Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo

Representação

Parte 1 - Introdução

SEM 0535 – Modelagem e Simulação de Sistemas Dinâmicos II

Profa. Maíra Martins da Silva
mairams@sc.usp.br
3373-8650

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Objetivo

Você usou as Leis da Física e conseguiu equacionar o comportamento dinâmico de um sistema (mecânico, elétrico, térmico, etc.). Quais as maneiras que temos para expressar essas equações?

Vamos considerar modelos lineares e abordagens para linearizações !

Introdução: Definições

Coordenadas Generalizadas: conjunto de coordenadas independentes que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema.

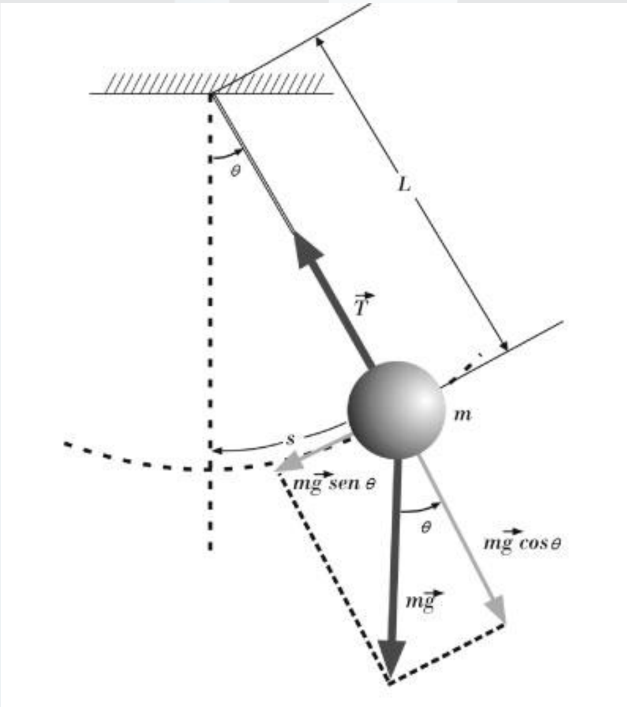


Figura 1 - O pêndulo simples e as forças atuantes consideradas na modelagem simplificada.

http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011

Introdução: Definições

Coordenadas Generalizadas: conjunto de coordenadas independentes que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema.

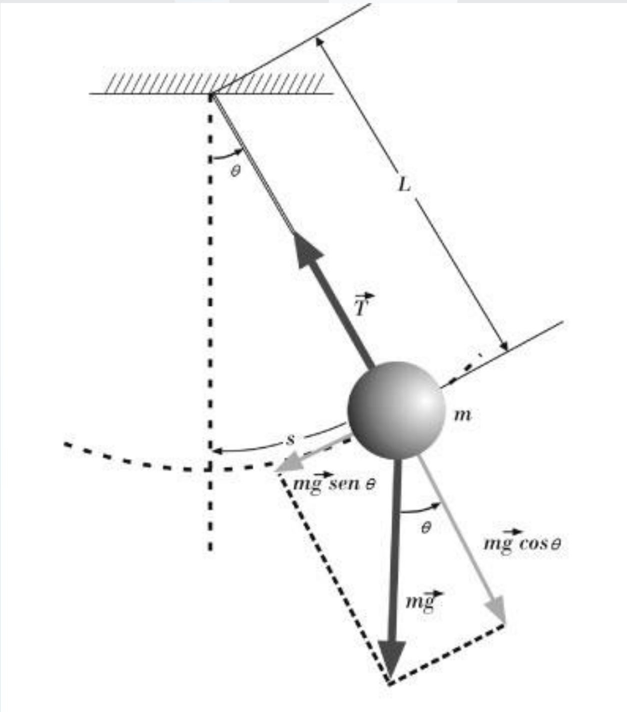


Figura 1 - O pêndulo simples e as forças atuantes consideradas na modelagem simplificada.

Sugestões de coordenadas generalizadas para modelar um pêndulo invertido?

1. Ângulo θ
2. Coordenadas x e y

http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011

Introdução: Definições

Número de Graus de Liberdade: é igual ao mínimo número de coordenadas generalizadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema.

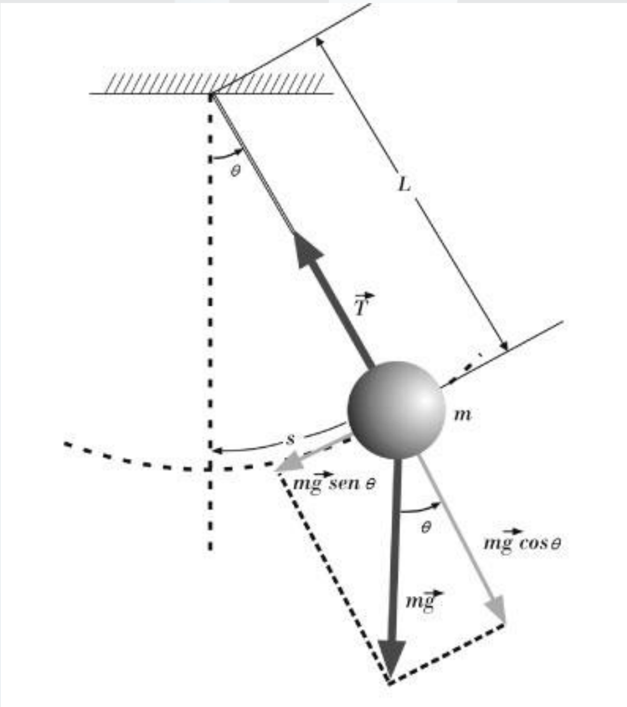


Figura 1 - O pêndulo simples e as forças atuantes consideradas na modelagem simplificada.

Quantos graus de liberdade tem um pêndulo invertido?

1 GDL, podemos escrever x e y em função de θ

http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172011000400011

Introdução: Definições

Número de Graus de Liberdade: é igual ao mínimo número de coordenadas generalizadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema.

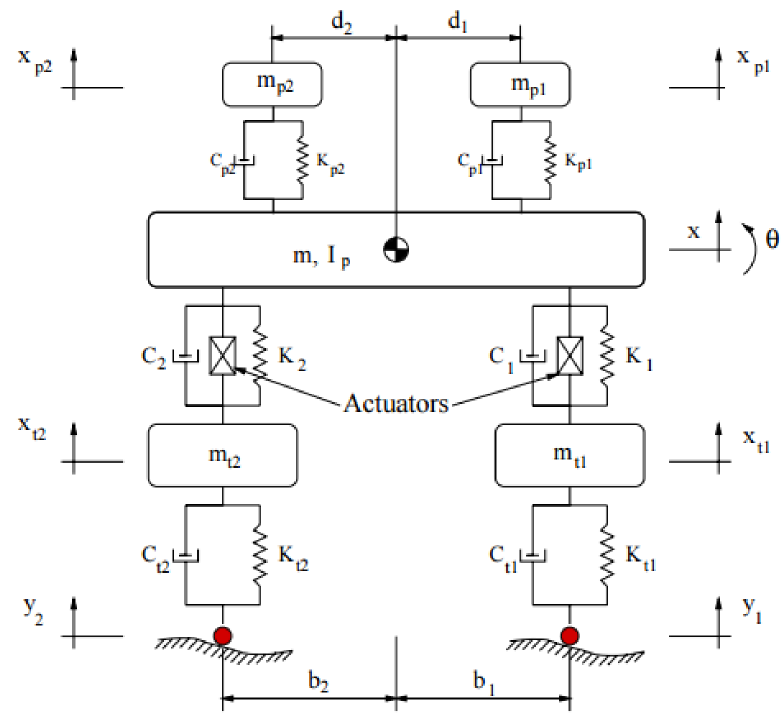


Figure 1: Half-car dynamical model of road–vehicle–passenger with six degrees of freedom.

http://saba.kntu.ac.ir/eecd/aras/papers/J3-JVC-99.pdf

Introdução: Definições

Número de Graus de Liberdade: é igual ao mínimo número de coordenadas generalizadas para descrever o comportamento dinâmico de um sistema.

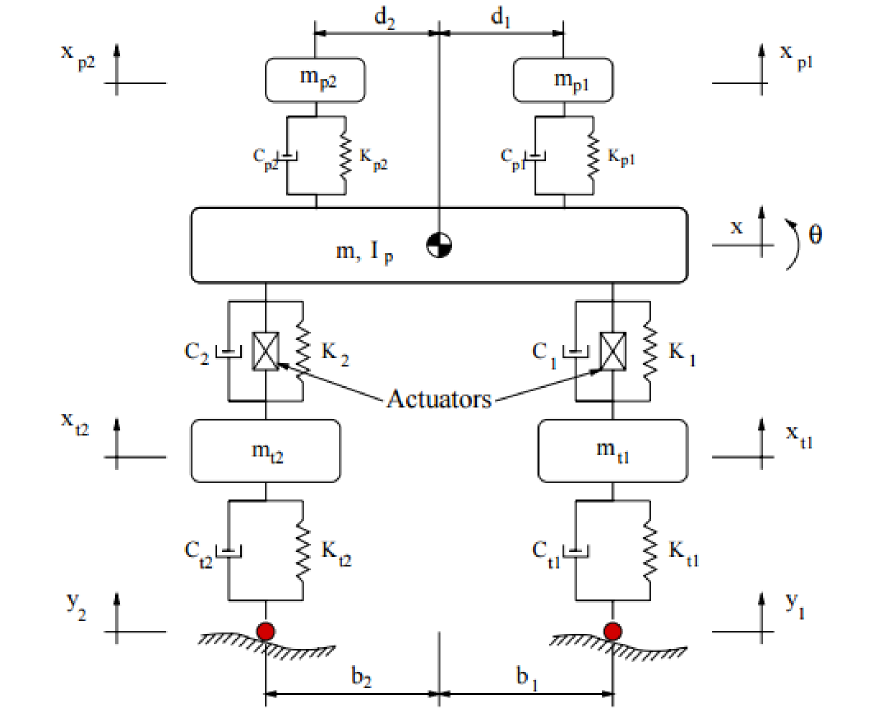


Figure 1: Half-car dynamical model of road–vehicle–passenger with six degrees of freedom.

