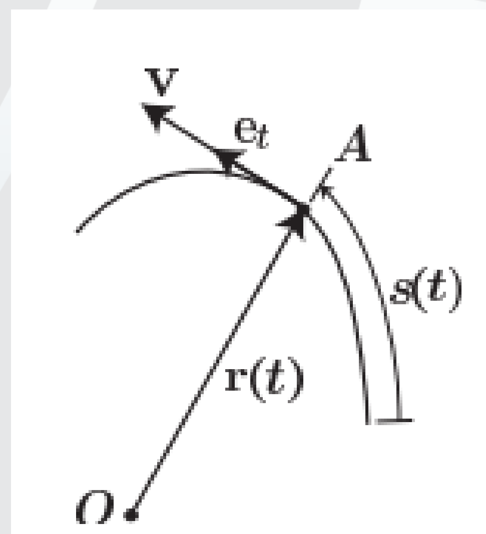
Tangencial/Normal. Exemplo:



Velocidade constante e raio constante:

$$\vec{v}(t) = v\hat{e}_t$$

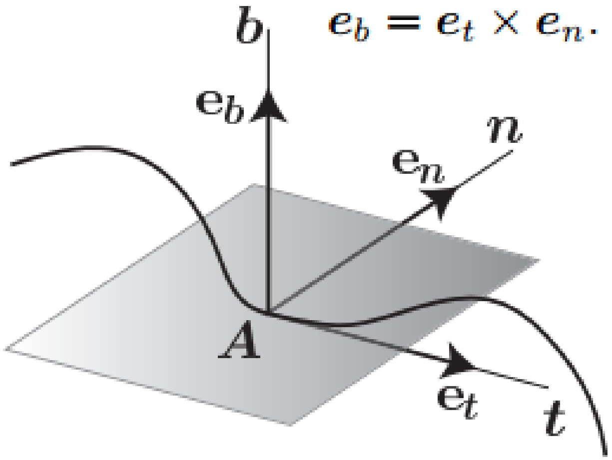
$$\vec{a}(t) = v^2/r\,\hat{e}_n$$



Cinemática de Partículas

Bi-normal (3D)

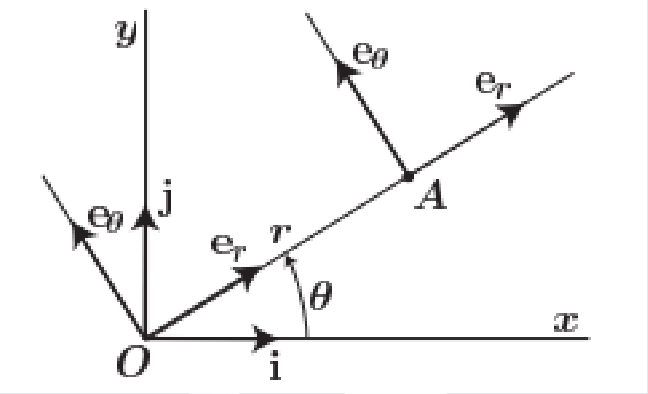
$$\boldsymbol{e}_b = \boldsymbol{e}_t \times \boldsymbol{e}_n .$$



$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v\boldsymbol{e}_t \\ \boldsymbol{a} &= \dot{v}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \ . \end{aligned}$$

Cinemática de Partículas

Polar (2D)



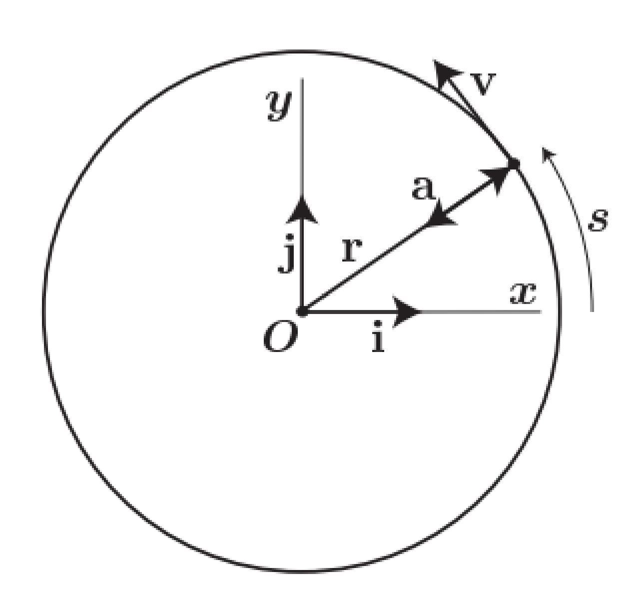
$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r \ .$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta \ .$$

