Eletromagnetismo I

Prof. Raul Abramo - 2º Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 31

Ondas Eletromagnéticas no vácuo
(Cap.9 livro texto)

Quando cargas e correntes elétricas variam no tempo, o campo eletromagnético por elas gerado se propaga na forma de ondas. O processo de radiação, ou seja, a determinação da potência radiada em função dos parâmetros das fontes, é mais complicado de ser estudado do que as características de propagação do campo eletromagnético. Por isso, a física da radiação será dada pelo Prof. Abramo. Vamos, ao invés, iniciar com o estudo do modelo matemático que descreve a propagação de ondas eletromagnéticas e como elas interagem com meios materiais e como são guiadas.

Consideremos uma região do espaço no vácuo e sem cargas e correntes. Qualquer campo eletromagnético que existir nessa região terá sido gerado por fontes fora dela e, portanto, deve satisfazer as seguintes equações de Maxwell (sem fontes)

$$\nabla\cdot\vec{E}=0; \qquad \nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \qquad \nabla\times\vec{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Tomando o rotacional das terceira e quarta equações, temos

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=\nabla\times\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\vec{B}\right)$$

Considerando $\nabla\cdot\vec{E}=0$ e a Lei de Faraday, temos

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}&=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}\\ \\ \nabla^2\vec{B}&=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

Estas equações são da mesma forma; de fato são a mesma equação, a Equação de Onda aplicada ao campo elétrico ou ao campo magnético. Lembrando que, em coordenadas cartesianas, o Laplaciano de um vetor corresponde ao Laplaciano aplicado a cada uma de suas componentes, temos ($\vec{F} = \vec{E}$ ou $\vec{B}$)

$$(\nabla^2 F_x)\hat{e}_x + (\nabla^2 F_y)\hat{e}_y + (\nabla^2 F_z)\hat{e}_z = \mu_0\epsilon_0 \left[\frac{\partial^2 F_x}{\partial t^2}\hat{e}_x + \frac{\partial^2 F_y}{\partial t^2}\hat{e}_y + \frac{\partial^2 F_z}{\partial t^2}\hat{e}_z\right]$$

Como os versores $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$ são ortogonais entre sí, esta equação tem que ser satisfeita por cada uma das componentes, ou seja,

$$\nabla^2 F_i - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} = 0; \qquad i = x, y, z$$

Para entender a solução desta equação, vamos supor que o vetor $\vec{A}$ depende só de z e t (mais tarde generalizaremos a solução); então

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial z^2} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} = 0$$

A melhor forma de encontrar a solução dessa equação é analisar o seu significado: derivando duas vezes a variável dependente (F_i) com relação a z é o mesmo que derivá-la duas vezes com relação a t e multiplicar o resultado por uma constate ($\mu_0\epsilon_0$)! Isto implica que a dependência se F_i com z e t é da mesma forma; tentamos então uma solução em que F_i dependa apenas de uma combinação linear de z e t:

$$F_i(z,t) = f(\xi),$$

onde

$$\xi \equiv z + ct$$

onde c é uma constante a ser determinada. Com esta hipótese, temos

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} = \frac{d^2 F_i}{d\xi^2}; \qquad \frac{\partial^2 F_i}{\partial t^2} = c^2 \frac{d^2 F_i}{d\xi^2}$$

e a equação de onda fica

$$\left(1 - c^2\mu_0\epsilon_0\right) \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0.$$