Quantos graus de liberdade tem o modelo ½ veículo?

6 GDLs

http://saba.kntu.ac.ir/eecd/aras/papers/J3-JVC-99.pdf

Introdução: Representações

Serão introduzidos 4 tipos de representações:

1. Formato Configuração (Configuration Form)
2. Representação no Espaço de Estado (State Space Rep.)
3. Relação Entrada e Saída – Função Transferência
4. Ganho, polos e zeros

Parte do material pode ser encontrado em:
H.V. Vu and R.S. Esfandiari, Dynamic Systems: Modeling and Analysis. Macgraw-hill

Formato Configuração

As n coordenadas generalizadas definem um espaço com dimensão (o espaço de configuração). Para um sistema de n-GDLs as equações que modela esse sistema podem ser descritas por EDOs:

$$\ddot{q}_1 = f_1(q_1, q_2, \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n, t)$$
$$\ddot{q}_2 = f_2(q_1, q_2, \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n, t)$$
$$\dots$$
$$\ddot{q}_n = f_n(q_1, q_2, \dots q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots \dot{q}_n, t)$$

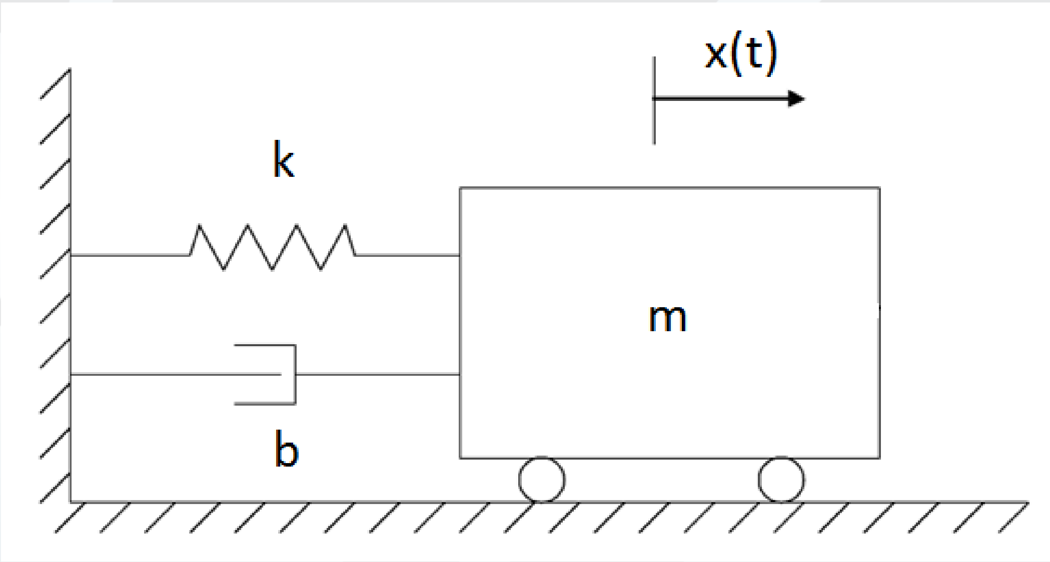
Esse conjunto de equações pode ser não-linear e estarão sujeitas a $2n$ condições iniciais:

$$q_1(0), q_2(0), \dots q_n(0)$$
$$\dot{q}_1(0), \dot{q}_2(0), \dots \dot{q}_n(0)$$

Formato Configuração

Exemplo 1. Sistema mecânico com 1 GDL e as seguintes CIs:

$$x(0) = x_0 \qquad \text{e} \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

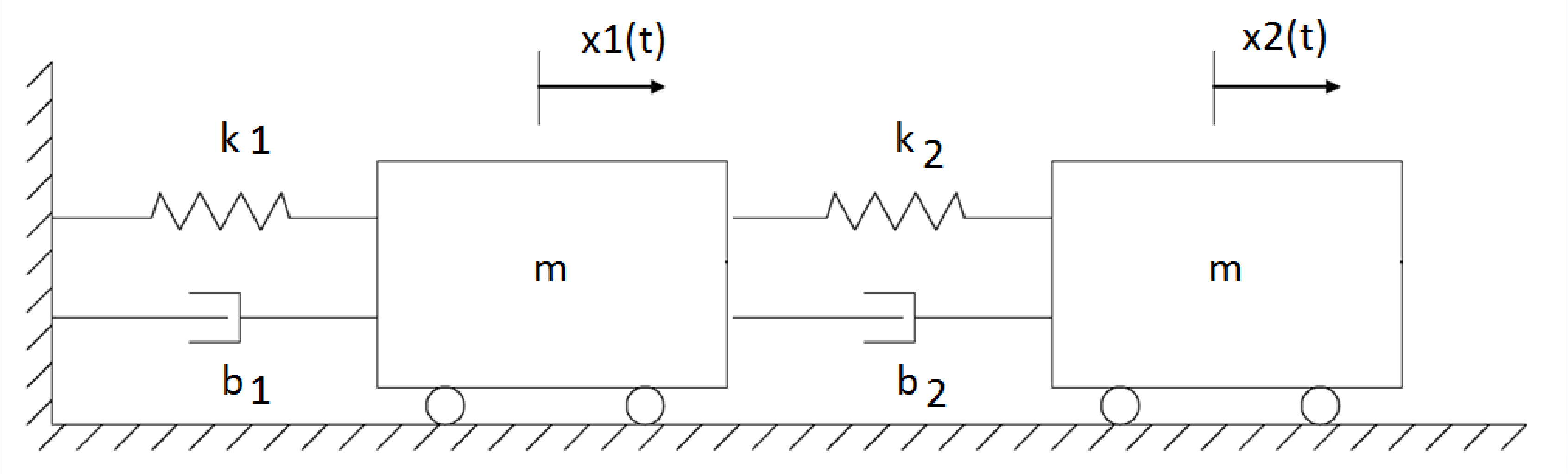


$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \qquad x(0) = x_0 \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Formato Configuração

Exemplo 2. Sistema mecânico com 2 GDLs e as seguintes CIs:

$x_1(0) = x_{10}$ $x_2(0) = x_{20}$ $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}$ $\dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$

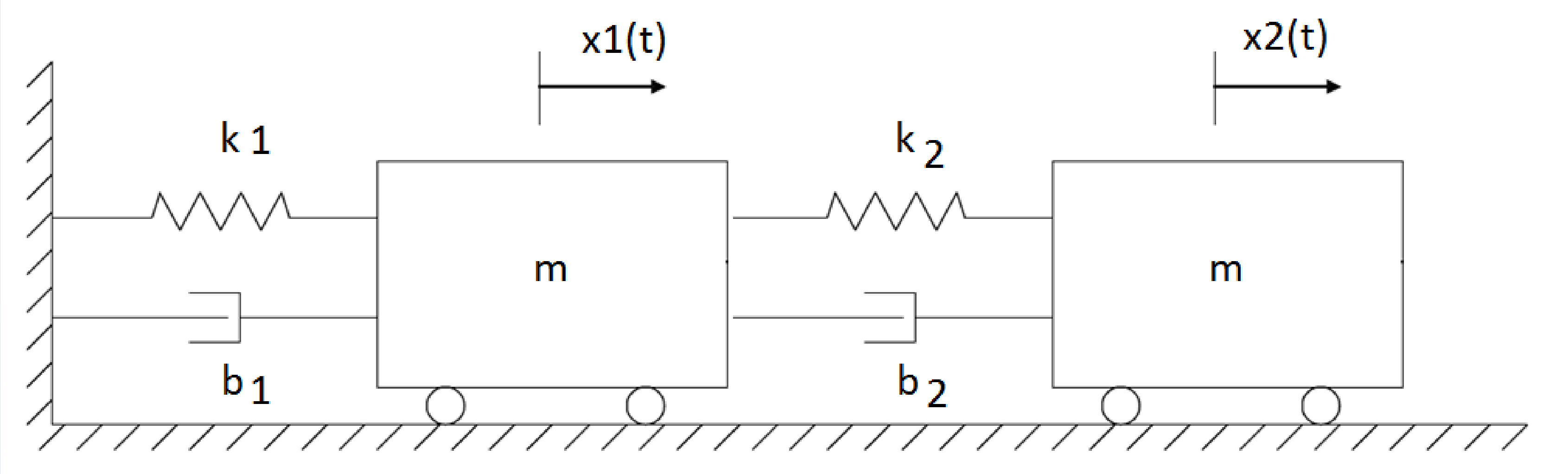


$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 - b_2\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_1x_1 - k_2\,(x_2 - x_1) = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\,(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2\,(x_2 - x_1) = 0$$

Formato Configuração: Matricial

Exemplo 2. Sistema mecânico com 2 GDLs e as seguintes CIs:

$$x_1(0) = x_{10} \qquad x_2(0) = x_{20} \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10} \qquad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Formato Configuração: Matricial

A solução desses problemas de valores inicias podem ser realizado com da Transformada de Laplace

Domínio do tempo

Problema de valor inicial
EDO com CIs - x(t)

x(t)

Transformada de Laplace →

← Transformada de Laplace Inversa

Domínio do frequência complexa ($s = \sigma + i\omega$)

Equação algébrica
X(s)

↓

Rearranjo dos termos
X(s)

A transformação de volta pode ser feita via Método das frações parciais ou Convolução.

