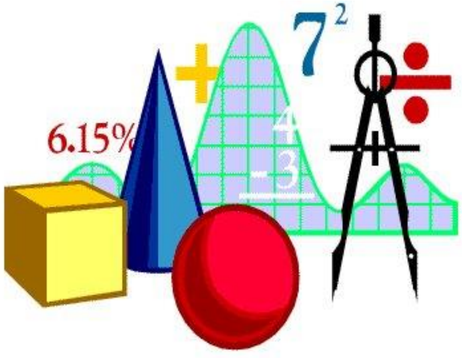


MATEMÁTICA APLICADA À ENGENHARIA AGRÍCOLA E DE BIOSSSISTEMAS

Prof. Dr. Patricia Angélica Alves Marques

PROGRAMA:

- 1 - Revisão das Derivadas
- 2 - Revisão das Integrais
- 3 - Funções de várias variáveis
- 4 - Equações Diferenciais Ordinárias
- 5 - Funções de Distribuição de Probabilidades

Bibliografia:

- Apostila de Matemática Aplicada (Frizzone)
- Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas (Spiegel- Coleção Schaum)
- Advanced Engineering Mathematics (Erwin Kreyszig)
- Livros de Cálculo I e II

Avaliação:

- Prova 1 - 15/10/2019
- Prova 2 – 12/11/2019
- Testes nas aulas e Lista de exercícios

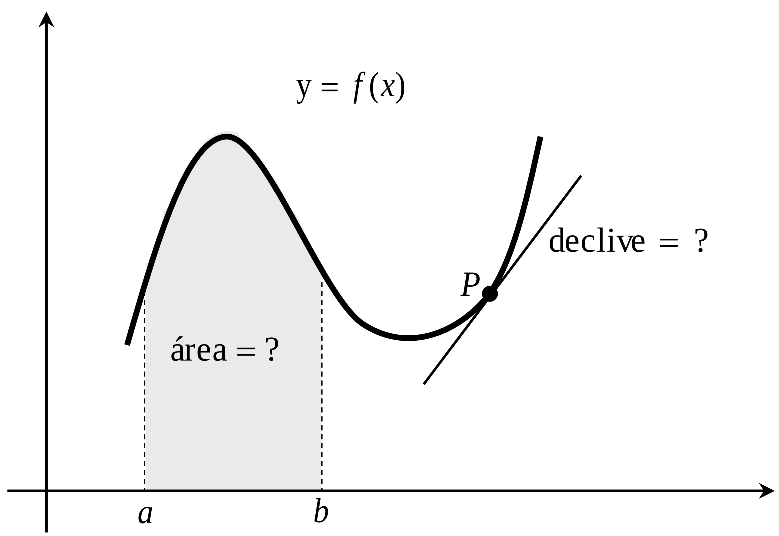
$$\frac{2 * P1 + 2 * P2 + (\text{listas e exercícios})}{5}$$

- Conceito: $> 8{,}5 \rightarrow$ A
  $> 6{,}5$ e $\leq 8{,}5 \rightarrow$ B
  > 5 e $\leq 6{,}5 \rightarrow$ C
  $<5 \rightarrow$ reprovado

CAPÍTULO 1 - REVISÃO DE TÓPICOS DE CÁLCULO - DERIVADAS

1.1 Os dois problemas básicos do cálculo → $y = f(x)$

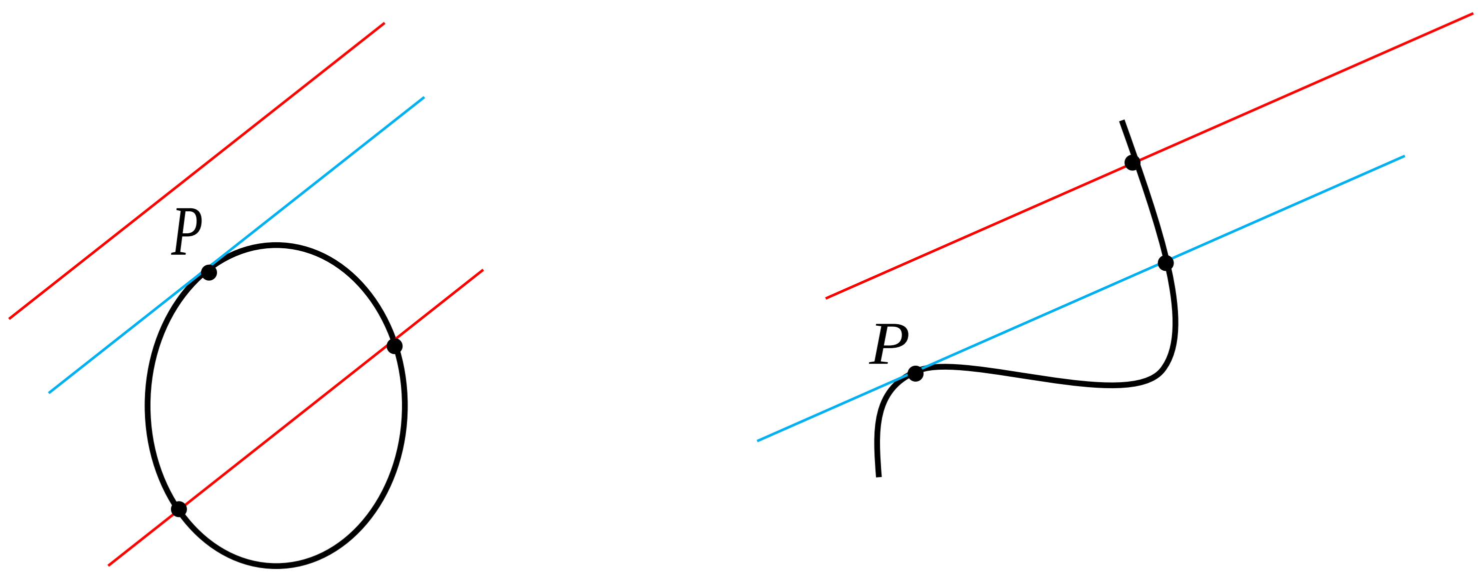
Tangentes → cálculo diferencial, isto é, calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto dado P ;



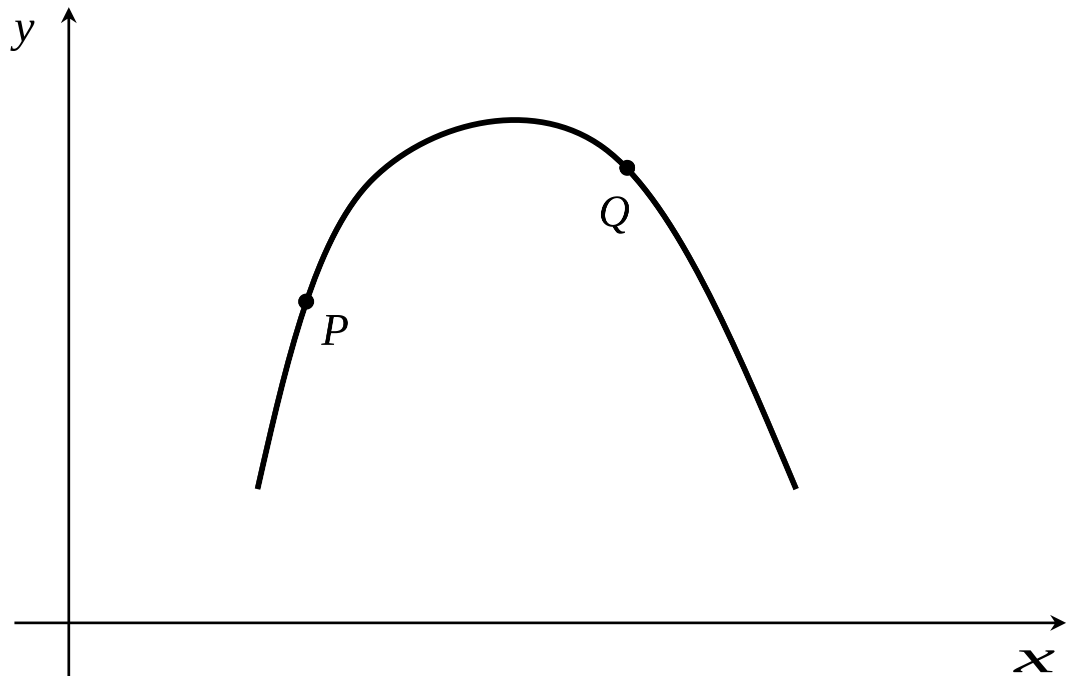
Áreas → cálculo integral, isto é, calcular a área debaixo do gráfico, entre os pontos $x = a$ e $x = b$.

