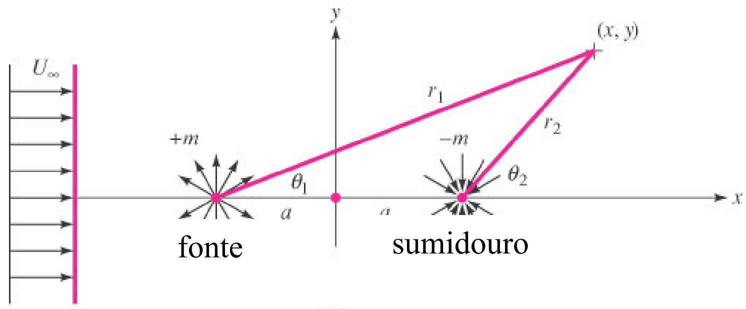
Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Terceira Prova - 2019

1. (**5,0 pontos**) Uma oval de Rankine de comprimento $2L$ e espessura $2h$ é o resultado da superposição de uma corrente uniforme U_∞, uma fonte e um sorvedouro, como na figura. São conhecidas as intensidades $\pm m$ da fonte e sumidouro e a distância a.

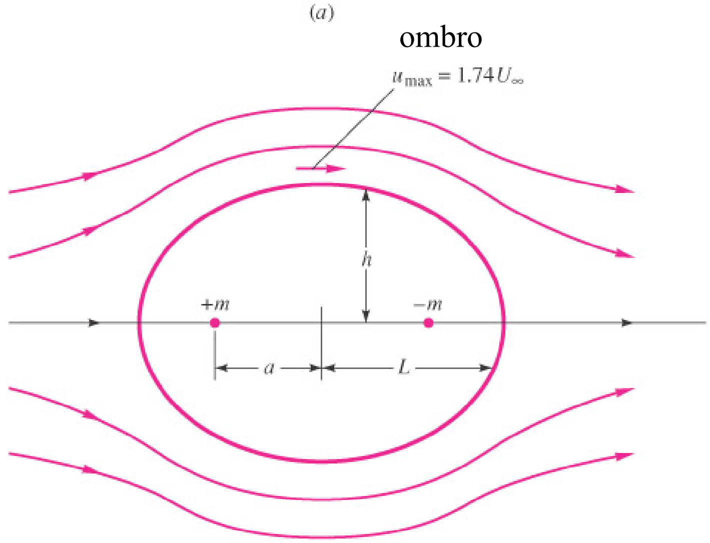
a) Demonstrar que $\dfrac{L}{a} = (1+2\beta)^{1/2}$, onde $\beta = \dfrac{m}{U_\infty a}$. Dica: os narizes da oval são pontos de estagnação. (1 ponto)

b) Demonstrar que a altura h pode ser calculada resolvendo a equação trascendente $\dfrac{h}{a} = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{1}{2\beta}\dfrac{h}{a}\right)$. Dica: o valor da linha de corrente no borde superior da oval é $\psi_{sup} = 0$ (2 pontos)

c) Demonstrar que a velocidade máxima na superfície da oval vale $\dfrac{u_{max}}{U_\infty} = 1 + \dfrac{2\beta}{1+\left(\dfrac{h}{a}\right)^2}$. Dica: em que pontos a velocidade será máxima? (2 pontos)



(a)



(b)

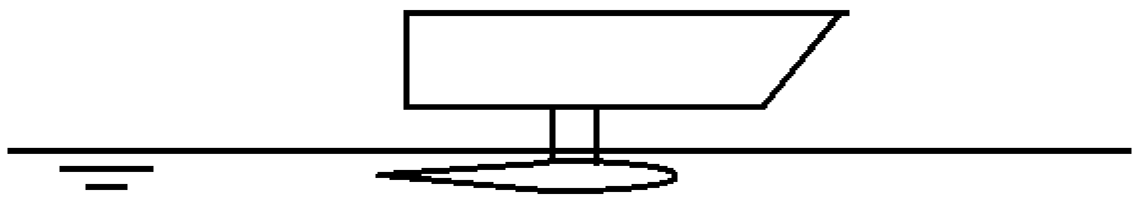
Dados: Função corrente para oval de Rankine: $\psi = U_\infty r \operatorname{sen}\theta + m(\theta_1 - \theta_2)$

Velocidade induzida por uma fonte ou sumidouro: $v_r = \pm\dfrac{m}{r}$, onde r é a posição radial desde a origem da fonte ou sumidouro.

Ajuda para o cálculo: $\operatorname{tg}\left(\gamma + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\gamma$

2. (3,0 pontos) Uma aeronave de peso $m\,g$ possui uma asa com coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita $C_{D\infty}$, área planiforme A_p e razão de aspecto RA. Em cruzeiro voa na condição em que a relação C_L/C_D é máxima, ou seja, $C_D = 2C_{D\infty}$. Ache a expressão da força de arrasto D na asa como função de $m\,g$, $C_{D\infty}$ e RA.

3. (2,0 pontos) Um barco com peso $m\,g$ é suportado por um hidrofólio simétrico (sem arqueamento) de razão de aspecto RA e área planiforme A_p. O coeficiente de arrasto para razão de aspecto infinita do perfil do hidrofólio é $C_{D\infty}$. Por meio de um sistema de controle, o ângulo de ataque α é ajustado para diferentes condições de operação, tanto para uma velocidade de cruzeiro ótima quanto para uma velocidade máxima $U_{\max}$. O barco navega em água de massa específica ρ. Suponha que o motor é capaz de fornecer uma potência $W_{\max}$. Obtenha uma expressão que relacione $W_{\max}$ com $U_{\max}$, $m\,g$, RA, A_p, $C_{D\infty}$ e ρ. Considere que todo o arrasto é devido apenas ao hidrofólio.