Formato Configuração: Matricial

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Transformada de Laplace Inversa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

Formato Configuração: Matricial

Método das Frações Parciais. Exemplo:

$$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 4}$$

E uma entrada $f(t) = e^{-2t}$, cuja Laplace é $F(s) = \dfrac{2}{s+2}$

$$X(s) = \frac{2}{(s+2)(s+4)(s+1)} = \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2/3}{(s+1)} + \frac{1/3}{(s+4)}$$

Aplicando a inversa: $x(t) = -1e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-1t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$

Retirado de A. Siqueira

Formato Configuração: Matricial

Convolução.

Para as funções $f(t)$ e $g(t)$ definidas anteriormente definimos o **produto de convolução**

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Exemplo. Encontrar a inversa de: $\mathrm{H}(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s+1}$

Vamos considerar: $\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s}$ $\mathrm{G}(s) = \frac{1}{s+1}$

Cuja as inversas são: $f(t) = 1$ e $g(t) = e^{-t}$

Assim: $h(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)}d\tau = 1 - e^{-t}$

Formato Configuração: Matricial

Esses dois Teoremas também podem nos ajudar na solução.

Teorema do valor final: se todos os pólos de $sY(s)$ estão no semiplano esquerdo do plano s, então

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Teorema do valor inicial: para qualquer função Y(s)

$$y(0^+) = \lim_{s\to\infty} sY(s)$$

Retirado de A. Siqueira

Formato Configuração: Matricial

Esses métodos resolvem EDOs de maneira analítica.

Podemos resolve-las numericamente?

Sim , usando métodos de integração para EDOs.

Exemplos: Euler, Runge-Kutta.

É Matlabable? SIM! ode45, ode23, e todos os outros ...

Formato Configuração: Matricial

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem.
Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(y(t), t), \qquad \text{with } y(t_0) = y_0$$

$$\boxed{y^*(t_0+h) = y^*(t_0) + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}h = y^*(t_0) + \left(\frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4\right)h}$$

$$k_1 = f(y^*(t_0), t_0)$$

$$k_2 = f\left(y^*(t_0) + k_1\frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(y^*(t_0) + k_2\frac{h}{2}, t_0 + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = f\left(y^*(t_0) + k_3 h, t_0 + h\right)$$

http://lpsa.swarthmore.edu/NumInt/NumIntFourth.html

Formato Configuração: Matricial

Mathematics

- Elementary Math
- Linear Algebra
- Random Number Generation
- Interpolation
- Optimization
- Numerical Integration and Differential Equations
  - Ordinary Differential Equations
    - Functions
      - ode45
      - ode15s
      - ode23
      - ode113
      - ode23t
      - ode23tb
      - ode23s
      - ode15i
      - decic
      - odextend
      - odeget
      - odeset
      - deval

ode45

Solve nonstiff differential equations; medium order method

Syntax

```
[T,Y] = solver(odefun,tspan,y0)
[T,Y] = solver(odefun,tspan,y0,options)
[T,Y,TE,YE,IE] = solver(odefun,tspan,y0,options)
sol = solver(odefun,[t0 tf],y0...)
```

This page contains an overview of the solver functions: `ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t`, and
`solver`, with any of the function names.

Arguments

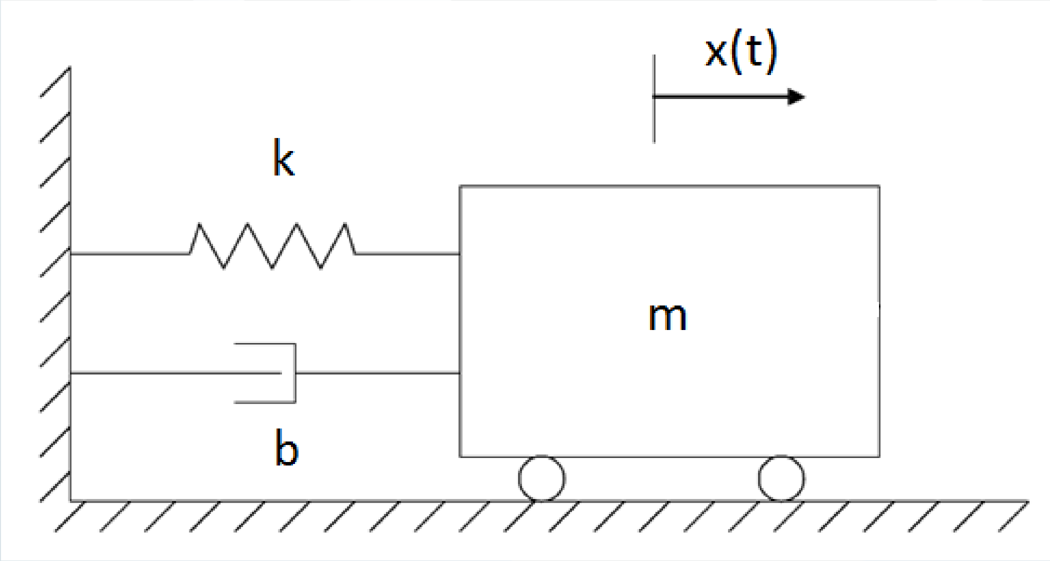
The following table describes the input arguments to the solvers.

`odefun`	A function handle that evaluates the right side of t y' = f(t,y) or problems that involve a mass matrix, M mass matrices. `ode15s` and `ode23t` can solve pr equations (DAEs).
`tspan`	A vector specifying the interval of integration, `[t0,` from `tspan(1)` to `tspan(end)`. To obtain solutio

Formato Configuração: Matricial

O Runge-Kutta pode resolver EDOs de mais de uma ordem.
Mas algumas implementações pedem 1º. Ordem.

E agora? Como integrar numericamente o nosso problema mais simples?



$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Representação no Espaço de Estado

Definição: O menor conjunto possível de variáveis que descrevem completamente um sistema é chamado de conjunto de variáveis de estado. Elas devem ser independentes e o conjunto pode não ser único.

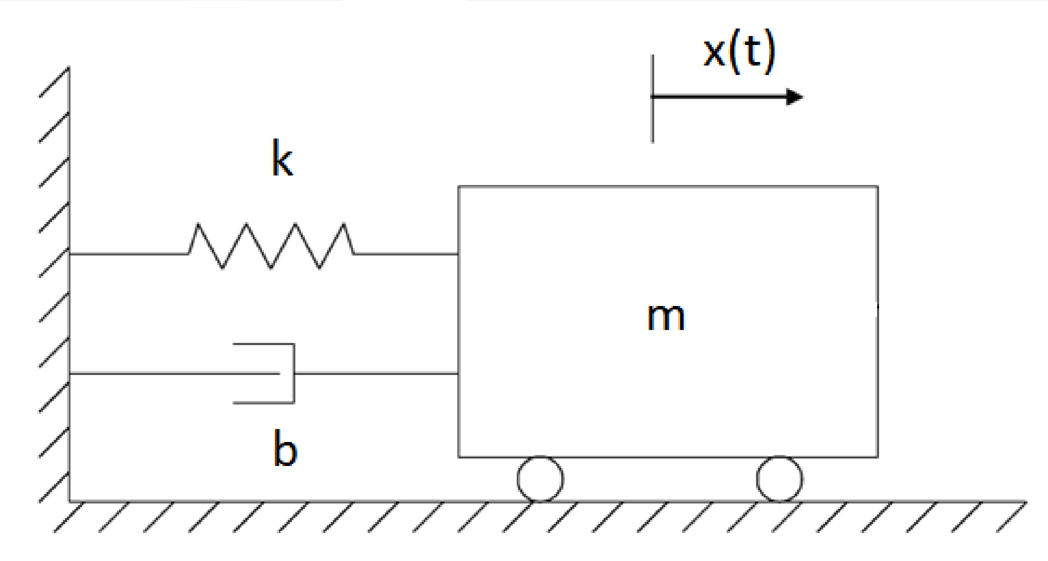
Objetivo: Descrever um sistema de equações de ordem superior com um conjunto de EDOs de primeira ordem.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t)$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots x_n, u_1, \ldots u_m, t)$$

Representação no Espaço de Estado

Quais os estados de um sistema em todos os instantes?