1.2 O problema da tangente

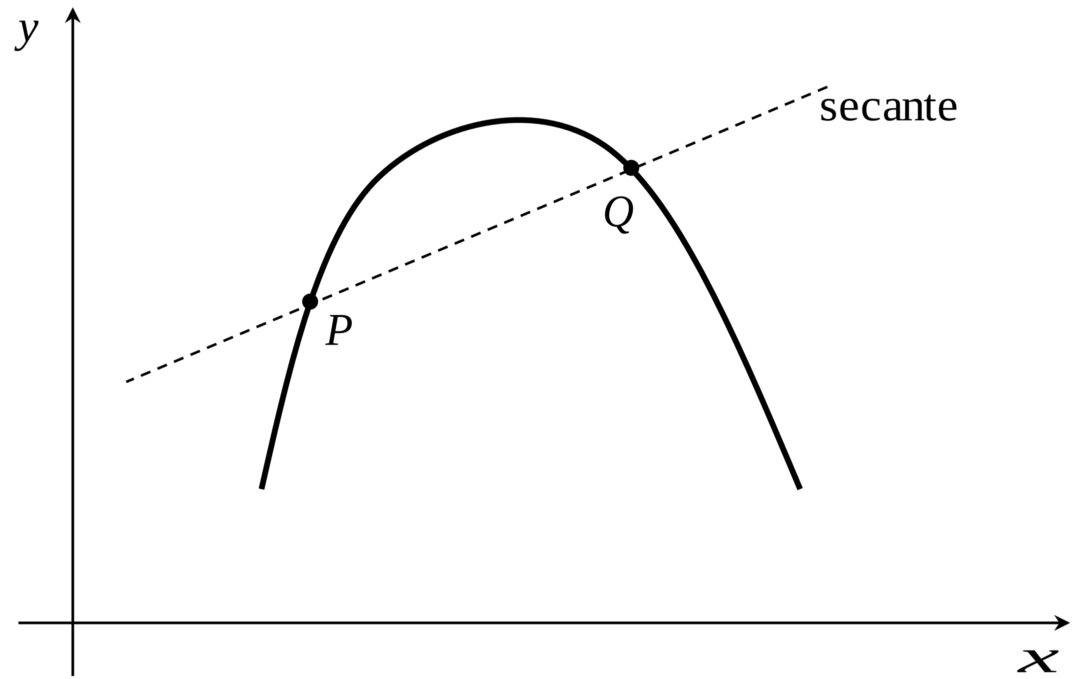
- Conceito: “é a reta que toca um ponto, mas não a intercepta”



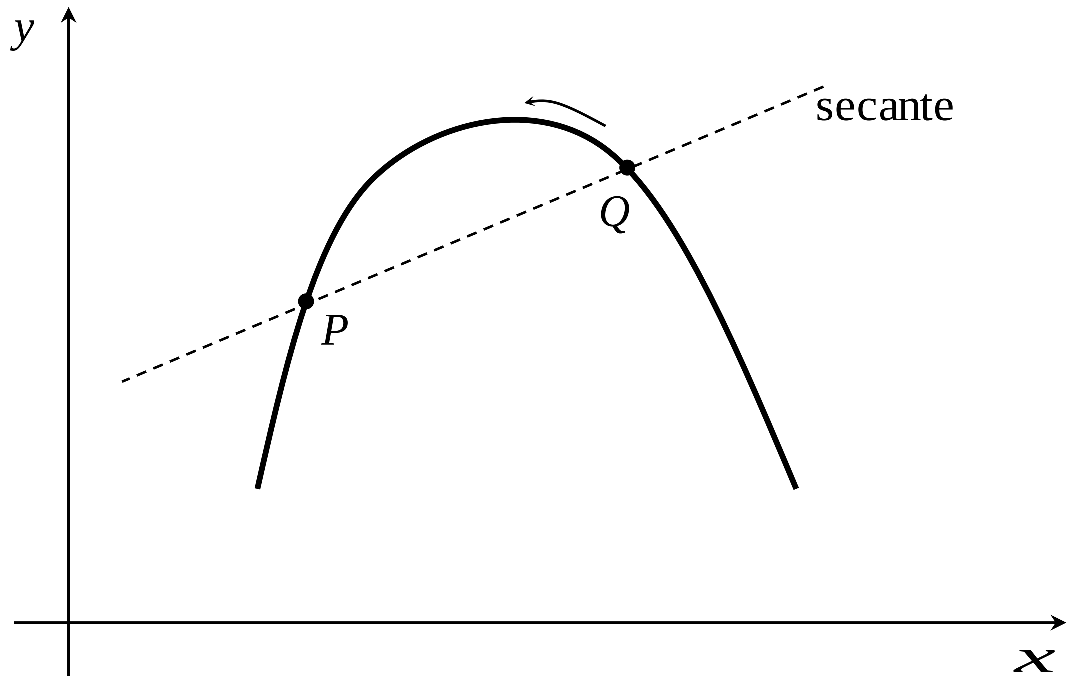
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”



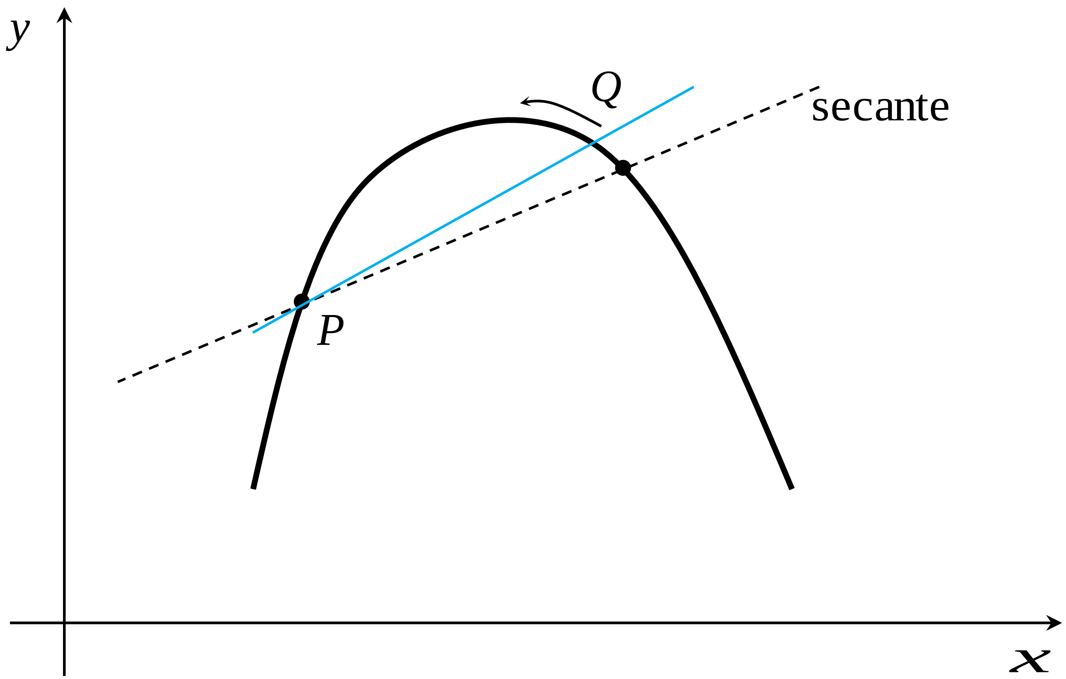
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”



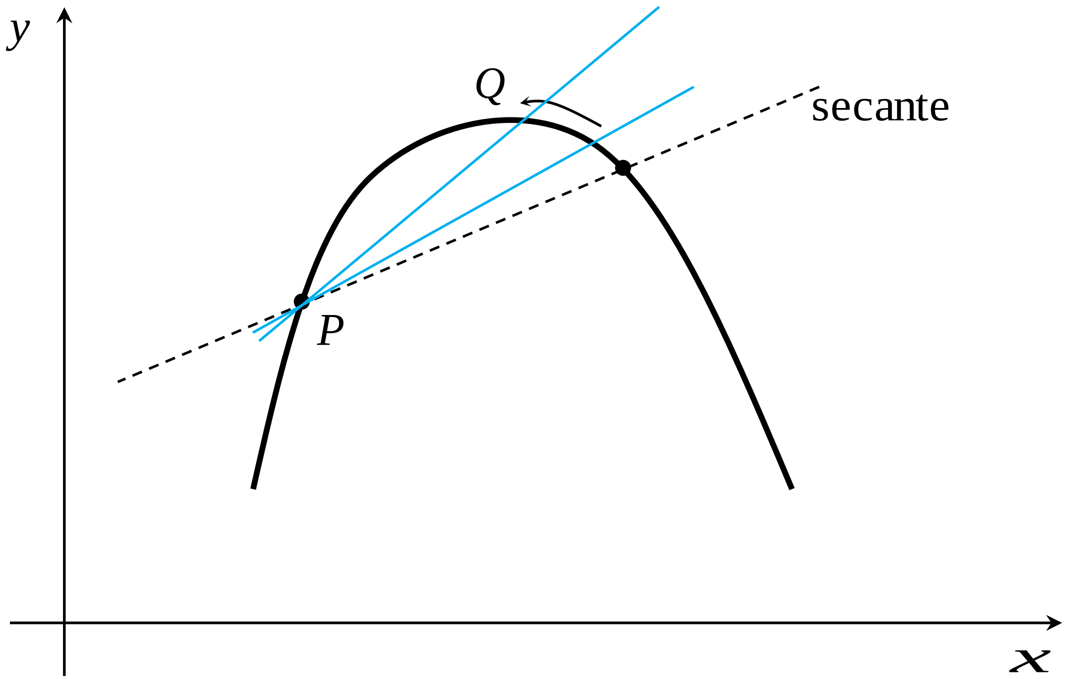
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”



