ECF5703 – Complementos de Eletromagnetismo – 2019

Prof.ª. Valéria Dias e Suzana Salem

Discentes: Fábio Cruz, Marcia Almeida, Taynara Nassar

ONDAS ELETROMAGNÉTICAS NO VÁCUO

Nome: ____

A partir das equações de Maxwell é possível mostrar que os campos elétrico e magnético obedecem a equação de onda. Além disso, as equações de Maxwell determinam as propriedades das ondas eletromagnéticas, como a velocidade de propagação no vácuo que pode ser expressa por $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

As equações de Maxwell no vácuo, onde não existe acúmulo de cargas e nem corrente elétrica ($\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$), são:

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(II)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(III)}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \qquad \text{(IV)}$$

Nas leis de Faraday e de Ampère – Maxwell, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão acoplados. Queremos escrever uma equação para $\vec{E}$ e outra para $\vec{B}$. Vamos fazer isso a partir do cálculo do duplo rotacional de $\vec{E}$ e do duplo rotacional de $\vec{B}$.

Usando as leis de Faraday (eq. II) e da lei de Ampère Maxwell (eq.III):

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \qquad \text{(V)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad \text{(VI)}$$

Utilizando-se as propriedades do rotacional, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(VII)}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

Onde as eq. VII e VIII são as equações de onda para os campos elétricos e magnéticos, respectivamente.

Apesar da separação nas equações acima, é importante ressaltar que não existem ondas puramente elétricas ou puramente magnéticas, já que o acoplamento entre $\vec{E}$ e $\vec{B}$ é determinado pelas equações de Maxwell (leis de Faraday e de Ampère-Maxwell). Com os valores conhecidos de μ_0 e ϵ_0 obtém-se a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 m/s^2$, o mesmo valor da velocidade da luz.

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}}$$

1. Em que mudariam as equações de onda do campo elétrico e do campo magnético se não existisse o termo correspondente a corrente de deslocamento nas equações de Maxwell? Quais seriam as possíveis consequências físicas dessa situação?

   Resp.: Se não houvesse corrente de deslocamento, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não obedeceriam às equações de onda. Além disso, é importante perceber que poderia existir $\vec{E}$ criado por cargas e $\vec{B}$ por uma corrente constante.

2. Qualquer solução da equação de onda representa uma onda eletromagnética?

Resp.: Não, apesar de termos diversas soluções que satisfazerem matematicamente a equação de onda, estas devem satisfazer todas as equações de Maxwell

As soluções das equações de onda VII e VIII envolvem o tempo e as três coordenadas espaciais, o que torna a sua resolução complicada. Porém, segundo o princípio da superposição, qualquer onda, por mais complicada que seja, pode ser decomposta em ondas planas monocromáticas.

Uma onda eletromagnética será plana se $\vec{E}$ e $\vec{B}$ forem constantes nos planos perpendiculares à direção de propagação da onda, e será monocromática, se tiver uma frequência bem definida.

Para o caso de uma onda que se propaga na direção y a eq. VII. fica:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(IX)}$$

Bem mais simples, né?

e uma possível solução para eq. IX é:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\kappa y \pm \omega t) \qquad \text{(X)}$$

onde $\overrightarrow{E_0}$ é um vetor constante que descreve a amplitude da onda. O período T e o comprimento de onda λ estão relacionados aos parâmetros ω e κ através das equações $\omega = \frac{2\pi}{T}$ e $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Sabemos que as soluções da equação de onda para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem obedecer às quatro equações de Maxwell. Assim, no exemplo do campo elétrico, a solução da eq. IX ($\vec{E} = \overrightarrow{E_0} \cos(\kappa y \pm \omega t)$) deve satisfazer a lei de Gauss $(\vec{\nabla} . \vec{E}) = 0$.