Exemplo.



$$\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

Preciso saber a posição e a velocidade para calcular o próximo instante. Assim, nesse exemplo precisamos conhecer 2 estados.

Representação no Espaço de Estado

Formulação Geral: *n* variáveis, *m* entradas, *n* saídas

Equações das variáveis no espaço de estado

$$\dot{x_1} = f_1(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dot{x_2} = f_2(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dots$$
$$\dot{x_n} = f_n(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$

Equações de saída

$$y_1 = h_1(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$y_2 = h_2(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$
$$\dots$$
$$y_p = h_n(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)$$

Representação no Espaço de Estado

Formulação Geral: *n* variáveis, *m* entradas, *p* saídas

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

x: estado

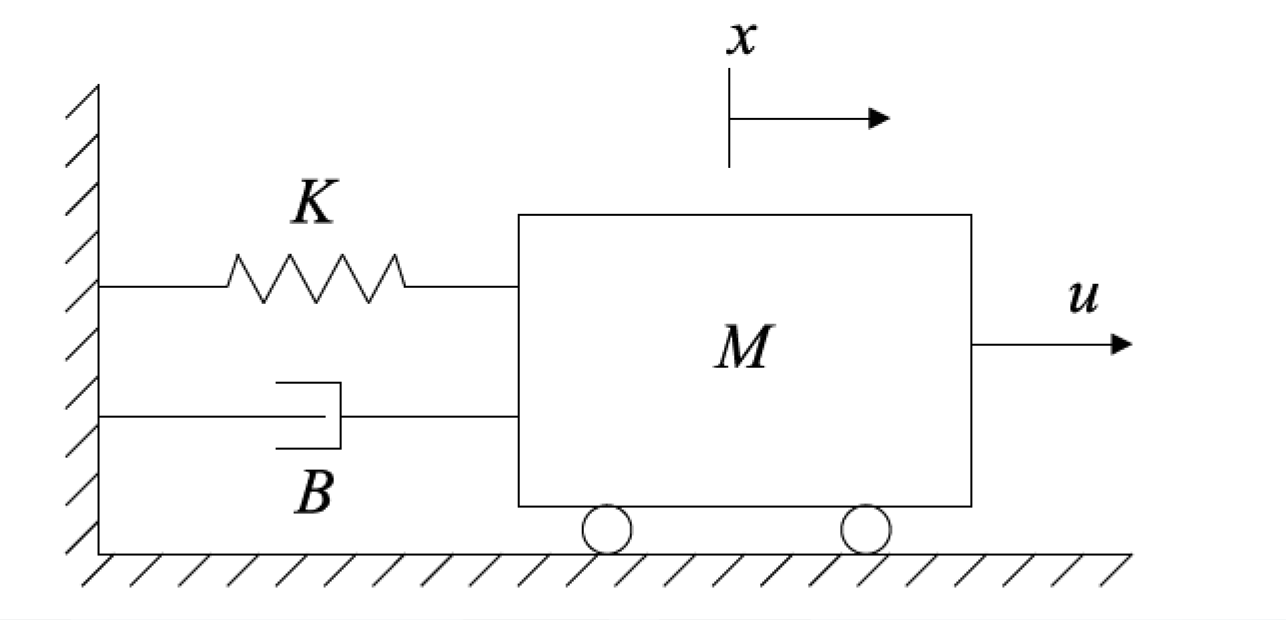
u: entrada

y: saída

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 1.

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u$$



Retirado de A. Siqueira

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 1.

Sistema
$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = u$$
$$y = x$$

Define-se as variáveis do estado
$$x_1 = x$$
$$x_2 = \dot{x}$$

Tem-se
$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{B}{M}x_2 - \frac{K}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

Retirado de A. Siqueira

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 1.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Retirado de A. Siqueira

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 1.

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$
$$y = C\mathbf{x} + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

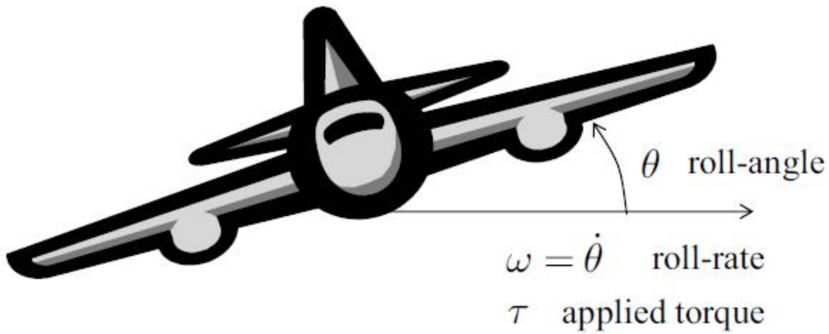
Sistemas de Co

Retirado de A. Siqueira

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 2.

Example 1 (Aircraft roll-dynamics). Figure 1.2 shows the roll-angle dynamics of an aircraft [2, p. 381]. Defining



$$\dot{\theta} = \omega$$
$$\dot{\omega} = -.875\omega - 20\tau$$
$$\dot{\tau} = -50\tau + 50u$$

Figure 1.2. Aircraft roll-angle dynamics

$$x := \begin{bmatrix} \theta & \omega & \tau \end{bmatrix}'$$

João P. Hespanha, Undergraduate Lecture Notes on LQG/LQR controller design

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 2.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -.875 & -20 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

If we have both θ and ω available for control, we can define

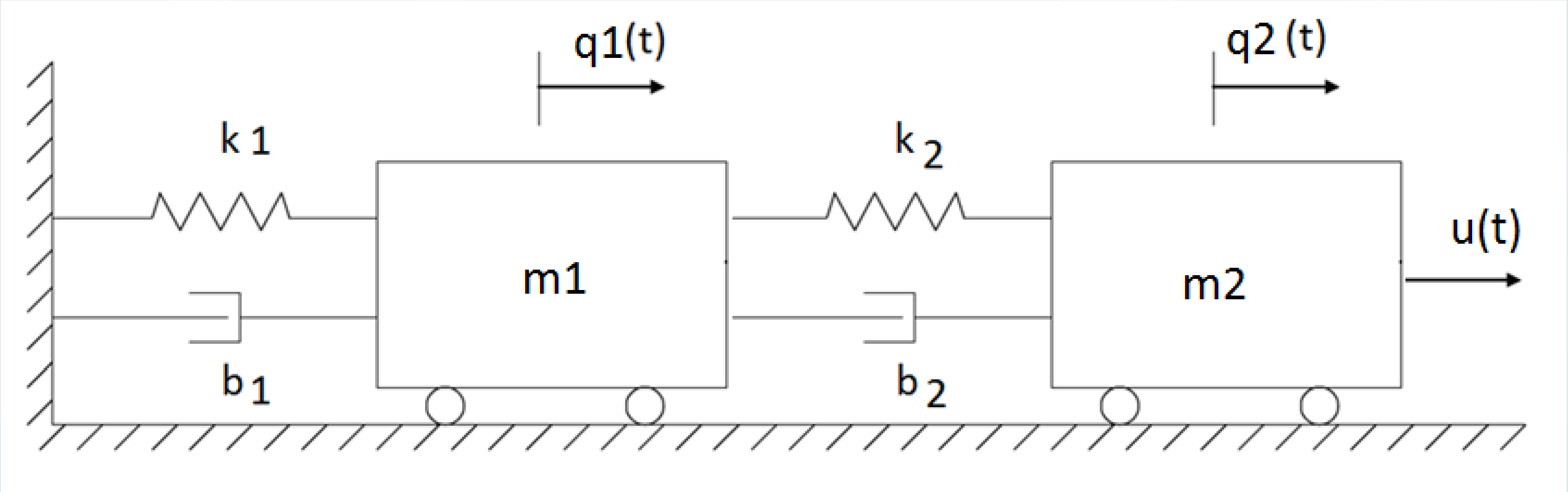
$$y := \begin{bmatrix} \theta & \omega \end{bmatrix}' = Cx + Du$$

with

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 3.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 3.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Estados:

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ x_2 &= q_2 \\ x_3 &= \dot{q}_1 \\ x_4 &= \dot{q}_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{q}_1 \\ \dot{x}_2 &= \dot{q}_2 \\ \dot{x}_3 &= \ddot{q}_1 \\ \dot{x}_4 &= \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 3.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Equação de Estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(k_1+k_2)/m_1 & +k_2/m_1 & -(b_1+b_2)/m_1 & +b_2/m_1 \\ +k_2/m_2 & -k_2/m_2 & +b_2/m_2 & -b_2/m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u$$

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 3.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Equação de Estados:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2x2} & \boldsymbol{I}_{2x2} \\ -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u$$

Para essa organização das variáveis de estado!

Representação no Espaço de Estado

Exemplo 3.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Equação de Saída:

$$\mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} u$$

ABCD ideal para sistemas MIMO !

Representação no Espaço de Estado

Resolvendo a Equação de Estados no tempo.

$$\dot{x} = ax \qquad (9.32)$$

Considerando a transformada de Laplace da Equação 9.32, obtemos:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) \qquad (9.33)$$

onde $X(s) = \mathcal{L}[x]$. Resolvendo a Equação 9.33 para $X(s)$, temos:

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} = (s-a)^{-1}x(0)$$

A transformada inversa de Laplace dessa última equação fornece a solução:

$$x(t) = e^{at}x(0)$$

Retirado de Ogata

Representação no Espaço de Estado

Resolvendo a Equação de Estados no tempo.

