

Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
PSUB - 2019

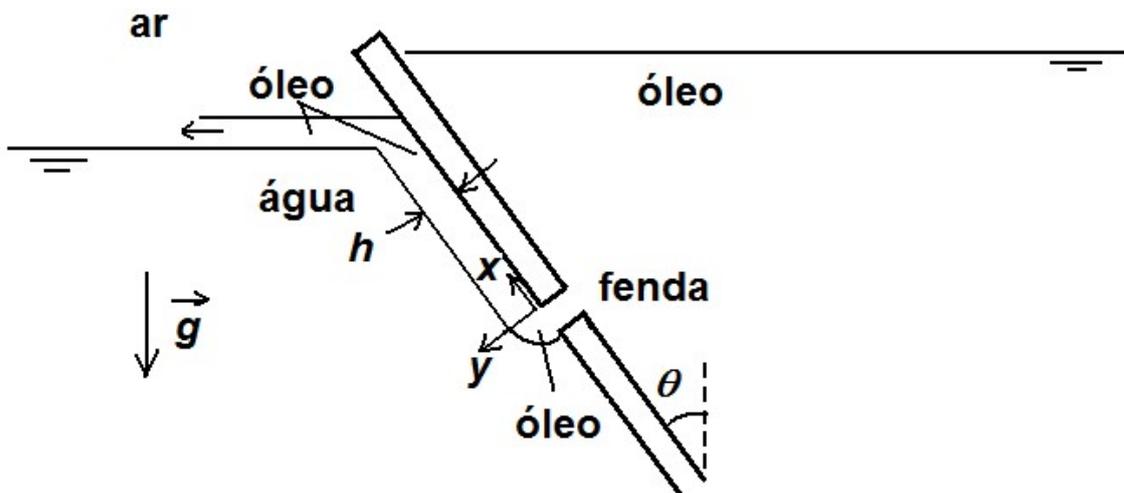
1. (4,0 pontos) Ocorre o aparecimento de uma fenda na lateral do casco de uma barça que transporta óleo. Essa fenda tem um comprimento W na direção ortogonal ao plano da figura. O óleo, sendo mais leve que a água, escapa pela lateral da barça formando um filme de espessura h entre o casco e a água, até chegar à superfície livre. A lateral da barça forma um ângulo θ com a direção vertical. A aceleração da gravidade é g e segue a direção vertical com sentido para baixo conforme a figura. O atrito viscoso entre o óleo e a água é desprezível e temos uma distribuição hidrostática de pressões na água. A viscosidade dinâmica e densidade do óleo são dadas por μ_o e ρ_o e a viscosidade dinâmica e densidade da água são dadas por μ_w e ρ_w .

- Determine o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}$ na interface óleo-água. (1 ponto)
- Determine o perfil de velocidade $u(y)$ no filme de óleo. Considere escoamento permanente, desenvolvido (perfil de velocidades é o mesmo ao longo de x), incompressível e bidimensional. (2 pontos)
- Determine a vazão volumétrica de óleo Q que escapa pela fenda. (1 ponto)

(Extraído e adaptado de J. A. Fay, "Introduction to Fluid Mechanics")

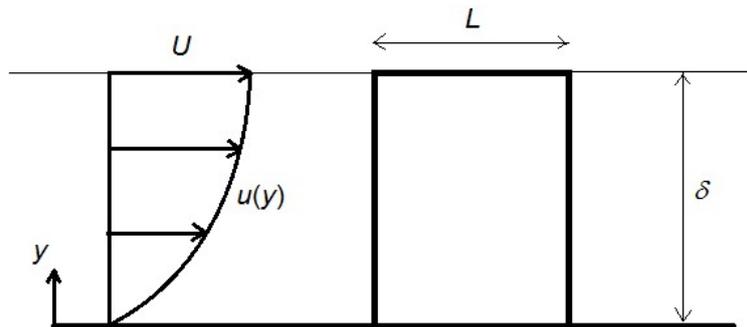
Continuidade: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Navier-Stokes, componente x : $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G_x + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$



2. (3,0 pontos) - Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 4ª edição: Uma placa plana de comprimento L e altura δ é soldada numa parede paralelamente a uma camada limite que se aproxima, com um fluido de propriedades ρ e ν . Admita que o escoamento sobre a placa é totalmente turbulento e que o escoamento de aproximação segue a lei de potência $u(y)/U=(y/\delta)^{1/7}$. Deduza uma fórmula para o força de arrasto dessa placa como função de U, L, δ, ρ e ν . Lembre-se que a placa tem os dois lados sujeitos ao arrasto.