3. Impondo $\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$, o que se conclui sobre o campo elétrico da onda?

Resp.: Se considerarmos uma função qualquer $\vec{E} = \overrightarrow{E_0}\cos(\vec{\kappa}\vec{r} \pm \omega t)$, onde $\vec{r} = (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})$ ao aplicarmos o divergente podemos perceber que não existe uma componente do campo elétrico paralela a direção de propagação. Por exemplo, uma onda que se propaga na direção y:

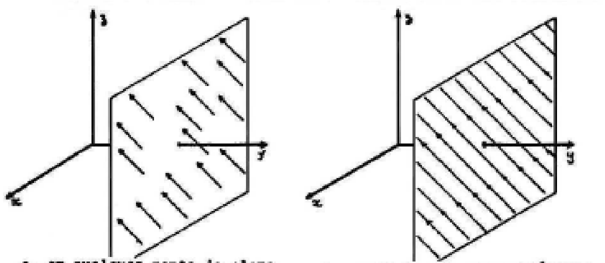
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Podemos concluir que, independente da direção de propagação da onda, o campo elétrico e o campo magnético serão perpendiculares a direção de propagação.

Em relação às características das ondas planas monocromáticas que estejam se propagando, por exemplo, na direção y, podemos afirmar:

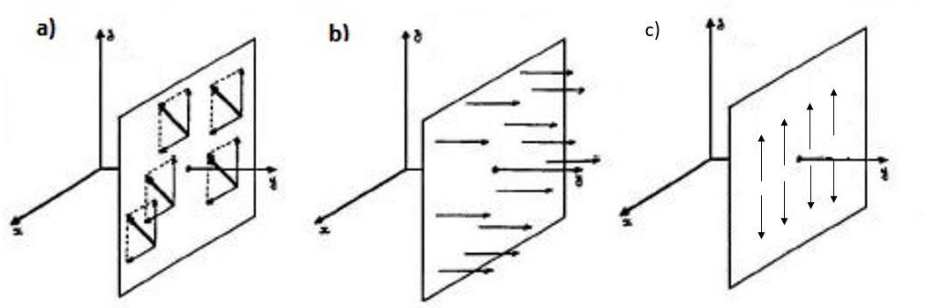
- Em qualquer ponto do plano perpendicular ao eixo y o campo elétrico, representado pelas setas da figura abaixo, é sempre o mesmo (módulo, direção e sentido);
- As linhas de campo elétrico estão igualmente espaçadas sobre o plano;
- O campo elétrico não tem componente na direção *y*.



a. em qualquer ponto do plano perpendicular ao eixo y o campo elétrico, representado pelas setas, é constante.

b. as linhas de campo elétrico estão igualmente espaçadas sobre o plano.

4. Na figura abaixo temos três possíveis representações do vetor campo elétrico de uma onda eletromagnética que se propaga na direção positiva do eixo y. As figuras **a)**, **b)** e **c)** podem representar corretamente o campo elétrico de uma onda plana? Justifique.



Resp.: O vetor campo elétrico é ortogonal à direção de propagação da onda. Desta forma, a figura a) é uma representação correta, a figura b) é uma representação incorreta ($\vec{E}$ está na mesma direção da propagação) e a figura c) também é uma representação incorreta (mesmo sendo ortogonal à direção de propagação, $\vec{E}$ não é constante no plano).

Como sabemos, a onda eletromagnética é descrita por campos elétricos e magnéticos acoplados. Conhecendo a expressão para $\vec{E}$ (eq. X), podemos obter a expressão para o campo magnético a partir da lei de Faraday e obtemos

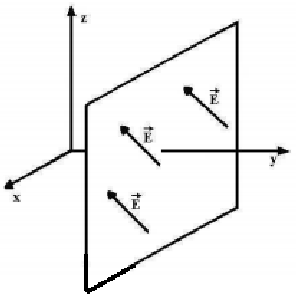
$$\vec{B} = \frac{\vec{c} \times \vec{E}}{c^2} \tag{X}$$

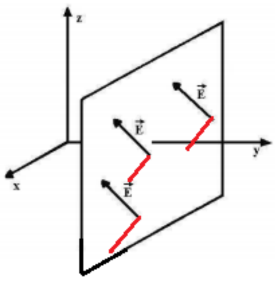
$$\vec{B} = \overrightarrow{B_0} \cos(\kappa y - \omega t), \tag{XI}$$

Assim, a partir das equações de Maxwell no vácuo, concluímos que:

- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfazem a equação de onda;
- Os módulos de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são proporcionais: $|\vec{E}| = c|\vec{B}|$;
- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares entre si e, também, perpendiculares à direção de propagação da onda.
- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ estão em fase.