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\boldsymbol{e}_\theta \ ,$$

Cinemática de Partículas

Polar. Exemplo:

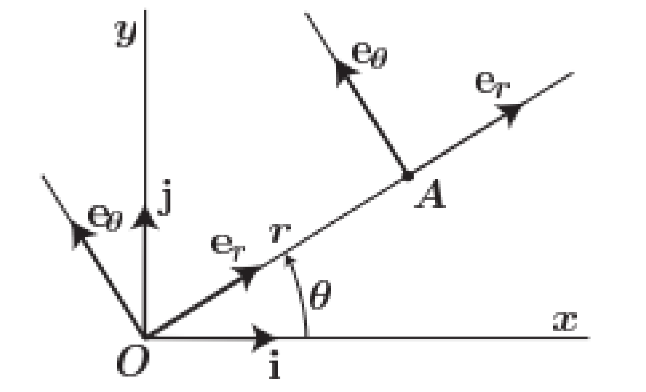


Velocidade constante e raio constante:

$$\vec{r}(t) = r\hat{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

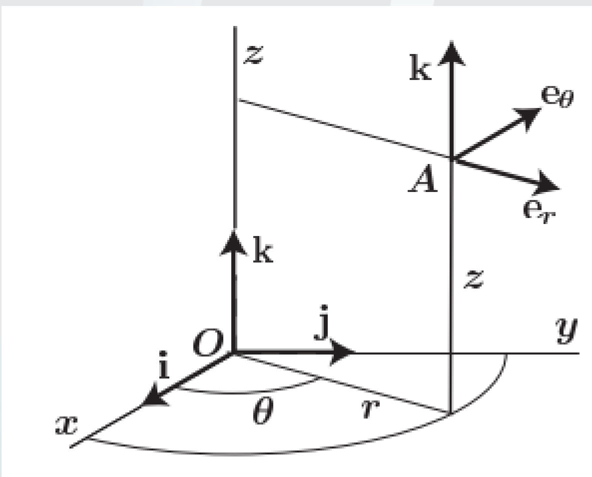
$$\vec{a}(t) = -r\omega^2\hat{e}_r$$



Cinemática de Partículas

Extensão de Coordenada Polar (3D)

Cilíndrica

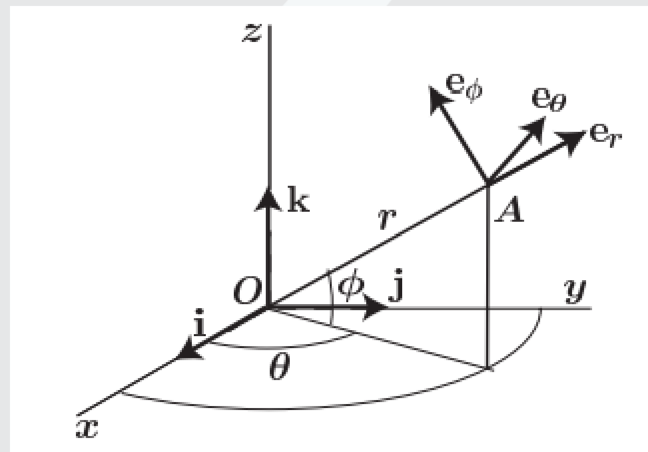


$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r + z\,\boldsymbol{k}\ ,$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \dot{z}\,\boldsymbol{k}\ ,$$