Dados: coeficiente de arrasto da camada limite turbulenta para um lado de uma placa plana paralela à corrente: $C_D = \frac{0,031}{Re_L^{1/7}}$



3. (3,0 pontos) Considere o escoamento não viscoso em torno de um cilindro sem circulação. Encontre:

- A posição do ponto sobre a superfície na região frontal frontal ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) onde a aceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (1 pontos)
- A componente radial da aceleração na superfície do cilindro. É diferente de zero? Por que? (1 ponto)
- A posição do ponto sobre a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal onde a desaceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (1 ponto)

Formulário:

Função corrente para cilindro de raio a sem circulação mais corrente uniforme, velocidades e Bernoulli:

$$\psi = U_{\infty} a \sin\theta \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) ; \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} ; \quad v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} ; \quad p + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{cte}$$

Aceleração da partícula: $a_r = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}^2}{r}$; $a_{\theta} = v_r \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{v_r v_{\theta}}{r}$

Gabarito

1. Solução:

- a) Se temos uma distribuição hidrostática de pressões na água o gradiente $\frac{\partial p}{\partial x}$ entre esta e o

$$\text{óleo é: } \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_w g \cos \theta$$

- b) Da hipótese de escoamento desenvolvido no filme de óleo, da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = 0$$

Da equação de Navier-Stokes na direção x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_o}{\rho_o} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - g \cos \theta$$

Resulta:

$$\frac{d^2 u}{d y^2} = -\frac{(\rho_w - \rho_o) g \cos \theta}{\mu_o}$$

Essa equação pode ser integrada com condições de contorno:

$$u = 0 \text{ se } y = 0 \text{ (não-escorregamento)}$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \text{ se } y = h \text{ (sem atrito viscoso na interface entre óleo e água)}$$

$$\text{Resulta: } u = \frac{(\rho_w - \rho_o) g \cos \theta}{\mu_o} \left(h - \frac{y}{2} \right) y$$

- c) Integrando o perfil de velocidades:

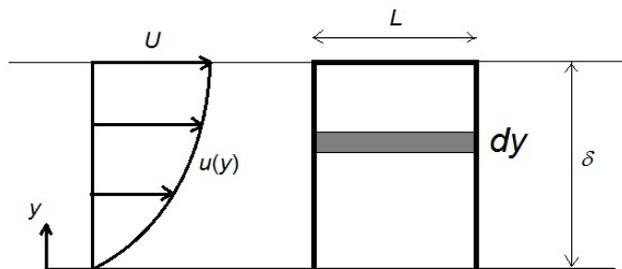
$$Q = W \int_0^h u \, dy$$

$$\text{Resulta: } Q = \frac{W(\rho_w - \rho_o) g h^3 \cos \theta}{3\mu_o}$$

2. Solução:

Uma fatia dy sobre a placa vai sofrer um arrasto dado por:

$$dF = \frac{0,031 \nu^{1/7}}{u^{1/7} L^{1/7}} \rho u^2 L \, dy = 0,31 \rho \nu^{1/7} u^{13/7} L^{6/7} \, dy$$



Substituindo o perfil de velocidades:

$$dF = 0,031 \rho v^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}} dy$$

Integrando:

$$F = \int_0^{\delta} 0,031 \rho v^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}} dy$$

Que resulta:

$$F = \frac{49}{62} \times 0,031 \rho v^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \delta = 0,0245 \rho v^{1/7} U^{13/7} L^{6/7} \delta$$