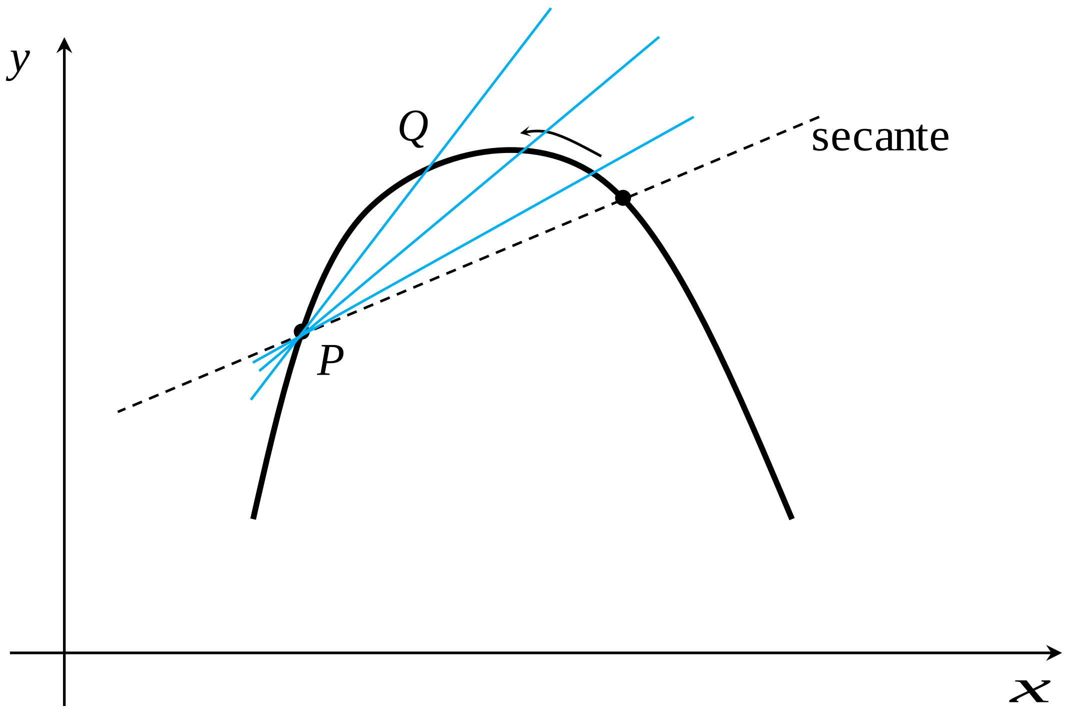
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”



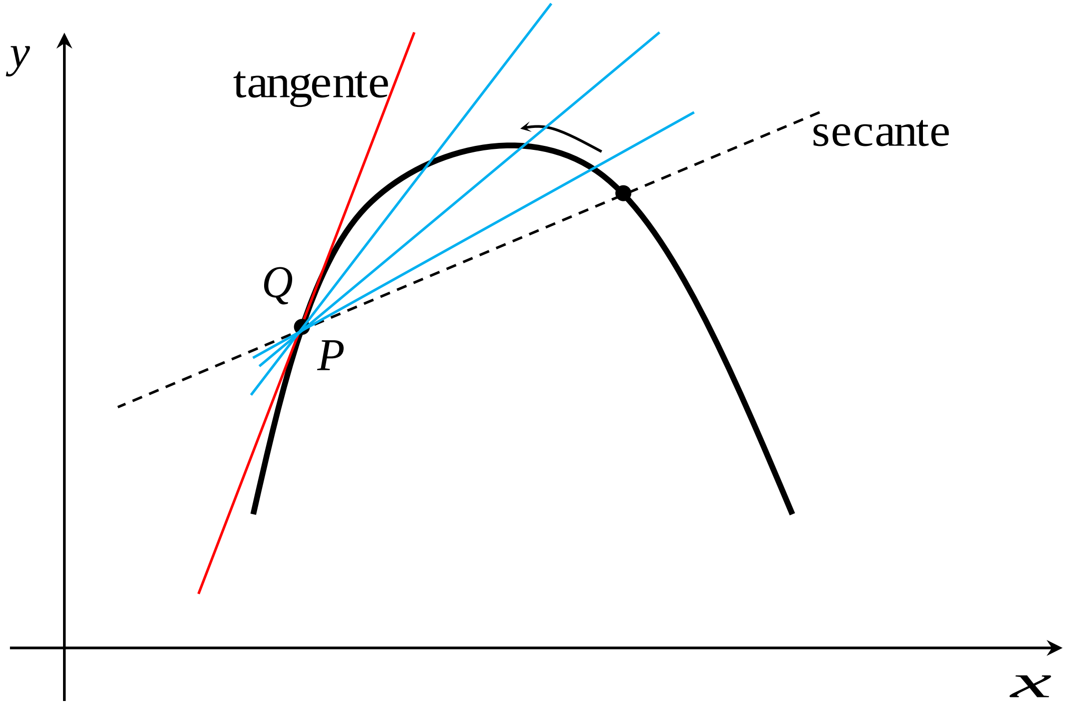
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”



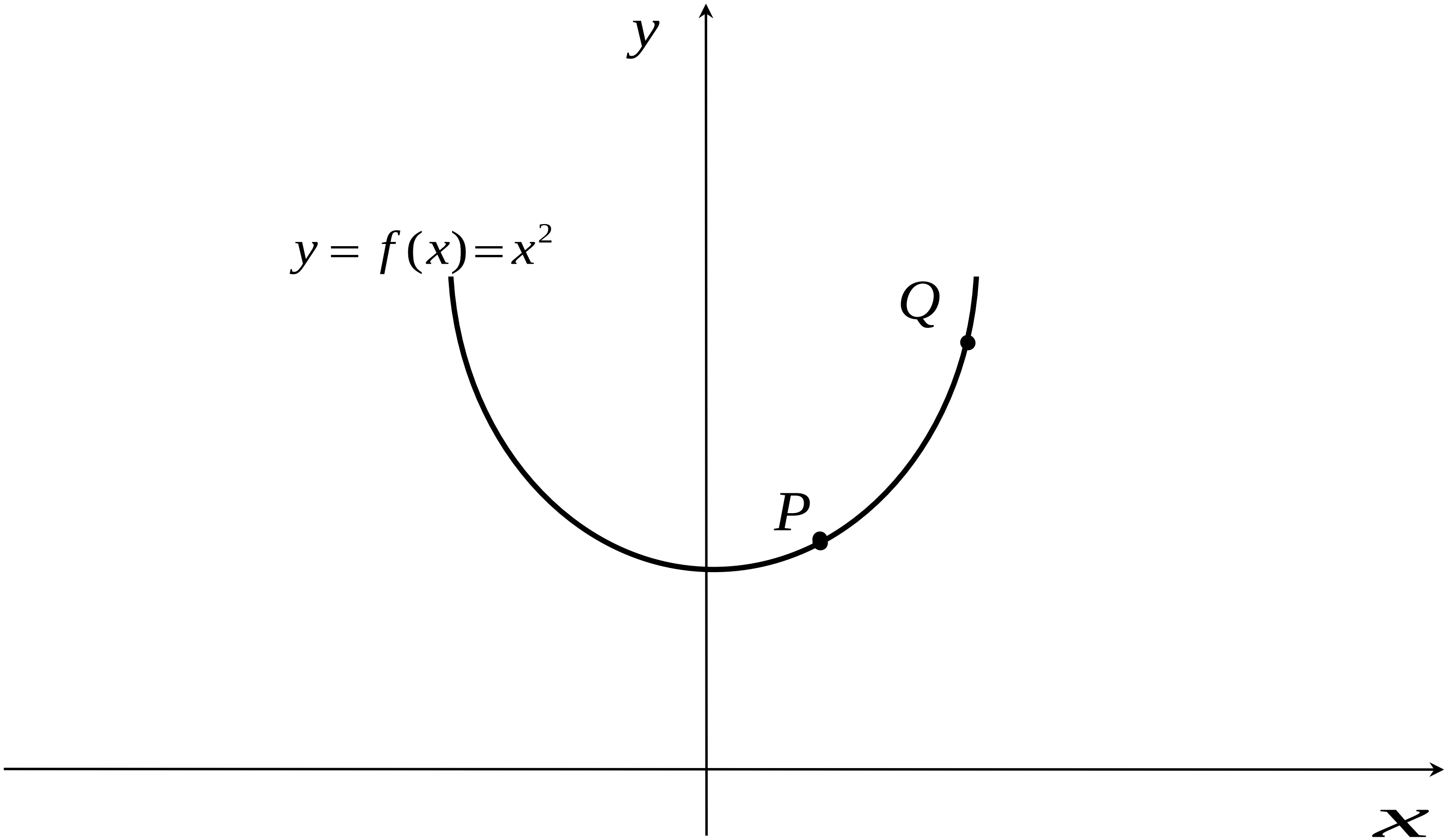
- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”