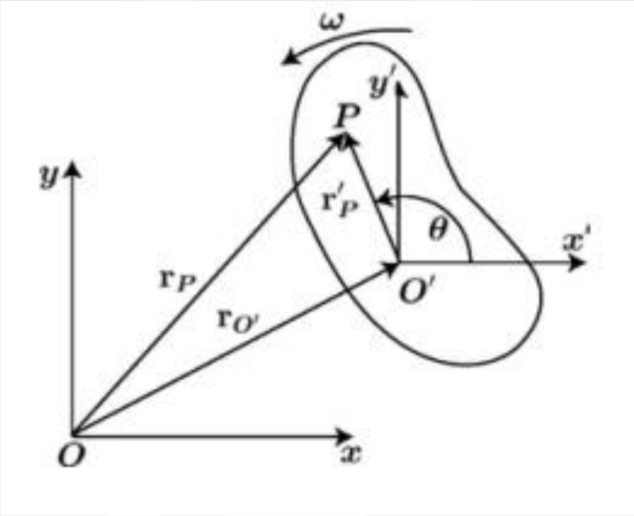
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\boldsymbol{e}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}\ ,$$

Esférica



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\,\boldsymbol{e}_r \\
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\cos\phi\,\boldsymbol{e}_\theta + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\cos^2\phi - r\dot{\phi}^2)\,\boldsymbol{e}_r \\
&+ (2\dot{r}\dot{\theta}\cos\phi + r\ddot{\theta}\cos\phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi)\,\boldsymbol{e}_\theta \\
&+ (2\dot{r}\dot{\phi} + r\dot{\theta}^2\sin\phi\,\cos\phi + r\ddot{\phi})\ \boldsymbol{e}_\phi\ .
\end{aligned}$$

Cinemática de Corpos Rígidos – 2D



Quantos GDL tem um corpo rígido no plano?

3 GDLs: TX,TY, RZ

$$r_P = r_{O'} + r'_P$$

Podemos usar referenciais auxiliares para descrever o movimento.

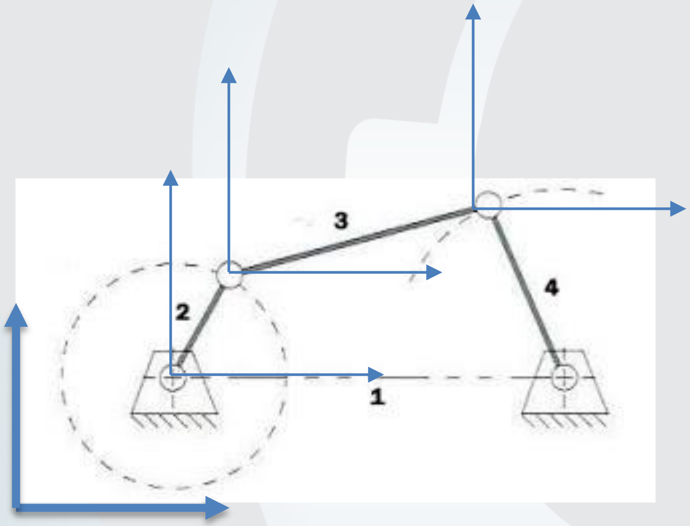
O referencial pode:

- Translação
- Translação + rotação

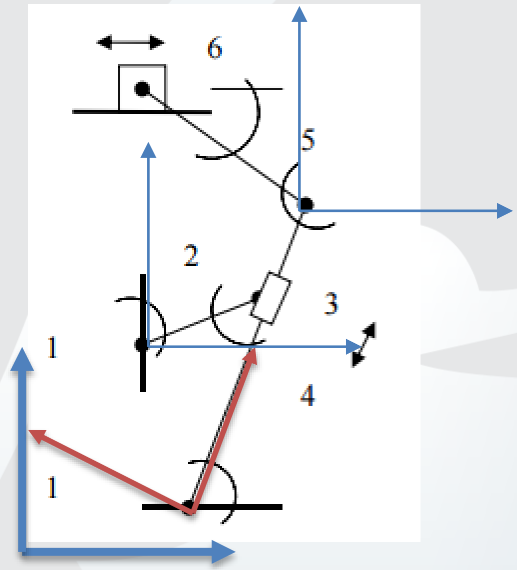
Porque você quer saber a velocidade e a aceleração de um ponto P (ou G)?