3. Solução:

a) O campo de velocidade resulta

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) ; \quad v_{\theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_{\infty} \sin \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Na superfície do cilindro, $v_r = 0$. A aceleração tangencial resulta:

$$a_{\theta_s} = \left(\frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} \right)_{r=a} = 4 \frac{U_{\infty}^2}{a} \sin \theta \cos \theta ; \text{ como a direção de escoamento é contrária ao versor } \tilde{\theta}, \text{ a}$$

aceleração na direção do escoamento a_{θ_e} resulta $a_{\theta_e} = -a_{\theta_s} = -4 \frac{U_{\infty}^2}{a} \sin \theta \cos \theta$. Vemos que,

para a superfície frontal $\cos \theta \leq 0$, de maneira que $a_{\theta_e} \geq 0$. Para um extremo local, deve ser

$$\left(\frac{\partial a_{\theta_e}}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_m} = -4 \frac{U_{\infty}^2}{a} (\cos^2 \theta_m - \sin^2 \theta_m) = -4 \frac{U_{\infty}^2}{a} (1 - 2 \sin^2 \theta_m) = 0 ; \text{ daqui resulta}$$

$$\sin \theta_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta_m = 135^\circ = 3 \frac{\pi}{4}. \text{ Vemos que } \left(\frac{\partial^2 a_{\theta_s}}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=\theta_m} = 16 \frac{U_{\infty}^2}{a} \sin \theta_m \cos \theta_m < 0, \text{ de}$$

maneira que o extremo é um máximo local.

A velocidade no ponto vale $V_m = v_{\theta_m} = -2 \frac{\sqrt{2}}{2} U_{\infty} = -\sqrt{2} U_{\infty}$; por Bernoulli,

$$\text{resulta: } p_m - p_{\infty} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 (1 - 2) = -\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2.$$

b) Embora a componente radial da velocidade é zero na superfície do cilindro, a componente radial da aceleração é diferente de zero, pois a componente tangencial da velocidade está

mudando o módulo e também a direção. Resulta $a_{r_s} = -\frac{v_{\theta_s}^2}{a} = -2 \frac{U_{\infty}^2}{a} \sin^2 \theta \leq 0$; para o ponto

anterior, resulta $a_{r_m} = -\frac{U_{\infty}^2}{a}$.

c) Para a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal é $\theta = \pi$, $v_{\theta\pi} = 0$ e

$v_{r\pi} = -U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$. A aceleração é puramente radial, resultando

$a_{r\pi} = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{\theta=\pi} = 2U_\infty^2 \frac{a^2}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \geq 0$, pois $\frac{a}{r} \leq 1$; como a direção de escoamento é contrária ao versor \tilde{r} , a aceleração na direção do escoamento a_{r_e} resulta $a_{r_e} = -a_{r\pi} = -2U_\infty^2 \frac{a^2}{r^3} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \leq 0$, isto é, o fluido desacelera.

Para um extremo local, deve ser $\left(\frac{\partial a_{r_e}}{\partial r}\right)_{r=r_m} = 2 \frac{U_\infty^2}{a^2} \left(3 \frac{a^4}{r_m^4} - 5 \frac{a^6}{r_m^6}\right) = 0$; daqui resulta

$\frac{a}{r_m} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \Rightarrow r_m = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} a$. Vemos que

$\left(\frac{\partial^2 a_{r_e}}{\partial r^2}\right)_{r=r_m} = 2 \frac{U_\infty^2}{a r_m} \left[-12 \left(\frac{a}{r_m}\right)^4 + 30 \left(\frac{a}{r_m}\right)^6\right] = \frac{108}{25} \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \frac{U_\infty^2}{a^2} > 0$, de maneira que a aceleração na direção do escoamento é um mínimo local; desta maneira, a desaceleração é um máximo local.

A velocidade no ponto vale $v_{r_m} = -U_\infty \left(1 - \frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5} U_\infty$; por Bernoulli,

resulta: $p_m - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left(1 - \frac{4}{25}\right) = \frac{21}{25} \rho U_\infty^2$.