A abordagem precedente para a solução da equação diferencial escalar homogênea pode ser estendida para a equação de estado homogênea:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{9.34}$$

Considerando a transformada de Laplace dos dois lados da Equação 9.34, obtemos:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s)$$

onde $\mathbf{X}(s) = \mathscr{L}[\mathbf{x}]$. Portanto,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0)$$

Pré-multiplicando ambos os lados dessa última equação por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtemos:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)$$

Retirado de Ogata

Representação no Espaço de Estado

Resolvendo a Equação de Estados no tempo.

A transformada inversa de Laplace de $\mathbf{X}(s)$ fornece a solução $\mathbf{x}(t)$ Então,

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]\mathbf{x}(0) \tag{9.35}$$

Note que

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{I}}{s} + \frac{\mathbf{A}}{s^2} + \frac{\mathbf{A}^2}{s^3} + \cdots$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ fornece:

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots = e^{\mathbf{A}t} \tag{9.36}$$

(A transformada inversa de Laplace de uma matriz é a matriz obtida pela transformada inversa de Laplace de todos os seus elementos.) A partir das equações 9.35 e 9.36, a solução da Equação 9.34 é obtida como:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)$$

A importância da Equação 9.36 está no fato de que ela fornece um meio conveniente para a determinação da solução da matriz exponencial na forma fechada.

Retirado de Ogata

Representação no Espaço de Estado

Resolvendo a Equação de Estados no tempo.

Abordagem pela transformada de Laplace na solução das equações de estado não homogêneas. A solução da equação de estado não homogênea

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

também pode ser obtida por meio da abordagem pela transformada de Laplace. A transformada de Laplace dessa última equação resulta em:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{Ax}(s) + \mathbf{BU}(s)$$

ou

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{BU}(s)$$

Pré-multiplicando ambos os lados dessa última equação por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, obtemos:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{BU}(s)$$

Utilizando a relação dada pela Equação 9.36, temos:

$$\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{x}(0) + \mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}]\mathbf{BU}(s)$$

A transformada inversa de Laplace dessa última equação pode ser obtida pelo uso da integral de convolução, como segue:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

Ogat

Representação no Espaço de Estado

Sistemas no Espaço de Estados

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t) \\
\dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t) \\
&\dots \\
\dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots x_n, u_1, \dots u_m, t)
\end{aligned}
$$

Posso usar Runge-Kutta!!

Função Transferência

Função Transferência

- Sejam a entrada $x_i(t)$ e a saída $x_o(t)$, cujas TL são:

$$L\{x_o(t)\} = X_o(s)$$

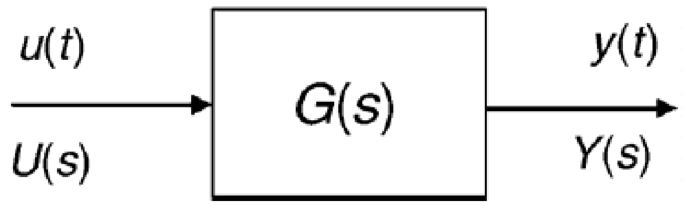
$$L\{x_i(t)\} = X_i(s)$$

- A Função Transferência é dada pela relação:

$$\boxed{FT = \frac{L\{saida\}}{L\{entrada\}} = \frac{X_o}{X_i}(s)}$$

Retirado de A. Costa Neto

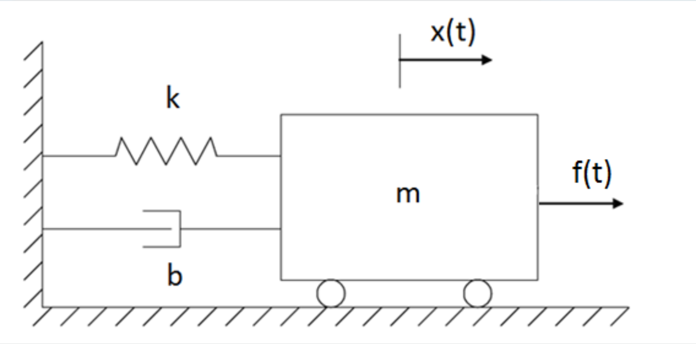
Função Transferência



G(s): função de transferência
no domínio de Laplace

Função Transferência

Considere o sistema



Usando a 2º. Lei de Newton, podemos encontrar a Equação de Movimento (EDO):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \mathrm{f}$$

Fazendo a transformação de Laplace e as condições iniciais:

$$m(s^2X(s) - sx_0 - \dot{x}_0) + b(sX(s) - x_0) + kX(s) = \mathrm{F(s)}$$

Função Transferência

Considerando as condições iniciais NULAS:

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = \mathrm{F(s)}$$

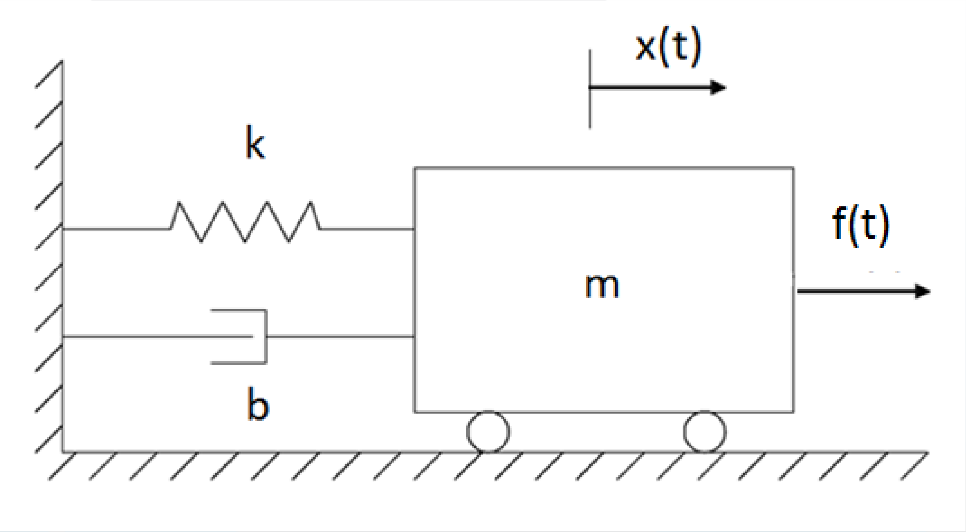
Relação Saída/Entrada (função Transferência):

$$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Função Transferência

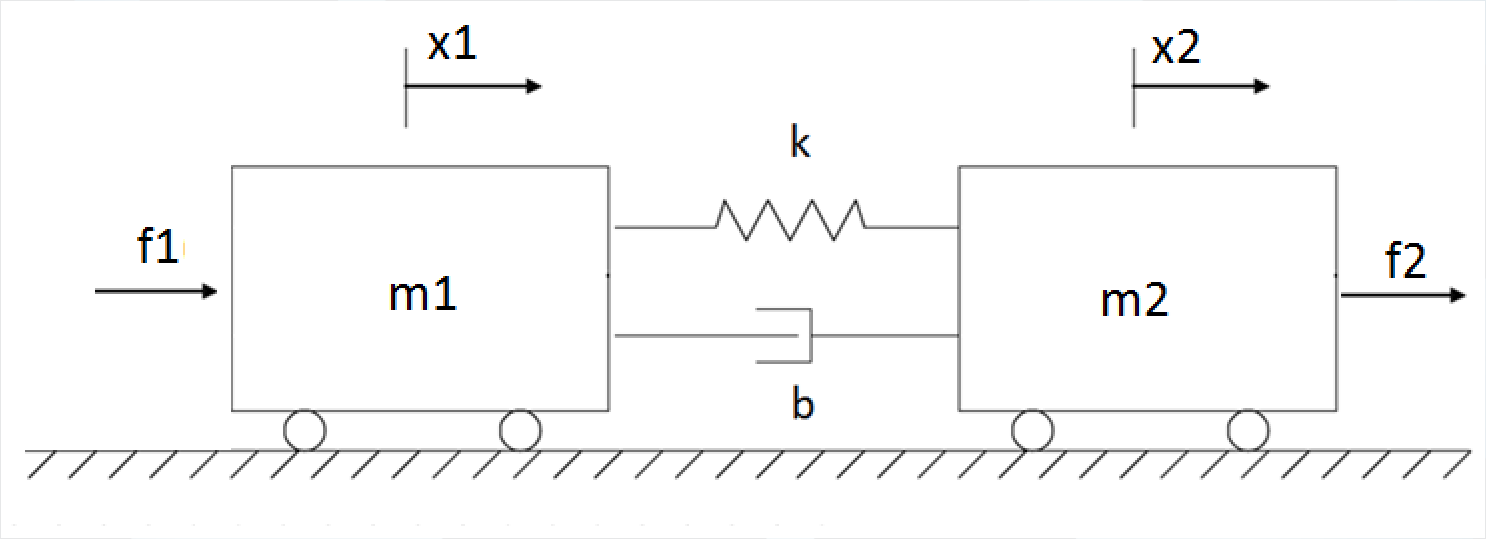
E se eu quiser a FT da Velocidade/Força?