Cinemática de Corpos Rígidos – 2D

Ref Translação



Ref Translação/Rotação

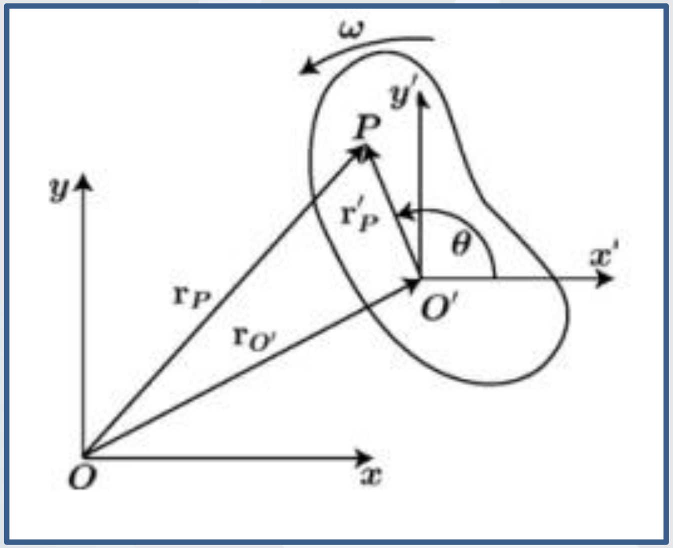


Dica quente: Pontos que pertencem ao mesmo corpo!

Dica quente: Pontos que não pertencem ao mesmo corpo! Escorregamento ...

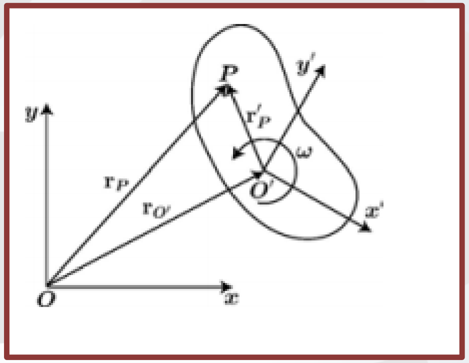
Cinemática de Corpos Rígidos – 2D

Ref Translação



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_P \\
\boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{a}_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_P)\ .
\end{aligned}
$$

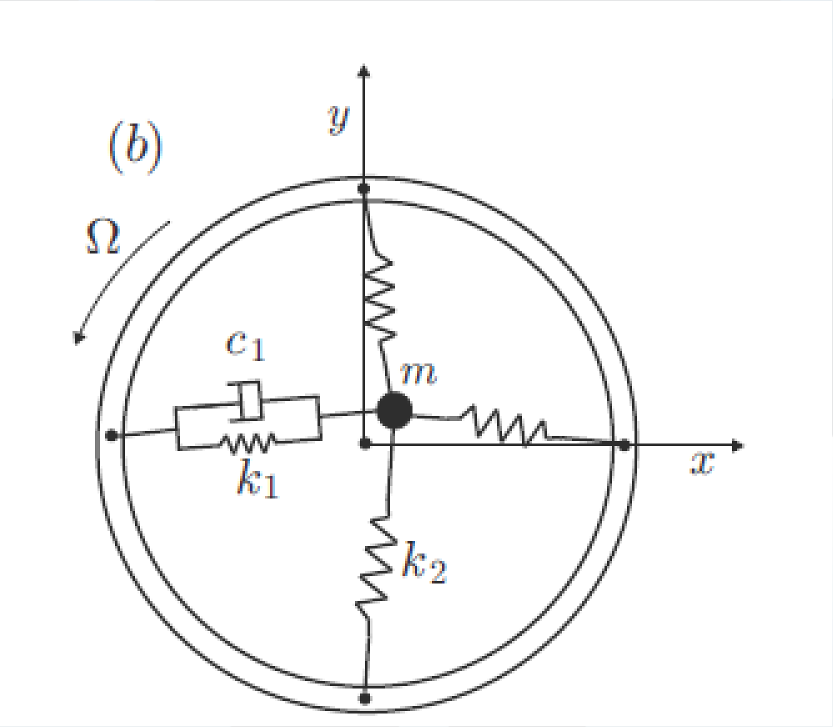
Ref Translação/Rotação



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_P &= \boldsymbol{r}_{O'} + \boldsymbol{r}'_P \\
\boldsymbol{v}_P &= \boldsymbol{v}_{O'} + (\boldsymbol{v}_P)_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_P \\
\boldsymbol{a}_P &= \boldsymbol{a}_{O'} + (\boldsymbol{a}_P)_{O'} + 2\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_P)_{O'} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r}'_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_P)\ .
\end{aligned}
$$

Ex: o curso inteiro de mecanismos

Exercício



EESC • USP

www.eesc.usp.br