2.5 Algumas técnicas de integração

São 3 mais importantes:

- Por partes → quando tem produto de 2 funções

- Por substituição trigonométrica

- Por frações parciais → quando tem polinômio no denominador

2.5.1 Integração por partes

- Ocorre quando existe o produto de 2 funções:

$$y = u.v \quad \begin{cases} u = u(x) \\ v = v(x) \end{cases}$$

- Exemplo: $\int x.\ln x \; dx$

- Pode derivar fixando x e usar a regra do produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = du.v + u.dv$$

- Pode derivar fixando x e usar a regra do produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = du.v + u.dv$$

- Integrando: $$\int dy = \int du.v + \int u.dv$$

- Pode derivar fixando x e usar a regra do produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} v + u \frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = du.v + u.dv$$

- Integrando: $$\int dy = \int du.v + \int u.dv$$

$$y = \int du.v + \int u.dv$$

- Pode derivar fixando x e usar a regra do produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = du.v + u.dv$$

- Integrando:

$$\int dy = \int du.v + \int u.dv$$

$$y = \int du.v + \int u.dv$$

$$u.v = \int du.v + \int u.dv$$

- Pode derivar fixando x e usar a regra do produto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow dy = du.v + u.dv$$

- Integrando:

$$\int dy = \int du.v + \int u.dv$$

$$y = \int du.v + \int u.dv$$

$$u.v = \int du.v + \int u.dv$$

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

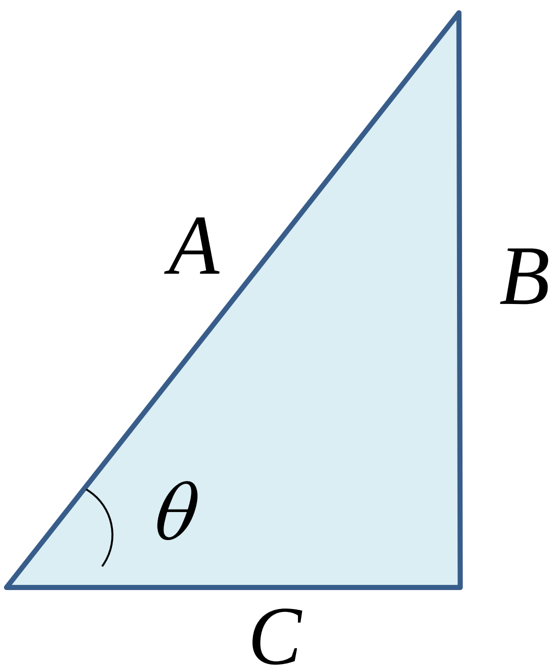
- Resolvendo nosso exemplo: $\int x . \ln x \; dx$

- Supor u = ln x

  dv = x dx

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- Recordando relações trigonométricas:

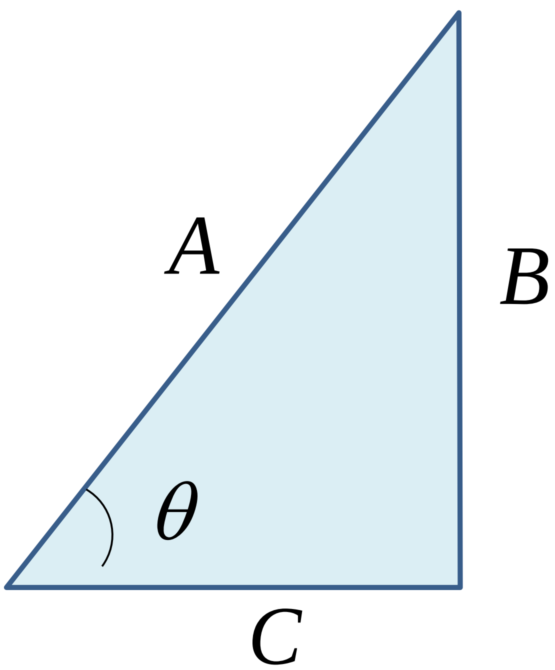


$$Pitágoras: A^2 = B^2 + C^2$$

$sen\theta = \frac{B}{A}$	$\cos\theta = \frac{C}{A}$	$tg\theta = \frac{B}{C}$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- Recordando relações trigonométricas:



$$\boxed{ctg\theta = \frac{1}{tg\theta}}$$

$$\boxed{\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}}$$

$$\boxed{sen^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$$\boxed{1 + tg^2\theta = \sec^2\theta}$$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- Propriedades de potenciação:

$$a^p \,.\, a^q = a^{p+q}$$

$$(a^p)^q = a^{p.q}$$

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

$$a^0 = 1 \; para \;\; a \neq 0$$

$$(a.b)^q = a^q.b^q$$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- Propriedades de radiciação:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

$$\sqrt[q]{a} \,.\, \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{a.b}$$

$$\sqrt[q]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}}$$

$$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$$

- Propriedades dos logaritmos:

$$\log_a M.N = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{1}{m}.\log_a N$$

$$\log_a N^m \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

- Integrais imediatas para u = u(x):

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{u-a}{u+a} + C$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{a+u}{a-u} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right) + C$$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- 3 casos principais:

$$1 \rightarrow \sqrt{a^2 - u^2} \quad ou \quad a^2 - u^2 \quad substitui \quad por \quad sen\,\theta$$

- Exemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- 3 casos principais:

$$2 \rightarrow \sqrt{a^2 + u^2} \quad ou \quad a^2 + u^2 \quad substitui \quad por \quad tg\theta$$

- Exemplo:

$$\int \frac{e^{-x} dx}{(9e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

2.5.2 Integração por substituição trigonométrica

- 3 casos principais:

$$3 \rightarrow \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} \qquad substitui\ por\ \sec\theta$$

- Exemplo:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

2.5.3 Integração por frações parciais

- Assim como duas frações podem ser somadas:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

- Uma fração pode ser desdobrada:

$$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$$

- Desdobraremos: $$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx\,,$$

- Quando: $q(x) \neq 0$

  o grau de $p(x)$ < o grau de $q(x)$.

- Na decomposição $q(x)$ é fatorado. Ou seja, é realizada operação de escrever o polinômio como um produto de fatores.

- Fatores: lineares, quadráticos ou os dois tipos conjuntamente. Exemplo:

1) Fatores lineares que não se repetem:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

2) Fatores lineares que se repetem:

$$x^3-3x+2=(x-1)(x-1)(x+2)$$

3) Fatores quadráticos que não se repetem:

$$x^3+x=x(x^2-1)$$

4) Fatores quadráticos que se repetem:

$$x^5+2x^3+x=x(x^2+1)(x^2+1)$$

- Quando grau de p(x) ^{3} grau de q(x), efetuaremos uma divisão antes da decomposição de frações parciais.

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & m(x) \end{array}$$

- R(x) sempre tem grau menor que q(x).

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{q(x)\cdot m(x)+R(x)}{q(x)} = m(x) + \frac{R(x)}{q(x)} \quad (exemplo1)$$

- **Temos basicamente 4 casos:**

1) Fatores lineares que não se repetem:

$$\frac{p(x)}{x^2-5x+6} = \frac{a}{(x-2)} + \frac{b}{(x-3)}$$

$$\frac{p(x)}{x^2\ \ +1} = \frac{a}{(x+1)} + \frac{b}{(x-1)}$$

2) Fatores lineares que se repetem:

$$\frac{p(x)}{x^3-3x+2} = \frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+2)}$$

- **Temos basicamente 4 casos:**

3) Fatores quadráticos que não se repetem:

$$\frac{p(x)}{x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+1)}$$

2) Fatores quadráticos que se repetem:

$$\frac{p(x)}{x^5+2x^3+x} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(x^2+1)} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}$$