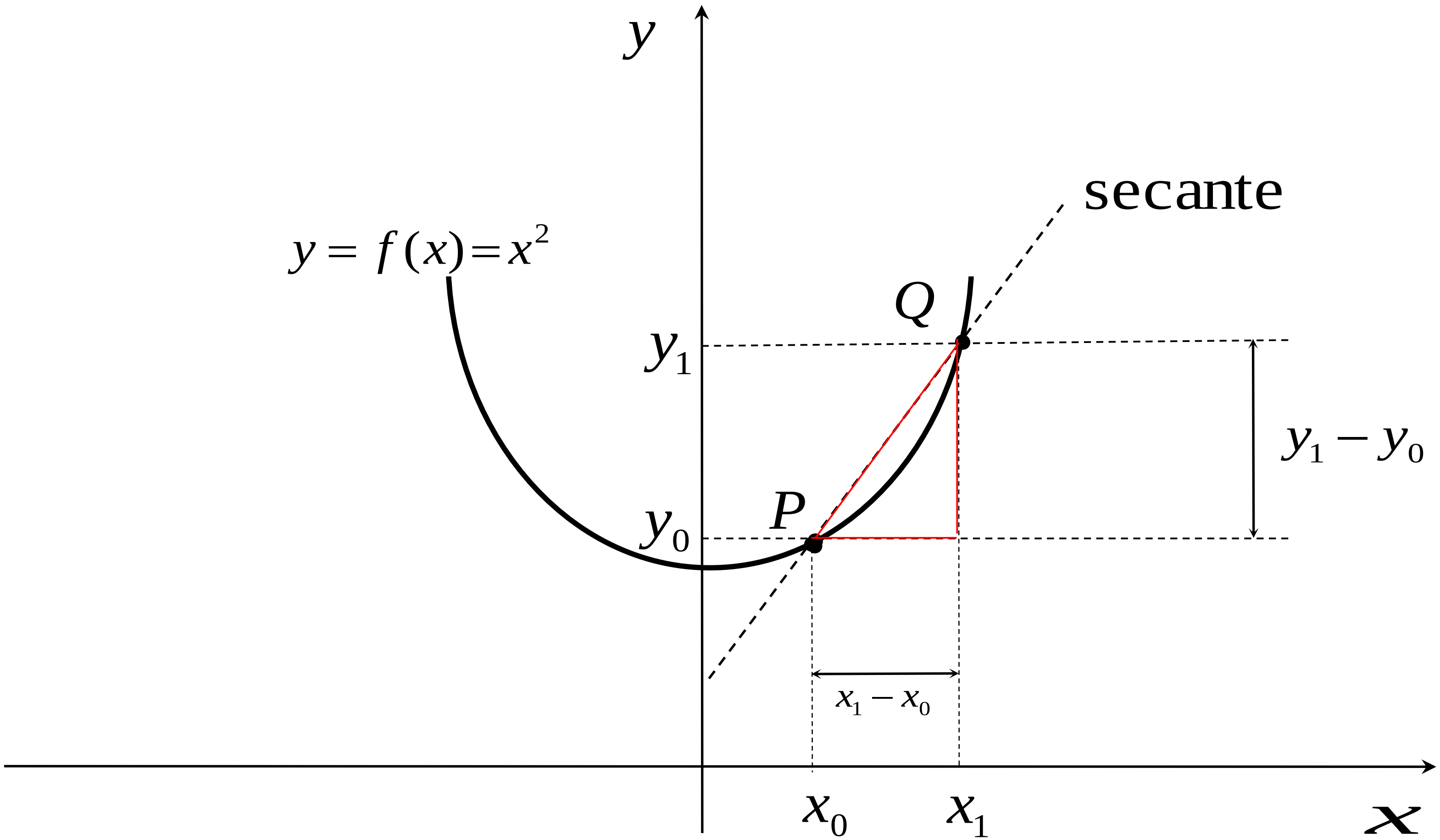


- Definição de FERMAT (1630): “a reta tangente é a posição limite da secante variável quando Q desliza na curva em direção a P”