Dados para as questões 2 e 3:

$D = \frac{1}{2}\rho U^2\, C_D A_p$; D *é* a força de arrasto

$L = \frac{1}{2}\rho U^2\, C_L A_p$; L é a força de sustentação

$C_D = C_{D\infty} + \dfrac{C_L^2}{\pi\ RA}$ (C_D é o coeficiente de arrasto)

$C_L = \dfrac{2\pi(\alpha+\beta)}{1+\dfrac{2}{RA}}$ onde $\beta = \mathrm{arc\,tg}\dfrac{2h}{c}$, h é o arqueamento (cambagem) máximo e c é a corda.

Nesta última expressão, α e β estão em radianos. C_L é o coeficiente de sustentação.

$RA = \dfrac{b}{\bar{c}} = \dfrac{b^2}{A_p}$ onde b é a envergadura, A_p é a área planiforme e $\bar{c}$ é a corda média.

Gabarito

1. Solução:

a) Sabendo que o nariz na frente é um ponto de estagnação e que a velocidade é puramente radial na linha de corrente que chega no nariz, a superposição das velocidades da corrente livre e da fonte (a uma distância $L-a$ e sumidouro a uma distância $L+a$ fornece:

$$-U_\infty + \frac{m}{L-a} - \frac{m}{L+a} = 0 \quad \Rightarrow \quad U_\infty = \frac{m(L+a) - m(L-a)}{L^2 - a^2} = \frac{2\,m\,a}{L^2 - a^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2}{L^2 - a^2}\frac{m}{U_\infty\, a}a^2$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{L}{a}\right)^2 - 1 = 2\beta \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{a} = (1+2\beta)^{1/2}$$

b) A linha de corrente do eixo horizontal e na superfície da oval deve valer $\psi_{\text{sup}} = 0$. Da função corrente para o corpo de Rankine, na posição $(x=0, y=h)$, resulta:

$$\left.\begin{matrix} \theta_1 + \theta_2 = \pi \\ \theta_1 - \theta_2 = \alpha \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad 2\theta_1 = \pi + \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \theta_1 - \theta_2 = 2\theta_1 - \pi$$

$$tg\,\theta_1 = \frac{h}{a} \quad \Rightarrow \quad \theta_1 = \text{arctg}\left(\frac{h}{a}\right)$$

Substituindo na função corrente para o ponto $(x=0, y=h)$, resulta

$$0 = U_\infty\, h + m\left[2\,\text{arctg}\left(\frac{h}{a}\right) - \pi\right] \quad \Rightarrow \quad \text{arctg}\left(\frac{h}{a}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{U_\infty\, h}{m}\right) + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{h}{a}\left(\frac{m}{U_\infty\, a}\right)^{-1}\right] + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2\beta}\frac{h}{a} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{h}{a} = \text{tg}\left(-\frac{1}{2\beta}\frac{h}{a} + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{cotg}\left(-\frac{1}{2\beta}\frac{h}{a}\right) = \text{cotg}\left(\frac{1}{2\beta}\frac{h}{a}\right)$$

c) A velocidade máxima acontece no ombro da oval. Superpondo a velocidade da corrente livre, fonte e sumidouro (de igual valor ao da fonte na direção horizontal), resulta:

$$u_{\text{max}} = U_\infty + 2\frac{m}{(h^2 + a^2)^{1/2}}\cos\theta_1 = U_\infty + \frac{2\,m\,a}{h^2 + a^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{\text{max}}}{U_\infty} = 1 + \frac{2\,m\,a}{U_\infty (h^2 + a^2)} = 1 + 2\left(\frac{m}{U_\infty\, a}\right)\left[1 + \left(\frac{h}{a}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\frac{u_{\text{max}}}{U_\infty} = 1 + \frac{2\beta}{1 + \left(\dfrac{h}{a}\right)^2}$$

2. Solução

Temos que o coeficiente de arrasto é:

$$C_D = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA} = 2C_{D\infty}$$

Disso resulta:

$$C_L = \sqrt{\pi RA C_{D\infty}}$$

Assim, se D é a força de arrasto e L é a força de sustentação:

$$\frac{C_D}{C_L} = \frac{D}{L} = \frac{2C_{D\infty}}{\sqrt{\pi RA C_{D\infty}}}$$

Mas a força de sustentação tem que ser igual ao peso mg, portanto:

$$\boxed{D = 2mg\sqrt{\frac{C_{D\infty}}{\pi RA}}}$$

3. Solução

A potência máxima será:

$$W_{\max} = Fa.U_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^3 C_D A_p$$

Substituindo o coeficiente de arrasto na expressão acima:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^3\left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi RA}\right)A_p$$

Por outro lado, a sustentação tem que contrabalançar o peso. Assim, $L = mg$:

$$C_L = \frac{2mg}{\rho U_{\max}^2 A_p}$$

Substituindo esta última expressão na anterior:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}\rho U_{\max}{}^{3}\left(C_{D\infty} + \frac{4m^2 g^2}{\rho^2 \pi\, RA\, A_p^2}\frac{1}{U_{\max}{}^{4}}\right)A_p$$

Assim:

$$\boxed{W_{\max} = \frac{1}{2}\rho\, C_{D\infty} A_p\, U_{\max}{}^{3} + \frac{2m^2 g^2}{\rho\, \pi\, RA\, A_p}\frac{1}{U_{\max}}}$$