$$G_v(s) = \frac{sX}{F}(s) = \frac{s}{ms^2 + bs + k}$$



Função Transferência

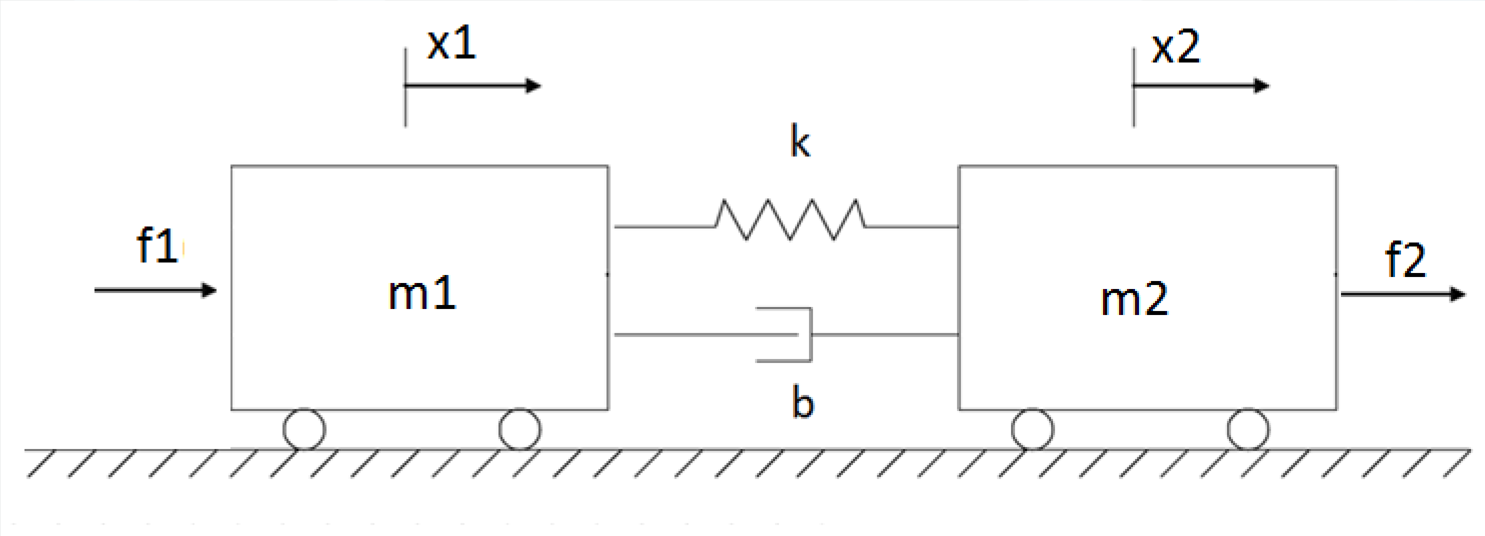
Regra de Cramer. Considere o sistema.



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b & -b \\ -b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

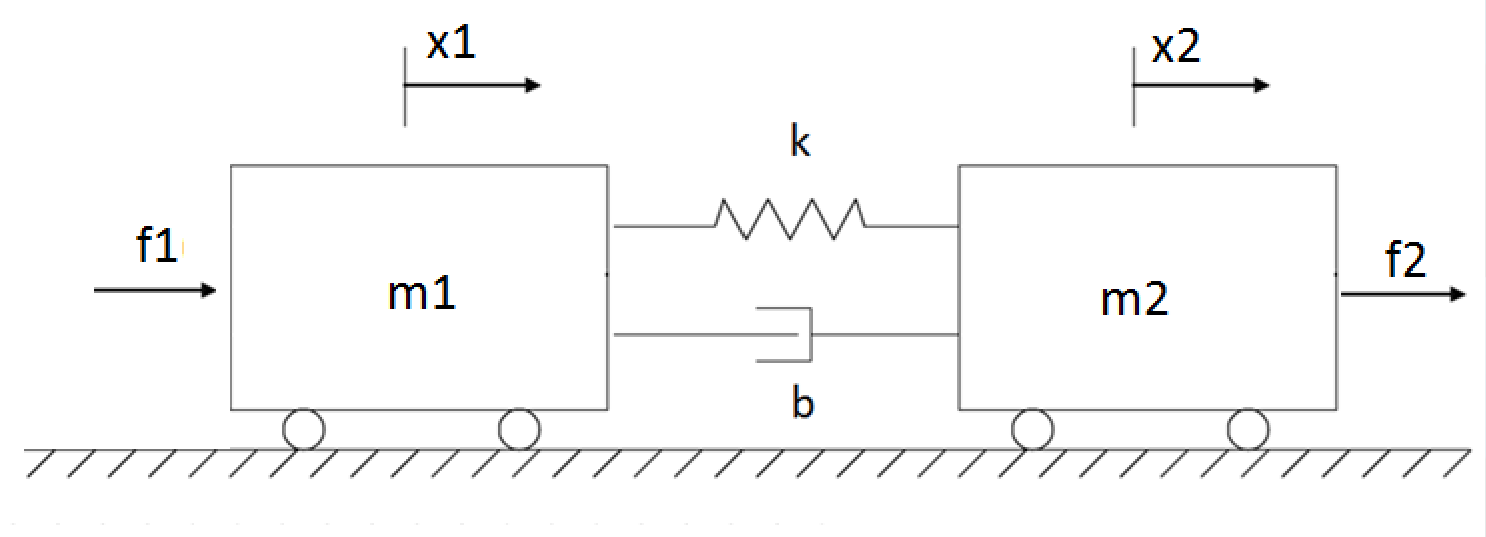
Regra de Cramer. Considere o sistema. Usando Laplace.



$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Usando Laplace.



$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\begin{bmatrix} m_1s^2+bs+k & -bs-k \\ -bs-k & m_2s^2+bs+k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} F_1 & -bs-k \\ F_2 & m_2s^2+bs+k \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} m_1s^2+bs+k & -bs-k \\ -bs-k & m_2s^2+bs+k \end{vmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\Delta(s) = (m_1 s^2 + bs + k)(m_2 s^2 + bs + k) - (bs + k)^2$$

$$X_1(s) = \frac{m_2 s^2 + bs + k}{\Delta(s)} F_1(s) + \frac{bs + k}{\Delta(s)} F_2(s)$$

$$G_{11}(s) = \left.\frac{X_1(s)}{F_1(s)}\right|_{F_2(s)\ =0_1} = \frac{m_2 s^2 + bs + k}{\Delta(s)}$$

$$G_{12}(s) = \left.\frac{X_1(s)}{F_2(s)}\right|_{F_1(s)\ =0_1} = \frac{bs + k}{\Delta(s)}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\begin{bmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$X_2(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{vmatrix} m_1 s^2 + bs + k & F_1 \\ -bs - k & F_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} m_1 s^2 + bs + k & -bs - k \\ -bs - k & m_2 s^2 + bs + k \end{vmatrix}$$

Função Transferência

Regra de Cramer. Considere o sistema. Isolando os Xs.

$$\Delta(s) = (m_1 s^2 + bs + k)(m_2 s^2 + bs + k) - (bs + k)^2$$

$$X_2(s) = \frac{bs + k}{\Delta(s)} F_1(s) + \frac{m_1 s^2 + bs + k}{\Delta(s)} F_2(s)$$

$$G_{21}(s) = \left.\frac{X_2(s)}{F_1(s)}\right|_{F_2(s)\ =0_1} = \frac{bs + k}{\Delta(s)}$$

$$G_{22}(s) = \left.\frac{X_2(s)}{F_2(s)}\right|_{F_1(s)\ =0_1} = \frac{m_1 s^2 + bs + k}{\Delta(s)}$$

Função Transferência

Para sistemas MIMO com *n* variáveis, *m* entradas, *p* saídas, precisamos de *m*X*p* Funções transferências. A melhor representação para sistemas MIMO é a no espaço de estados.