Esta equação é satisfeita, <u>qualquer que seja a função f</u>, desde que

$$1 - c^2\mu_0\epsilon_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$$

ou

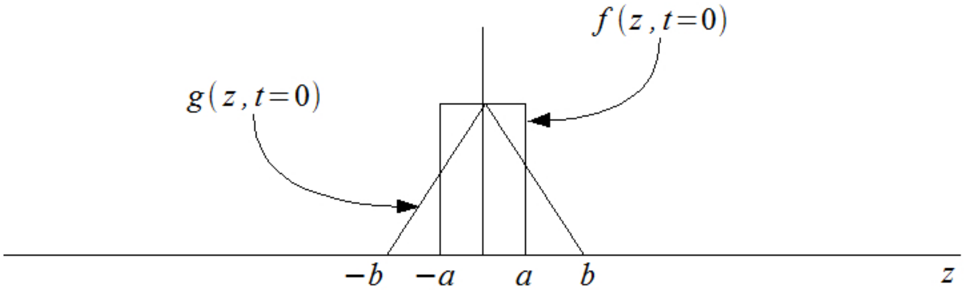
$$\boxed{c = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}}$$

Portanto o argumento da função f pode ser tanto $\xi_+ = z + t/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ ou $\xi_- = z - t/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Ao invés de escrevermos desta forma complicada, representamos a solução geral da Equação de Onda como

$$F_i(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$$

onde f e g são duas funções arbitrárias e tomamos para c somente o valor absoluto, $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

Vamos verificar o significado físico destas funções. Suponhamos, por exemplo, que no instante $t = 0$ as funções sejam um retângulo (f) e um triângulo (g) no entorno da origem $z = 0$.

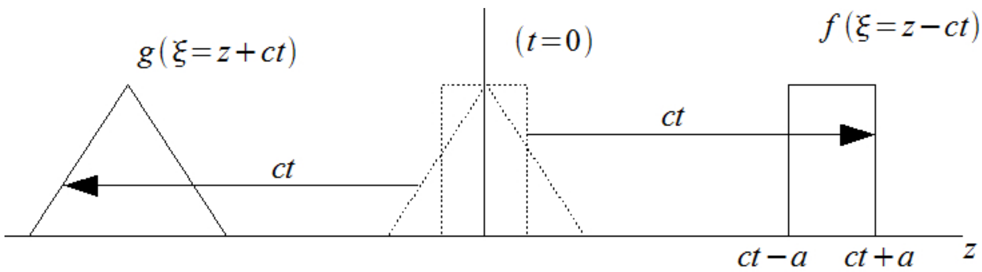


Portanto, no instante $t = 0$, a função f se anula em $\xi = \pm a$ e a função g em $\xi = \pm b$. Para qualquer outro instante $t > 0$, os pontos onde estas funções se anulam continuarão a ser os mesmos, porque elas só dependem de ξ e não de z e t independentemente. Assim teremos que f será nulo em

$$\xi_+ = a \qquad z - ct = a \quad \therefore z = a + ct$$

$$\xi_- = -a \qquad z - ct = -a \quad \therefore z = -a + ct,$$

ou seja, todos os pontos do pulso inicial $f(\xi)$ se deslocam de ct para a direita. Da mesma forma, é fácil de ver que todos os pontos do pulso inicial $g(\xi)$ se deslocaram de ct para a esquerda, conforme mostra a figura.



Portanto, vemos que a solução com argumento $(z+ct)$ corresponde a propagação no sentido negativo do eixo z, enquanto que a solução com argumento $(z - ct)$ corresponde a propagação no sentido positivo do eixo z.

É importante aqui realçar um ponto que às vezes causa confusão devido à noção sobre ondas que se aprende nos cursos básicos de Física. As perturbações que se propagam como ondas podem ter qualquer forma; não precisam ter a forma senoidal, que é única que muitos alunos associam com ondas! Por outro lado, o sentido no qual elas se propagam é determinado pela dependência com z e t do argumento. Não está ligado à direção do campo que está se propagando.

A constante c fornece a velocidade com a qual as ondas eletromagnéticas se propagam. Tomando $\epsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} F/m$ e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-12} H/m$, no sistema SI, obtemos

$$c = 3,00 \times 10^8 m/s$$

que é exatamente a velocidade da luz, indicando que a luz nada mais é que uma onda eletromagnética.