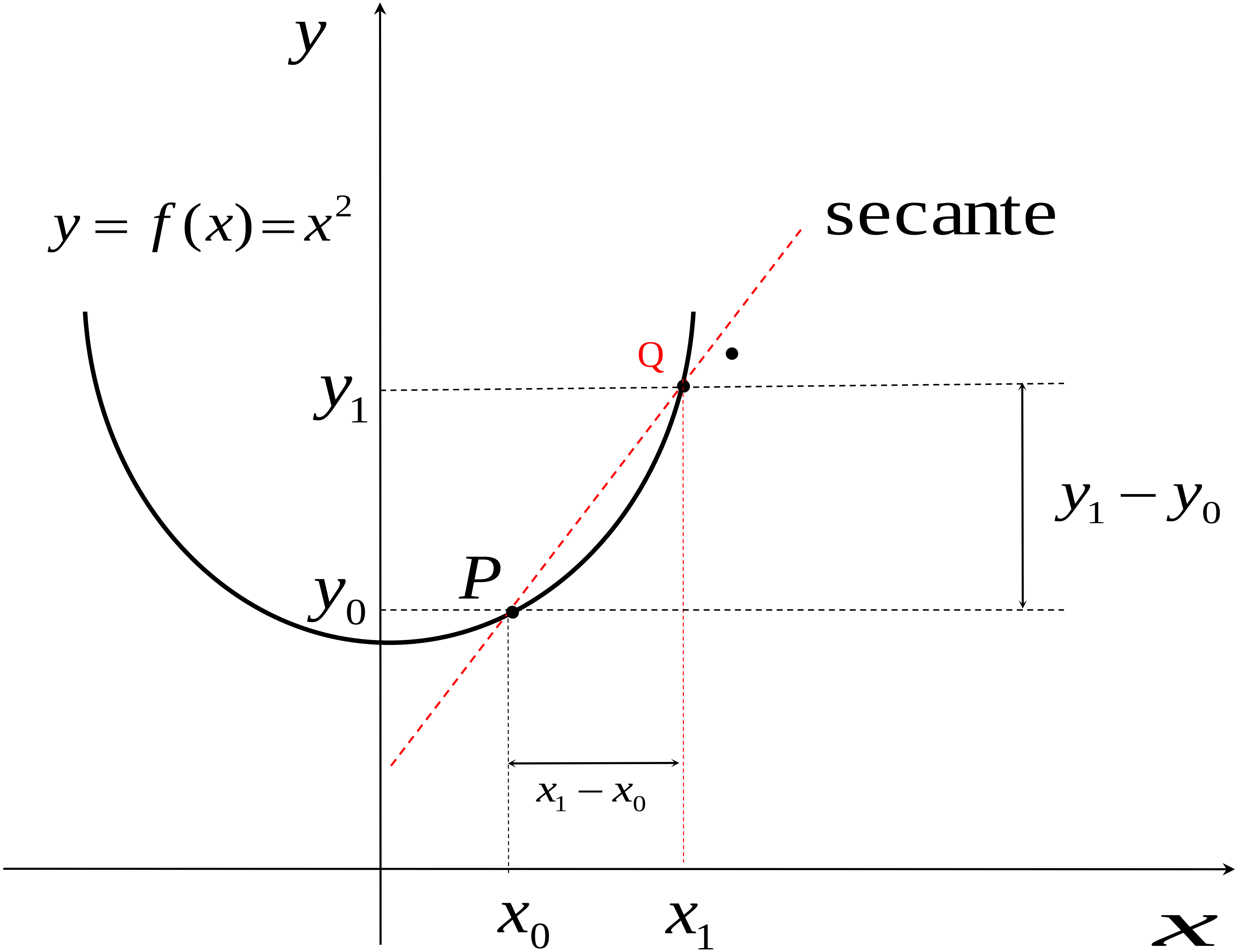


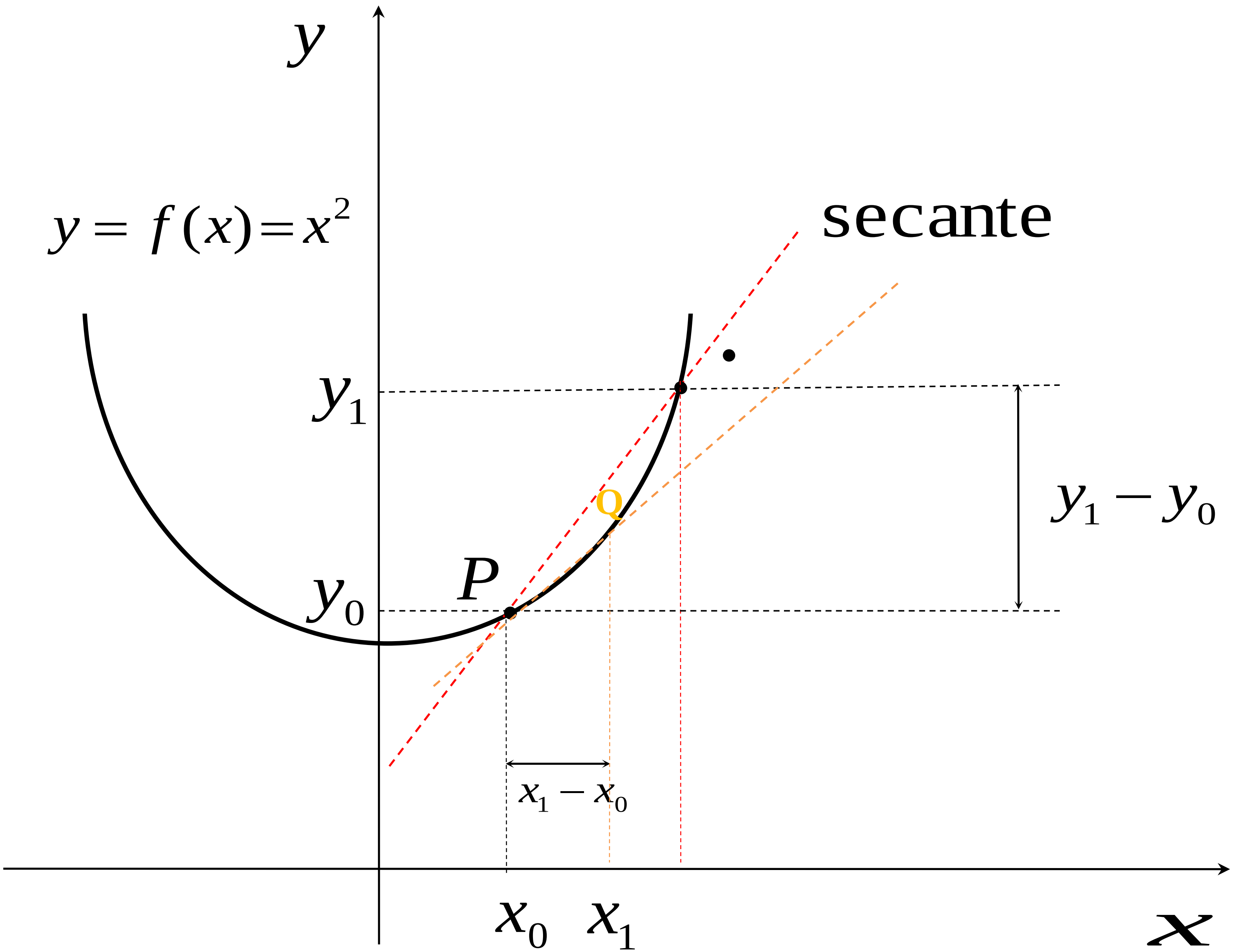
1.3 Cálculo do coeficiente angular da tangente (inclinação)



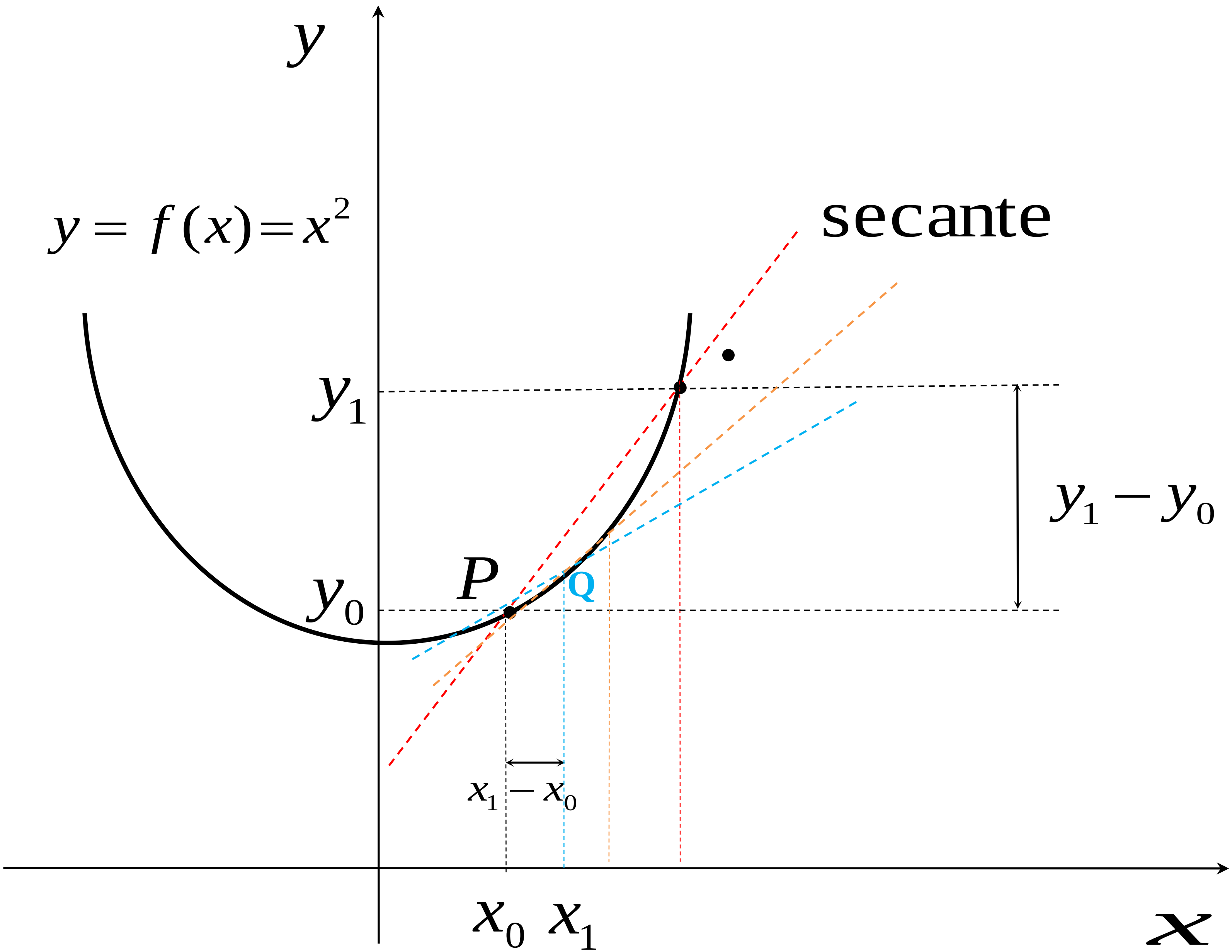


$$m_{sec} = \text{Coeficiente angular } PQ = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