FT - SS

Relação entre a representação em espaço de estados e a função transferência:

The *transfer-function* of this system can be found by taking Laplace transforms of (1.2):

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du, \end{cases} \xrightarrow{\quad \mathcal{L} \quad} \begin{cases} sX(s) &= AX(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{cases}$$

where $X(s)$, $U(s)$, and $Y(s)$ denote the Laplace transforms of $x(t)$, $u(t)$, and $y(t)$. Solving for $X(s)$, we get

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad \Leftrightarrow \quad X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Retirado de Ogata

FT - SS

Relação entre a representação em espaço de estados e a função transferência:

and therefore

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = \big(C(sI - A)^{-1}B + D\big)U(s).$$

Defining

$$T(s) := C(sI - A)^{-1}B + D,$$

we conclude that

$$Y(s) = T(s)U(s).$$

Retirado de Ogata

FT - SS

Exemplo. Avião.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -.875 & -20 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

If we have both θ and ω available for control, we can define

$$y := [\theta \quad \omega]' = Cx + Du$$

with

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Example 2 (Aircraft roll-dynamics). The transfer-function for the state-space model in Example 1 is given by:

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{-1000}{s(s+.875)(s+50)} \\ \frac{-1000}{(s+.875)(s+50)} \end{bmatrix}$$

□

Polos e Zeros

$$G(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \ldots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$G(s) = K \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

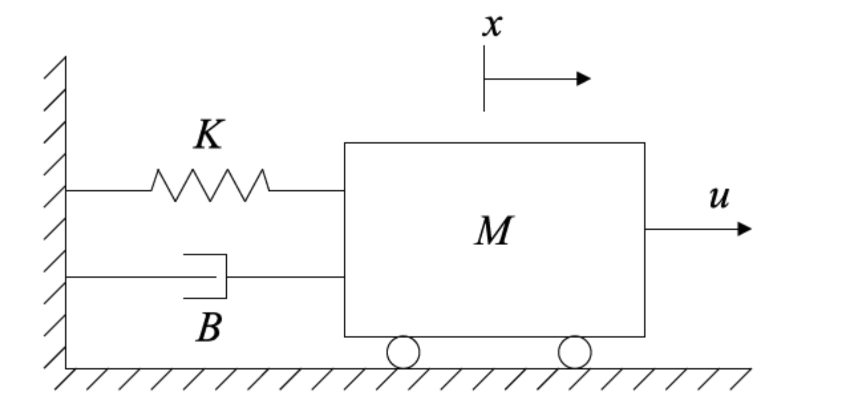
z_i: zeros de $G(s)$

p_i: pólos de $G(s)$

Retirado de A. Siqueira

Polos e Zeros

Exemplo.

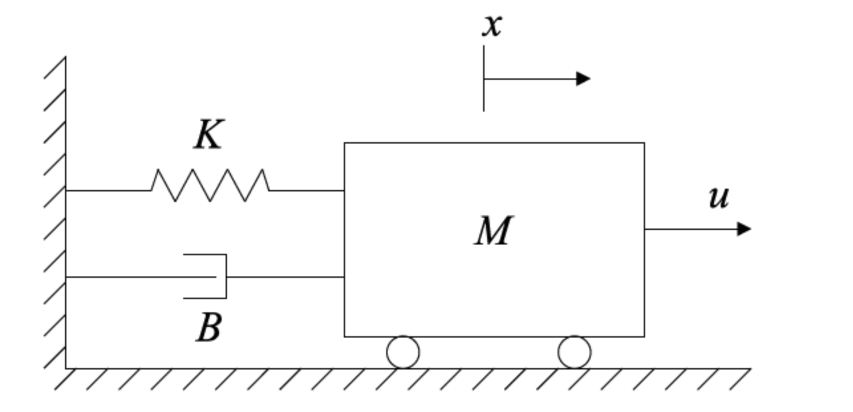


FT. $$G(s) = \frac{X}{F}(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Polos $$ms^2 + bs + k=0 \Rightarrow p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Polos e Zeros

Exemplo.



SS. $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

Polos. Autovalores de A $$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -k/m & -\dfrac{b}{m}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1, p_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

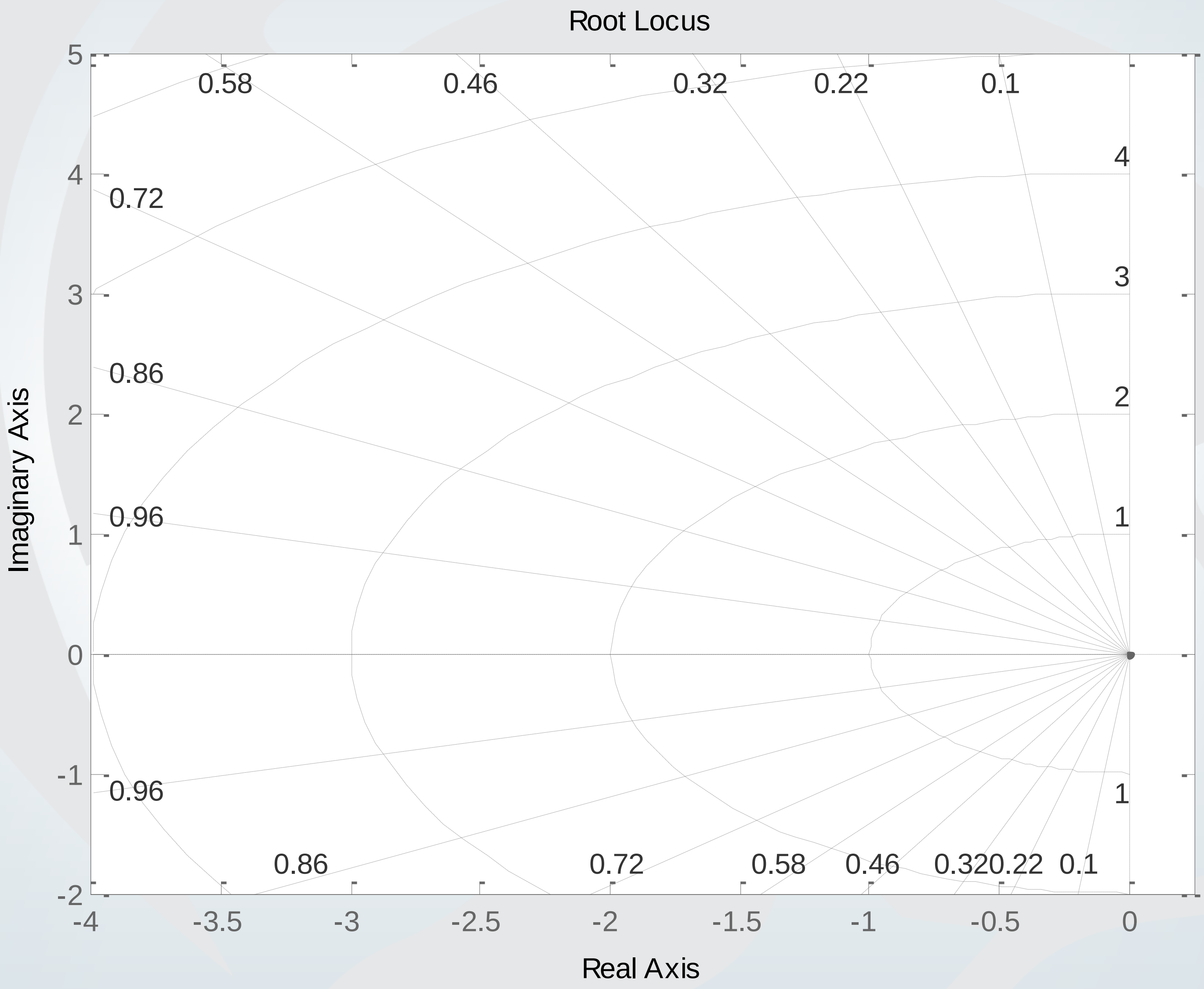
Polos e Zeros

E se a entrada for um delta de Dirac: $f(t) = \delta(t)$ e $F(s) = 1$

$$\mathsf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{p_i t}$$

O que acontece se: $p_i > 0$?

Polos e Zeros



Polos e Zeros

Vamos considerar o mesmo sistema.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f$$

Reescrevendo

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = Kr\omega_n^2\mathrm{u}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\[2em] \zeta = \dfrac{b}{2m\omega_n} \end{array} \right.$$

Polos e Zeros

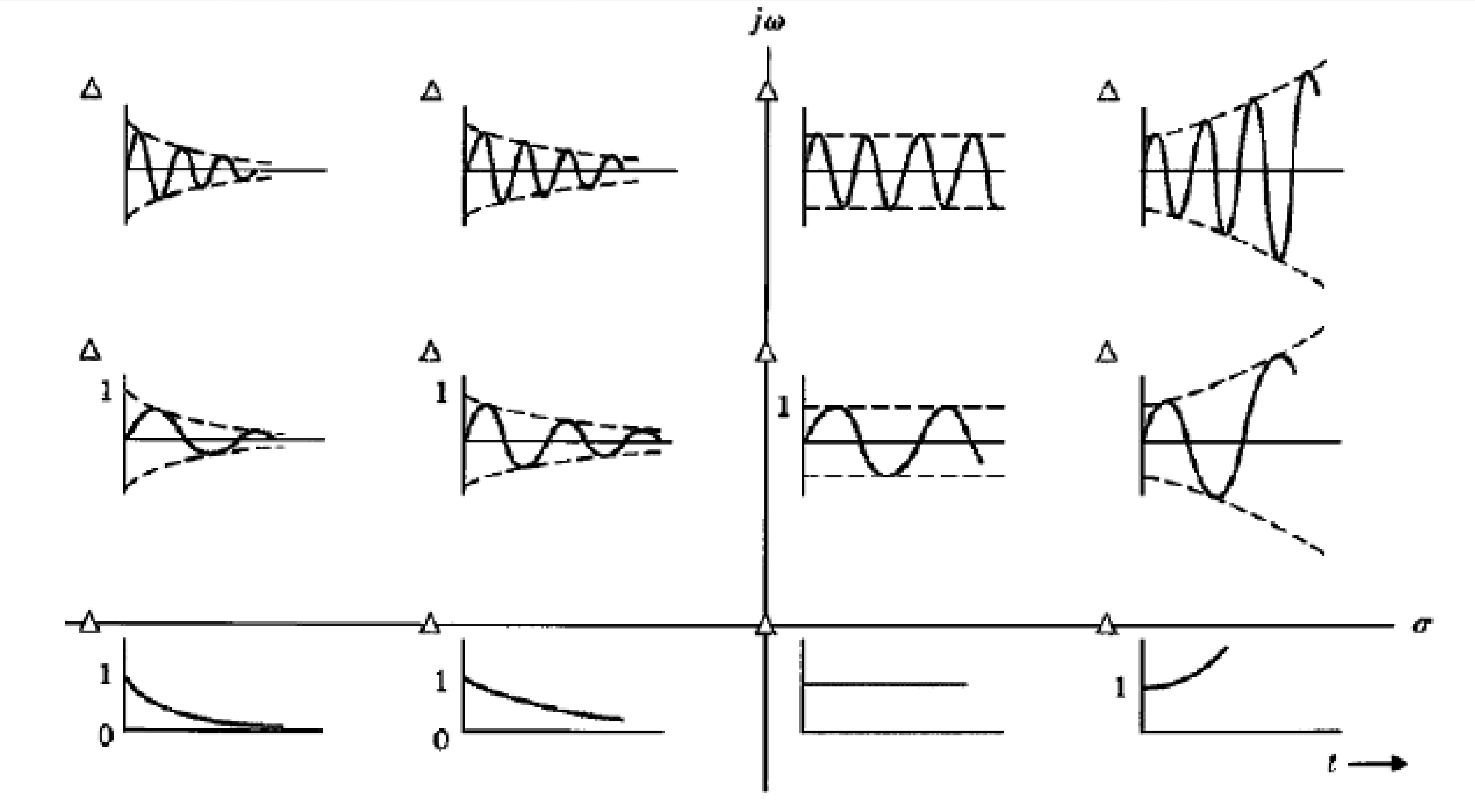
Pólos:

$$p = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \left(\sqrt{1-\zeta^2}\right) j$$

Casos:

- $\zeta = 0$, sistema não amortecido
- $0 < \zeta < 1$, sistema subamortecido
- $\zeta = 1$, sistema criticamente amortecido
- $\zeta > 1$, sistema sobreamortecido

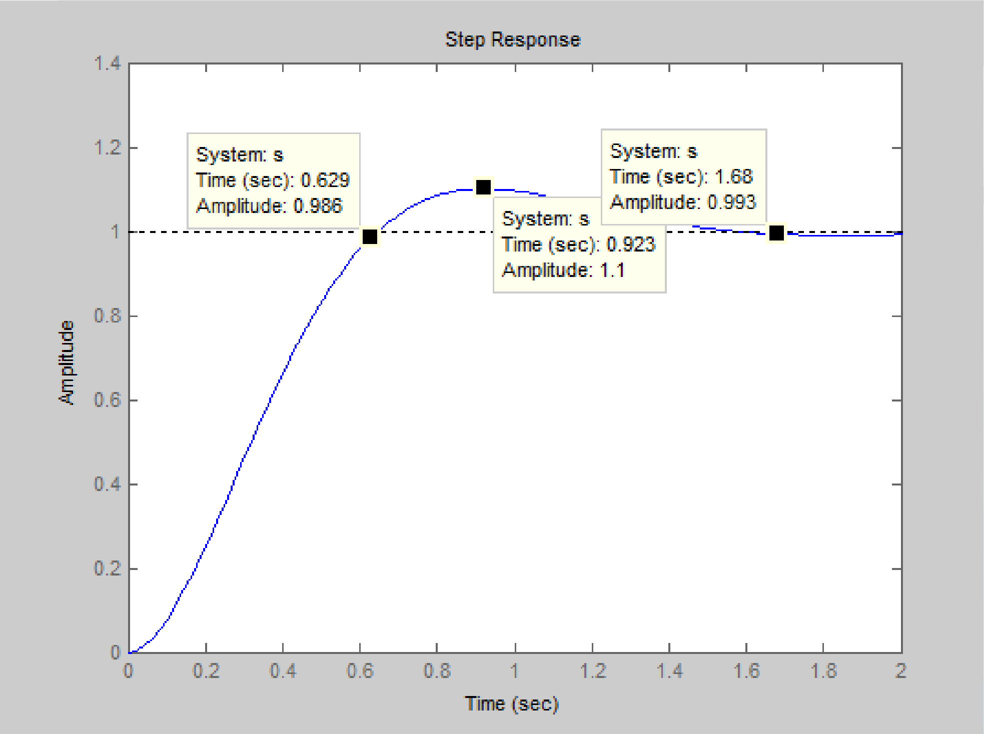
Polos e Zeros



Polos e Zeros

Exemplo. Sistema de segunda ordem

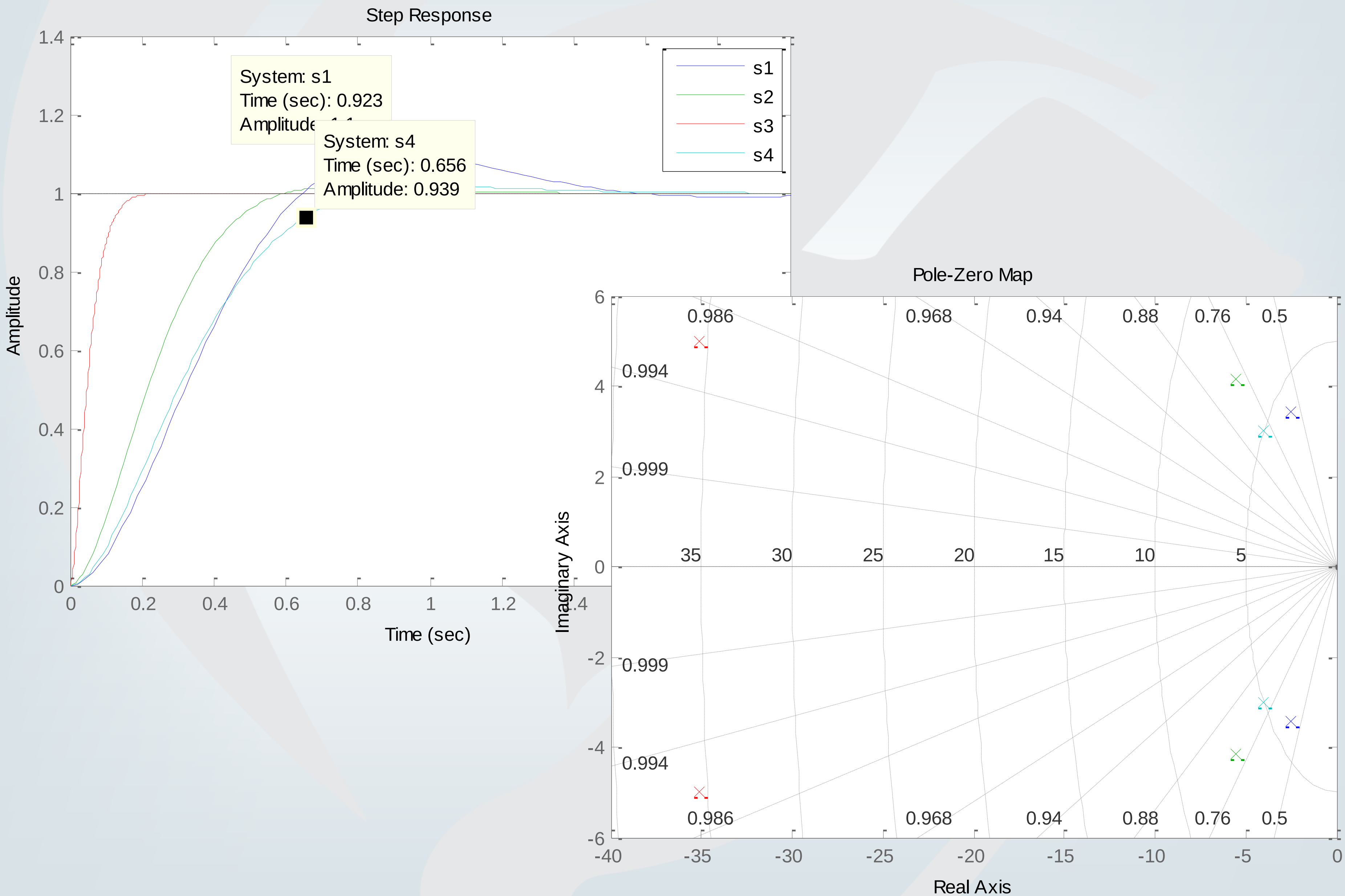
wn=4.23; zeta= 0.5911; Kp=1
s=tf([wn^2],[1 2*qsi*wn wn^2]); step(s);



Polos e Zeros

```
clear all; close all;

wn=4.23; qsi=0.5911;
s1=tf([wn^2],[1 2*qsi*wn wn^2]);

wn=6.94; qsi=0.8;
s2=tf([wn^2],[1 2*qsi*wn wn^2]);

wn=35.45; qsi=0.99;
s3=tf([wn^2],[1 2*qsi*wn wn^2]);

wn=5; qsi=0.8;% exemplo fora
s4=tf([wn^2],[1 2*qsi*wn wn^2]);

%resposta ao degrau
figure(1)
step(s1,s2,s3,s4);

figure(2); hold on;
pzmap(s1,s2,s3,s4); grid;
```

Polos e Zeros



EESC • USP

www.eesc.usp.br