Relação entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$

Da forma que derivamos a equação de onda, parece que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ se propagam no vácuo como ondas independentes. Mas não é bem assim, porque eles são acoplados através das equações de Maxwell,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Portanto supondo que os campos só dependam de z e t, como vimos fazendo, temos

$$\left(\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\left(\hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

e

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0; \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

Portanto, no vácuo os campos paralelos à direção de propagação (z no nosso caso) são constantes, $B_z = cte$; $E_z = cte$, e não fazem parte do campo eletromagnético que se propaga como uma onda. Se não houverem fontes que explicitem a existência desses campos, podemos tomá-los simplesmente como nulos. Por outro lado, vemos que o campo E_x está acoplado ao campo B_y e o campo E_y ao campo B_x:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \mp c\frac{\partial B_y}{\partial \xi},$$

o sinal dependendo se $\xi = z + ct$ ou $\xi = z - ct$. Da mesma forma,

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial \xi} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} = \pm\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial \xi}.$$

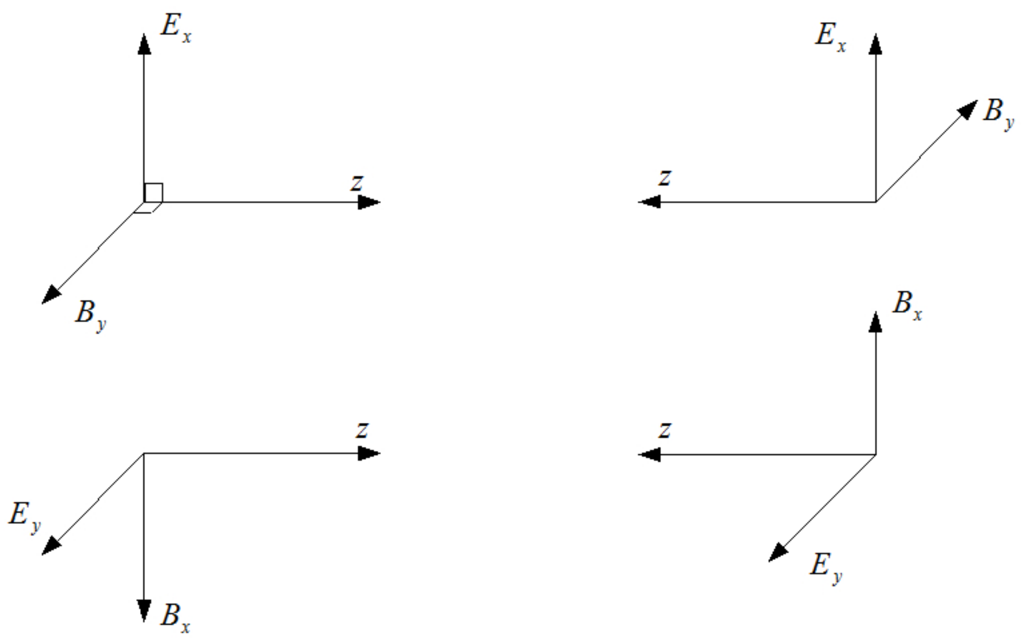
Portanto,

$$\frac{d}{d\xi}\left(E_x \pm cB_y\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{d\xi}\left(B_x \mp \frac{1}{c}E_y\right) = 0$$

Fazendo a constante de integração nula, obtemos

$$E_x = \mp cB_y; \qquad E_y = \pm cB_x$$

Estes representam os dois modos de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo, na forma de ondas planas. Nos dois modos, o campo magnético está sempre à direita dos campos elétrico, quando olhamos para a direção de propagação.