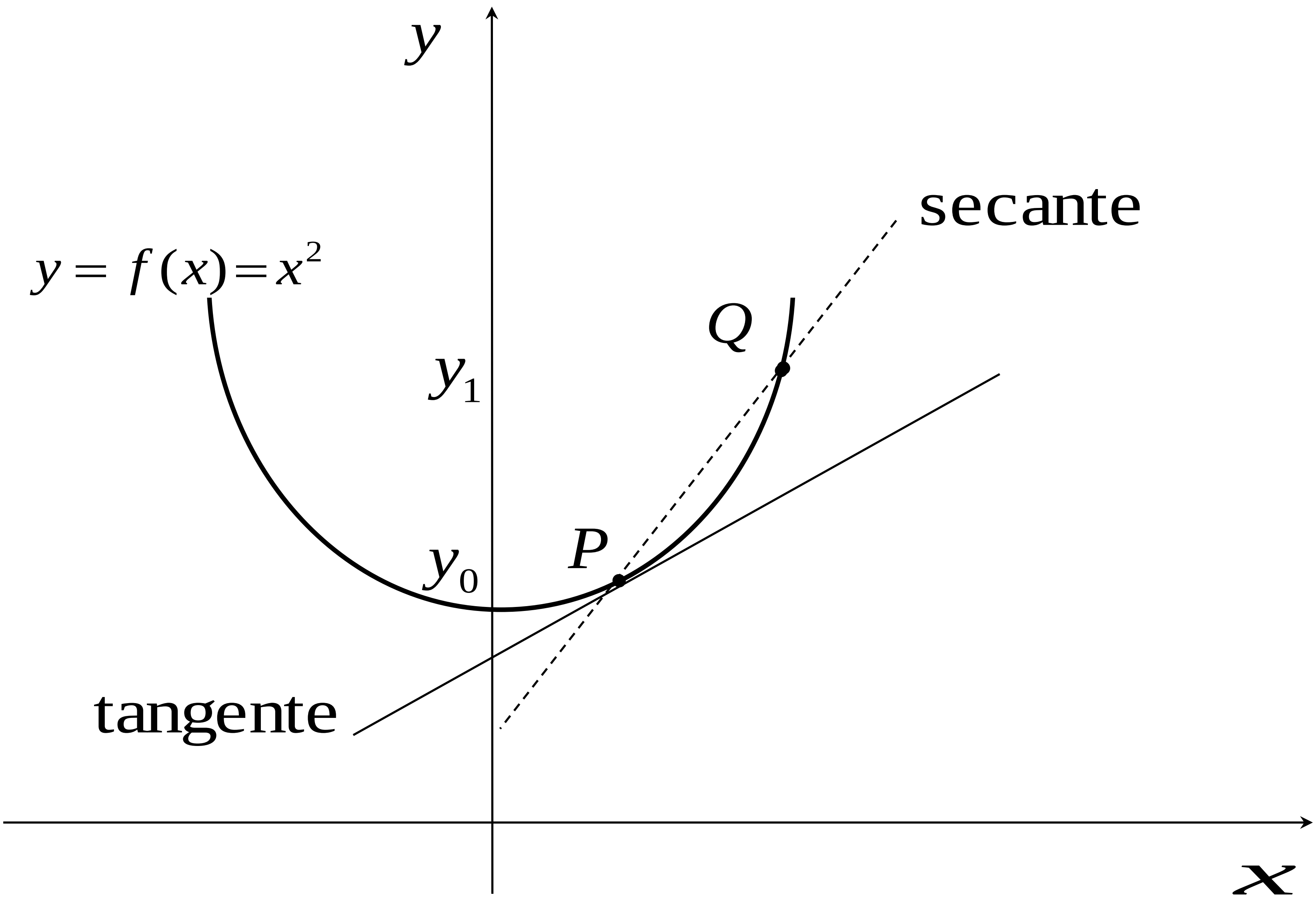

y
$y = f(x) = x^2$
secante
Q
y_1
$y_1 - y_0$
P
y_0
$x_1 - x_0$
x_0
x_1
x



y
$y = f(x) = x^2$
secante
y_1
y_0
P
Q
$y_1 - y_0$
$x_1 - x_0$
x_0
x_1
x



y
$y = f(x) = x^2$
secante
y_1
y_0
P
Q
$y_1 - y_0$
$x_1 - x_0$
x_0
x_1
x



y
secante
$y = f(x) = x^2$
Q
y_1
P
y_0
tangente
x

Coeficiente angular da tangente:

- O coeficiente angular *m* da tangente é o valor limite aproximado pelo coeficiente angular m_{sec} da secante:

$$m_{tg} = \lim_{\mathrm{Q} \to \mathrm{P}} m_{\mathrm{sec}} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$$

Formas de cálculo:

- Fatoração: contrai para monômios
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} =}$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (xo,yo)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} =}$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} = x_1 + x_0}$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} = x_1 + x_0}$$

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} = x_1 + x_0}$$

$$\boxed{m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} (x_1 + x_0) =}$$

Formas de cálculo:

- Fatoração:
- Para $y = f(x) = x^2$ achar m_{tg} para (*xo,yo*)

$$\boxed{m_{\sec} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{\cancel{(x_1 - x_0)}(x_1 + x_0)}{\cancel{x_1 - x_0}} = x_1 + x_0}$$

$$\boxed{m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} (x_1 + x_0) = 2x_0}$$

Formas de cálculo:

- Notação Δ: expande para polinômios

$$\Delta x = x_1 - x_0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_0 + \Delta x$$

Para $y = f(x) = x^2$

$$m_{\sec} = \frac{x_1^2 - x_0^2}{x_1 - x_0} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

- Expandindo o primeiro termo do numerador e simplificando o resultado, tem-se:

$$(x_0+\Delta x)^2 - x_0{}^2 = \cancel{x_0{}^2} + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x_0{}^2} =$$

$$\boxed{= 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)}$$

$$\boxed{= \Delta x(2x_0 + \Delta x)}$$

- Assim

$$m_{\sec} = \frac{\Delta x\left(2x_0 + \Delta x\right)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

- *Sendo* $x_1 \to x_0$ equivalente a $\Delta x \to 0$

$$\boxed{m = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0}$$

- EXEMPLO: Dada a função $y=\dfrac{1}{x}$, calcular o

coeficiente angular da tg no ponto (x_0, y_0) por:

- fatoração
- notação Δ
- achar a equação da reta tg para $x_0 = 2$.

$$sendo: y - y_0 = m \cdot \left(x - x_0 \right)$$

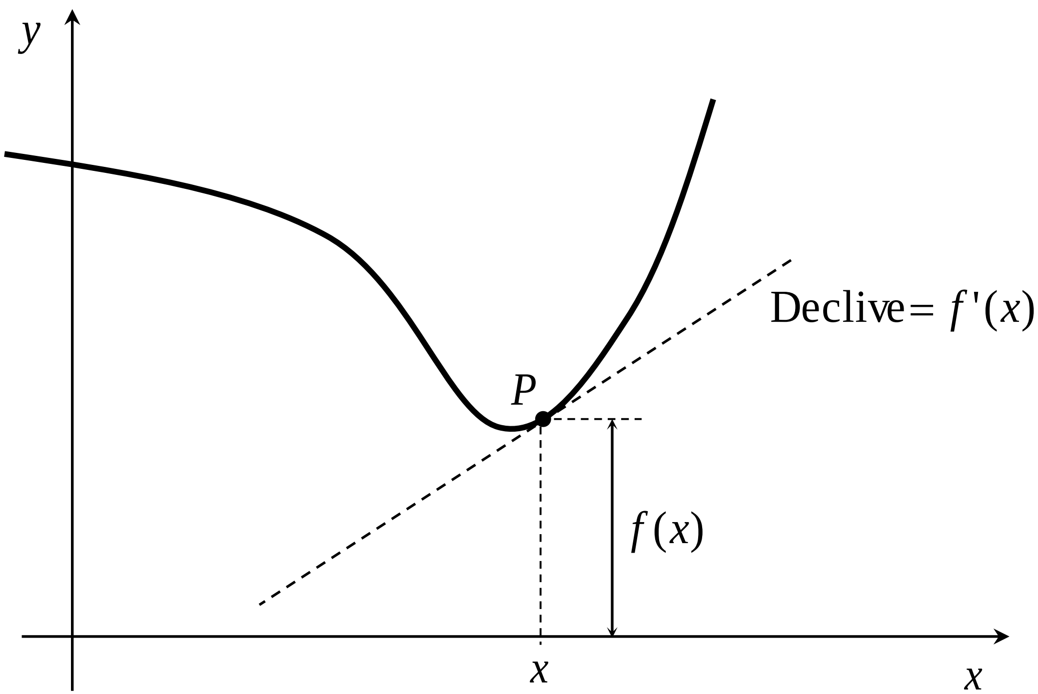
- **1.4 A derivada**

Definição

Dada uma função $f(x)$ qualquer, sua derivada $f'(x)$ é a nova função cujo valor num ponto x é definida pela equação:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

A derivada $f'(x)$ pode ser visualizada da maneira sugerida na Figura, na qual $f(x)$ é a altura variável de um ponto P se movendo ao longo da curva e $f'(x)$ é a declividade variável da reta tangente em P.



Notação

- $f'(x) = \quad y'$

- A notação criada por *Leibniz* $\qquad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

- $f'(x) = \frac{d\ f(x)}{dx}$

- Derivadas de ordem superior:

1° ordem	f’(x)	f'	y'	$\frac{d\,y}{dx}$	$\frac{d\,f(x)}{dx}$
2° ordem	f’’(x)	f‘’	y‘’	$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2\,f(x)}{dx^2}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n ordem	$F^{(n)}(x)$	$f^{(n)}$	$y^{(n)}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$	$\frac{d^n\,f(x)}{dx^n}$

- **1.4.3 Algumas regras de derivação**

- A derivada de uma constante é zero $\boxed{\dfrac{d}{dx}c = 0}$

- Se n é um inteiro positivo, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(cx)^n = c\,n\,x^{n-1}}$$

$$Exemplo: \quad \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{d\left(x^{\frac{1}{2}}\right)}{dx} = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

-

- Se c é uma constante e $w = f(x)$ é uma função derivável de x, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cw) = c\frac{dw}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}cx = c}$$

- Regra da soma: se $u = f(x)$ e $v = g(x)$ são funções de x, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v+w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx}}$$

- Regra do produto: sejam *u* e *v* funções deriváveis de *x*, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u\,v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u\,v\,w) = v\;w\;\frac{du}{dx} + u\,w\frac{dv}{dx} + u\;v\;\frac{dw}{dx}}$$

- Regra do quociente: sejam *u* e *v* funções deriváveis de *x*, então

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}}$$

em todos os valores de *x* onde $v \neq 0$

- Regra da cadeia: seja *y* uma função de *u*, onde *u*, por sua vez, é uma função de *x*, isto é $y = f(u)$, onde $u = g(x)$.