Por outro lado, a relação entre os módulos dos campos elétricos e magnético é

$$\frac{|E|}{|B|} = c$$

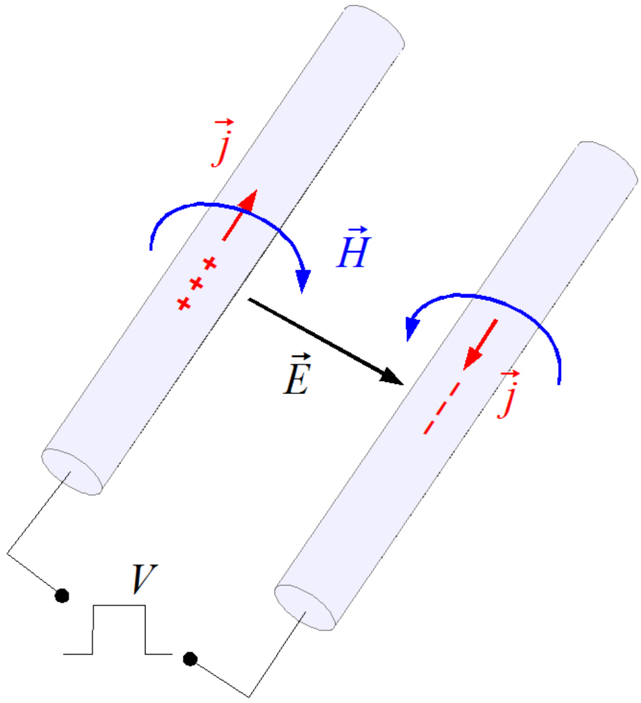
ou

$$\frac{|E|}{|H|} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Lembrando que $|E|$ tem dimensão de $[V/m]$ e $|H|$ de $[A/m]$, vemos que a relação entre eles tem unidade de impedância, Ω. Esta grandeza recebe o nome de impedância intrínseca do vácuo,

$$\eta = \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi\Omega \approx 377\Omega$$

A razão para essa terminologia vem da situação física de propagação de um sinal numa linha de transmissão. Quando um pulso de voltagem é aplicado entre os dois condutores da linha, aparece um campo elétrico entre eles que se propaga como uma onda. Mas, naturalmente, o pulso de tensão também dá origem a um pulso de corrente em cada condutor, em sentidos opostos. O campo magnético gerado por essas correntes é na direção perpendicular ao campo elétrico. A relação entre a tensão e a corrente na linha, que é denominada impedância intrínseca da linha de transmissão, também é igual à relação entre o campo elétrico e magnético (H). Portanto, uma onda eletromagnética se propaga no vácuo como se estivesse suportada por um "linha de transmissão". Quando especificamos um cabo coaxial de 50Ω ou um cabo bilinear de 300Ω, estamos nos referindo à impedância intrínseca.

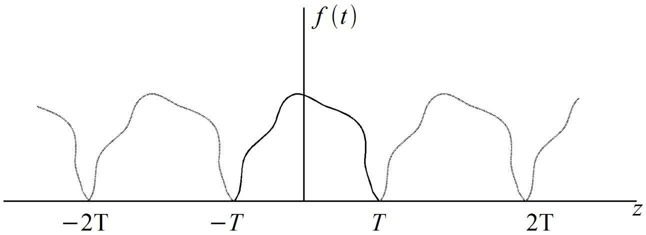


Ondas Planas Monocromáticas

Como vimos quando discutimos a Equação de Onda, sua solução é dada por qualquer função arbitrária da variável $\xi = z \pm vt$ (ou $z \pm ct$, no vácuo), para ondas se propagando na direção z (as modificações para uma direção arbitrária serão vistas logo adiante). Discutindo este resultado, o livro texto, como a maioria de outros livros para a graduação, passam logo ao caso especial de ondas senoidais, ou seja, com frequência fixa, sem justificar adequadamente a importância destas ondas, Vamos tentar sanar esta deficiência fazendo uma introdução mais geral

Recordação sobre Integral de Fourier

A série de Fourier permite representar uma função periódica por um somatório de funções senoidais. Consideremos, por exemplo uma função $f(t)$ definida apenas no intervalo $-T < t < T$. Fora desse intervalo a função é suposta repetir-se de forma periódica. A série de Fourier para essa função é dada por (veja, por exemplo, Butkov, cap.4)



$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right]$$

onde

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(\tau)\cos\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) d\tau; \qquad b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(\tau) sen\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) d\tau$$

Gostaríamos de encontrar uma representação para qualquer função, que fosse válida em todo o intervalo $(-\infty, \infty)$, ou seja, para $T \to \infty$. Para isso primeiro vamos considerar o chamado Teorema Integral de Fourier. Substituindo as expressões para a_n e b_n na série de Fourier, temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(\tau) \left[\cos\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{T}\right) + sen\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) sen\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right] d\tau \\ \therefore f(t) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(\tau)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(\tau - t)\right] d\tau \end{aligned}$$

Como a função cos é par, temos que $\cos[n\pi(\tau - t)/T] = \cos[(-n)\pi(\tau - t)/T]$ de forma que podemos escrever

$$f(t) = \frac{1}{2T}\left[\int_{-T}^{T} f(\tau) d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{T}^{T} f(\tau)\cos\left[\frac{n\pi}{T}(\tau - t)\right] d\tau + \sum_{n=-1}^{-\infty} \int_{T}^{T} f(\tau)\cos\left[\frac{(-n)\pi}{T}(\tau - t)\right] d\tau \right]$$

Utilizando este truque, podemos condensar os três termos num único somatório, ou seja,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2T}\int_{T}^{T} f(\tau)\cos[n\pi(\tau - t)/T]] d\tau$$

Agora podemos tomar o limite $T \to \infty$; no entanto é necessário cuidado com o limite no argumento da função cosseno porque n, no numerador, também vai para infinito, no somatório. Então vamos definir o parâmetro

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{T}$$

que pode ser mantido constante no limite. Com esta definição, temos que

$$\frac{\pi}{T} = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \delta\lambda_n,$$

ou seja,

$$\frac{1}{T} = \frac{\delta\lambda_n}{\pi}$$

Assim,

$$\lim_{T\to\infty} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \delta\lambda_n\to 0}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\lambda_n \int_{-T}^{T} f(\tau)\cos\left[\lambda_n(\tau - t)\right] d\tau$$

Portanto, nesse limite, o somatório se transforma numa integral sobre λ, ou seja,

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\left[\lambda(\tau - t)\right] d\tau}$$

Este resultado é denominado <u>Teorema Integral de Fourier</u>. Ele pode ser colocado de uma forma mais conveniente, utilizando a formula de Euler

$$e^{i\lambda(\tau-t)} = \cos\left[\lambda(\tau - t)\right] + i\,sen\left[\lambda(\tau - t)\right]$$

e lembrando que $\int_{-\infty}^{\infty} sen[\lambda(\tau - t)]d\lambda = 0$, temos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\lambda(\tau-t)} d\tau$$

ou

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{i\lambda(\tau-t)} d\tau$$

Finalmente, esta relação pode ser dividida no <u>par de transformadas de Fourier</u>

$$\boxed{\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\tau} f(\tau) d\tau \\ f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} f(\lambda) d\lambda \end{aligned}}$$

<u>**Exemplo 1**</u>: Calcular a transformada de Fourier da função $g(x) = \delta(x - a)$

Utilizando a expressão anterior, temos

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x'} \delta(x'-a)\, dx' = \frac{e^{i\lambda a}}{\sqrt{2\pi}}$$

Este resultado permite também derivar uma representação muito útil para a função δ, utilizando a transformada inversa de Fourier

$$\delta(x-a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \delta(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{e^{i\lambda a}}{\sqrt{2\pi}} d\lambda$$

$$\therefore \quad \boxed{\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(a-x)}\, d\lambda} \qquad \text{“Relação de Completeza”}$$

Para representar a superposição de ondas planas, é conveniente escolher o parâmetro $\lambda = -\omega$, quando a variável independente for o tempo, e $\lambda = k$, quando a variável independente for a coordenada espacial, onde ω é a frequência angular e k a constante número de onda. Assim temos

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} f(\tau)\, d\tau; \qquad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(\omega)\, d\omega$$

e

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx'} f(x')\, dx'; \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(k)\, dk$$

A vantagem dessa representação será vista logo a seguir.