A correspondente função composta é a função $y = f(g(x))$, obtida substituindo-se $u = g(x)$ em $y = f(u)$. A derivada $\frac{dy}{dx}$ é obtida por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}}$$

- $$\boxed{\frac{d(a^x)}{dx} = \ln a \cdot a^x}$$
- $$\boxed{\frac{d(e^x)}{dx} = \underbrace{\ln e}_{1} \cdot e^x = e^x}$$
- $$\boxed{\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}}$$

- $$\boxed{\begin{gathered}\frac{d(u^v)}{dx} = u^v \cdot \left(v\,' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} u\,'\right) \\ sendo\; u(x) \quad e \quad v = v(x)\end{gathered}}$$

- **Observação: derivação implícita**

Consiste em derivar toda a expressão sem antes colocar a variável dependente y em evidencia. É útil quando for trabalhoso ou impossível colocar y em evidencia como se fosse uma função *u(x)* qualquer.

- Exemplo: $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

-

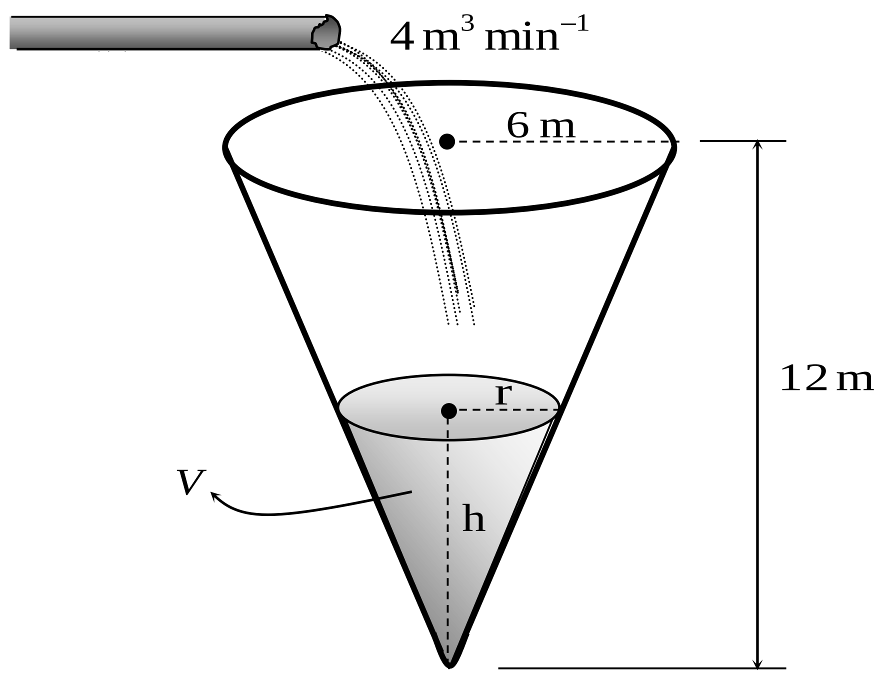
- **1.5 Algumas aplicações de derivadas**
-
- **1.5.1 Taxas de variação relacionadas**

Utiliza a regra da cadeia

Problemas que vamos considerar a seguir estão baseados em que, se duas quantidades variáveis estão relacionadas entre si, então suas taxas de variação também estarão.

Exemplo: Um reservatório em forma de cone com vértice para baixo mede 12 m de altura e tem no topo um diâmetro de 12 m. Bombeia-se água à taxa de 4 $m^3.min^{-1}$. Encontre a taxa com que o nível da água sobe:

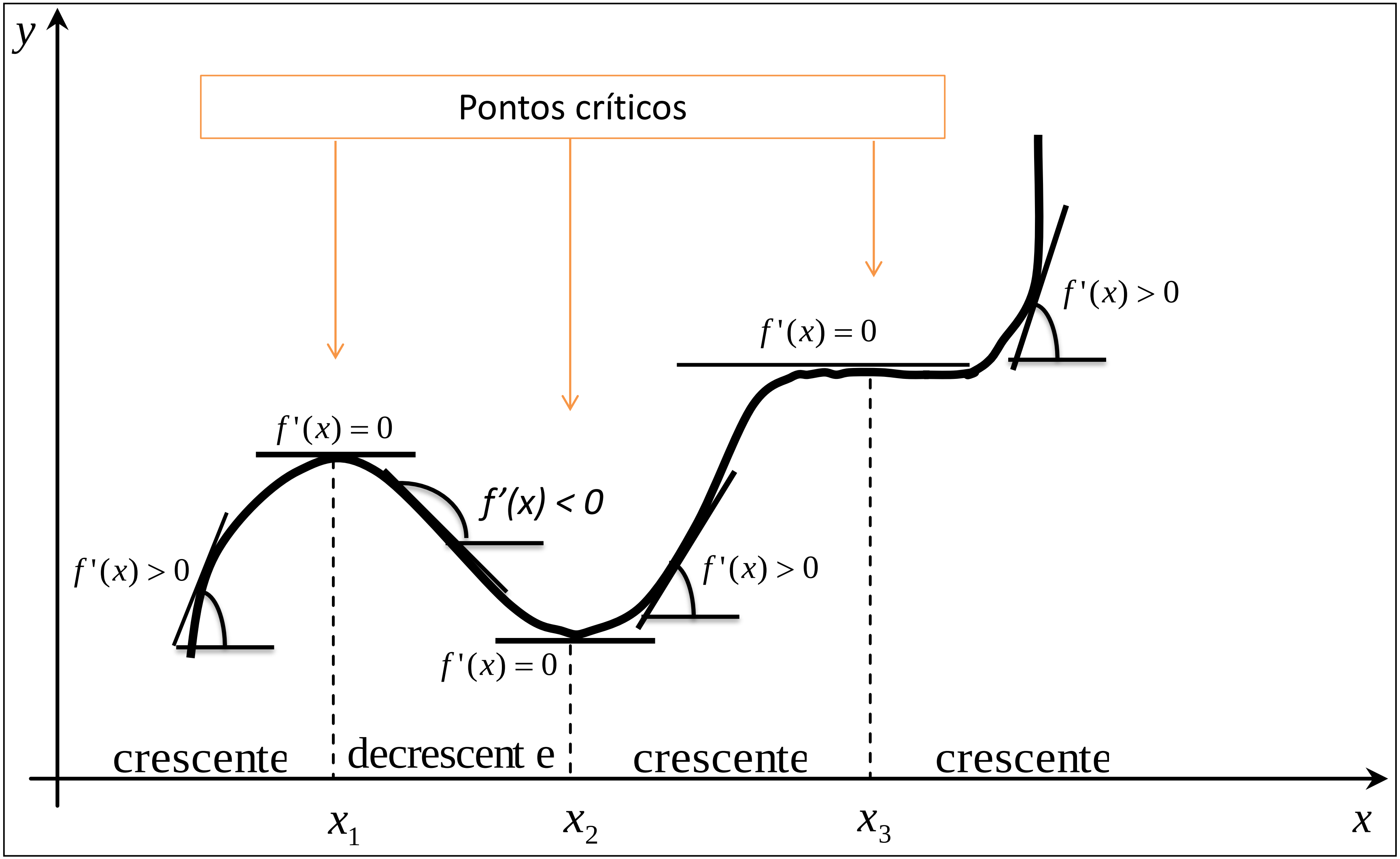
- quando a água tem 2 m de profundidade; e
- quando a água tem 8 m de profundidade.



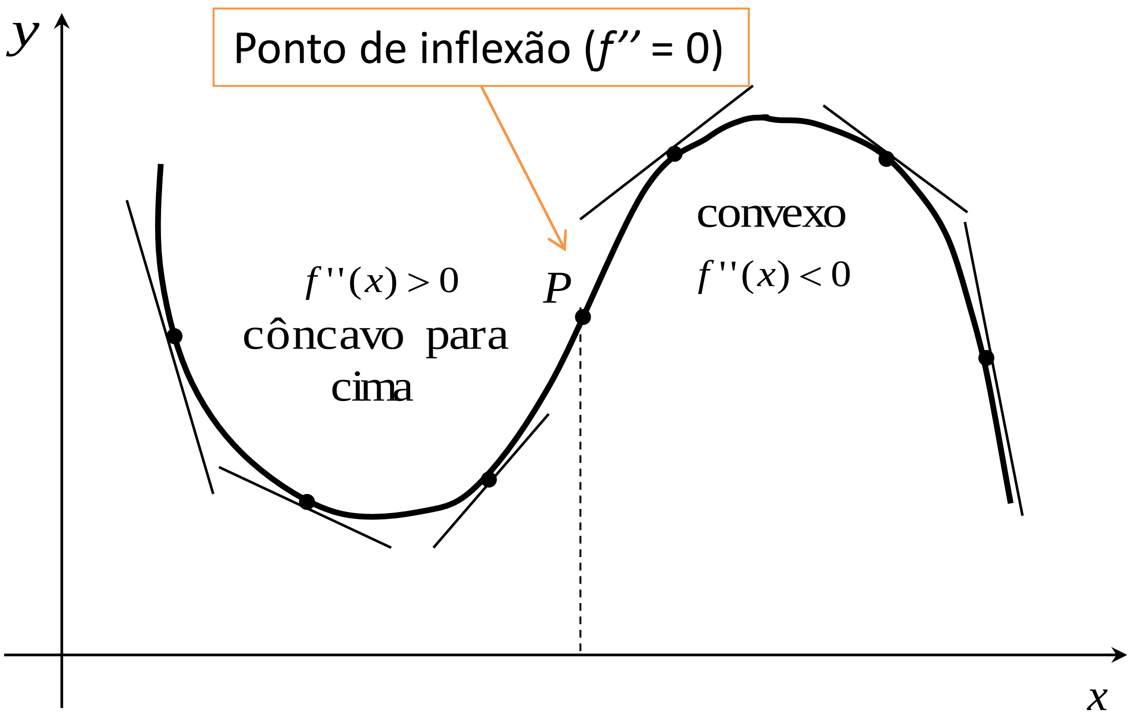
- **1.5.2 Descrevendo gráficos de funções**

- **Funções crescentes e decrescentes**
- Para esboçarmos o gráfico de uma função, é importante conhecermos os intervalos em que ela é crescente e aqueles em que ela é decrescente.

- O sinal da derivada nos dá essa informação: uma função $f(x)$:
- crescente nos intervalos em que $f'(x) > 0$
- decrescente nos intervalos em que $f'(x) < 0$

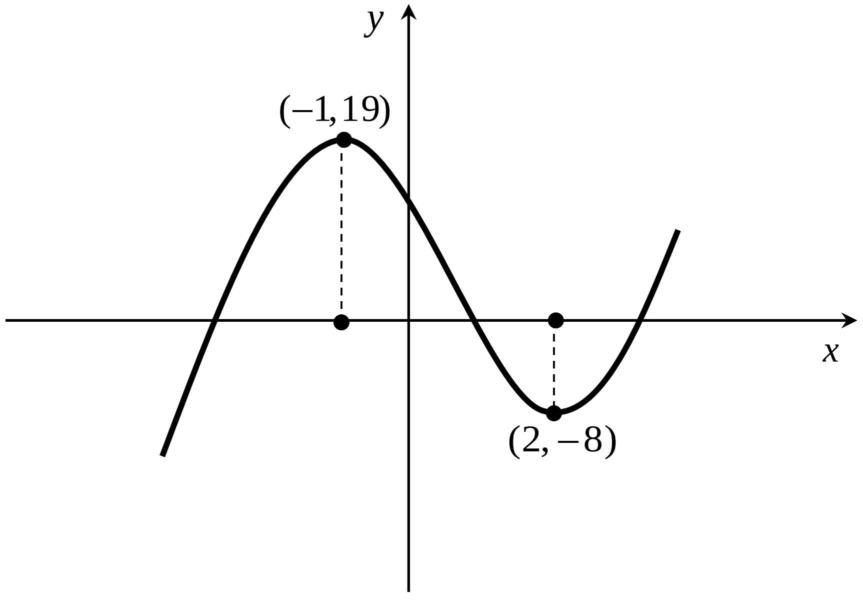

y
Pontos críticos
f'(x) = 0
f'(x) = 0
f'(x) > 0
f'(x) < 0
f'(x) > 0
f'(x) > 0
f'(x) = 0
f'(x) = 0
crescente
decrescent e
crescente
crescente
x1
x2
x3
x

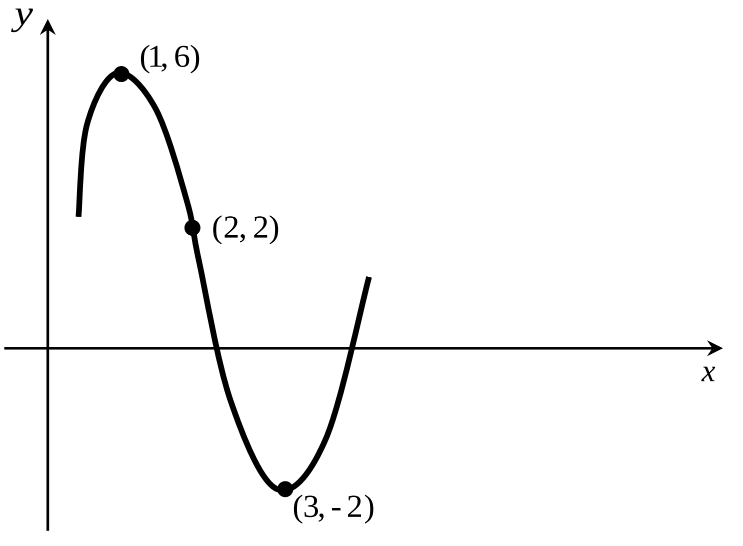
- **Concavidade e pontos de inflexão (2° derivada)**
- $f''(x_0) > 0 \rightarrow f(x)$ é côncava para cima (ou simplesmente côncava)
- $f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ e côncava para baixo (ou convexa).

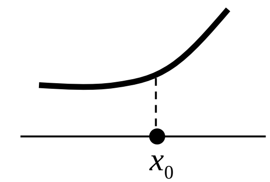
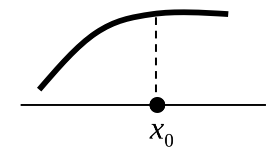
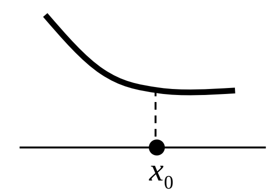
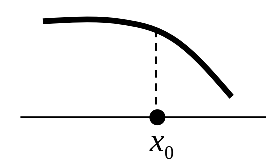


Exemplo 1.8

Analise o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$





	Condição nas derivadas	Descrição de f (x)	Gráfico de y(x) na vizinhança de x = x_0
1	$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) > 0$	*f (x)* crescente *f (x)* côncava	
2	$f'(x_0) > 0$ $f''(x_0) < 0$	*f (x)* crescente *f (x)* convexa	
3	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) > 0$	*f (x)* decrescente *f (x)* côncava	
4	$f'(x_0) < 0$ $f''(x_0) < 0$	*f (x)* decrescente *f (x)* convexa	

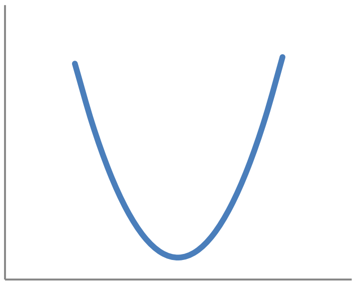
- **1.5.3 Problemas de Otimização**

- Busca valores máximo ou mínimo de funções.

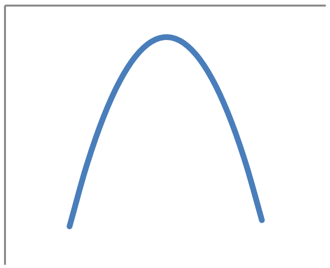
- Otimizar a função objetivo
  - Maximizar a vantagem
  - Minimizar a desvantagem

- O procedimento consiste em achar o ponto crítico ($f'(x) = 0$). Obter em seguida a segunda derivada ($f''(x)$). Sendo:

- Se $f''(x) > 0$ concavidade para cima
- indicando ponto de mínimo

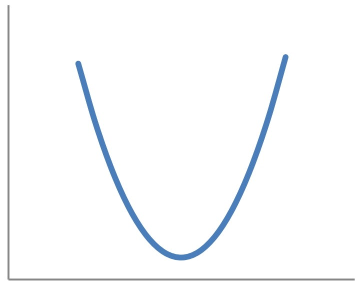


- Se $f''(x) < 0$ concavidade para baixo
- indicando ponto de máximo



- O procedimento consiste em achar o ponto crítico (*f'(x) = 0*). Obter em seguida a segunda derivada (*f''(x)*). Sendo:

- Se *f''(x)* > 0 concavidade para cima
- indicando ponto de mínimo



- Se *f''(x)* < 0 concavidade para baixo
- indicando ponto de máximo