5. As flechas da figura abaixo representam o vetor campo elétrico de uma onda plana monocromática que se propaga para a direita no eixo y. Desenhe, nesta figura, o vetor campo magnético.





6. O campo elétrico de uma onda se propagando no vácuo é dado por

$$\vec{E} = E_0 \cos(\kappa x + \omega t)\hat{j}$$

Determine a direção e sentido de propagação, o comprimento de onda e o período e escreva a expressão do campo magnético dessa onda.

Resp.: De acordo com o argumento interno à função cosseno, a direção de propagação da onda é $\vec{\imath}$. Sabendo que os vetores $\vec{B}$, $\vec{E}$ e $\vec{\kappa}$ são ortogonais entre si, a direção do campo magnético é $\vec{k}$. O comprimento de onda é dado por $\lambda = \frac{2\pi}{\kappa}$ e a frequência angular é ω (ou $f = 2\pi\omega$).

Outra propriedade importante das ondas eletromagnéticas é que elas transportam energia sem transportar matéria. Nesse caso, o transporte de energia está diretamente relacionado aos campos elétrico $\vec{E}$ e magnético $\vec{B}$ que a constituem. Se há campo elétrico e campo magnético, existe energia elétrica e energia magnética, cujas densidades volumétricas são dadas respectivamente por:

$$u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \qquad \text{(XII)}$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad \text{(XIII)}$$

7. Qual é a expressão, em função do campo elétrico, da densidade volumétrica de energia u transportada por uma onda eletromagnética? Lembre que as energias elétrica e magnética têm densidades volumétricas dadas, respectivamente, por $u_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ e $u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

Resp.:

$$E^2 = cB^2$$

Substituindo nas expressões de energia para $\vec{E}$ e $\vec{B}$:

$$u_E = \frac{\epsilon_0 c^2 B^2}{2},\ B^2 = 2\mu_0 u_B$$

$$u_E = \frac{\epsilon_0 c^2 2\mu_0 u_B}{2},\ c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

$$u_E = u_B$$

$$u_T = u_E + u_B$$

$$u_T = 2u_E$$

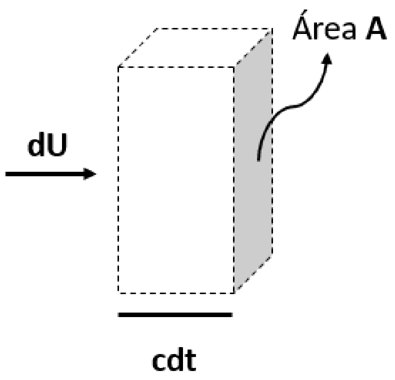
$$u_T = 2\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$u_T = \epsilon_0 E^2$$

8. Uma onda eletromagnética plana e monocromática se propaga na direção *y*.

a) Calcule a quantidade de energia dU que atravessa, em um intervalo de tempo dt, uma superfície de área A, paralela ao plano xz.

Resp.: $dU = Ac\varepsilon_0 E^2 dt$



b) Determine a potência por unidade de área que essa onda carrega.

Resp.:

$$Pot = \frac{dU}{dt}$$

$$Pot = \frac{dU}{dt} = Ac\varepsilon_0 E^2$$

$$\frac{1}{A} Pot = c\varepsilon_0 E^2$$

Substituindo $E = cB$

$$\frac{1}{A} Pot = c\varepsilon_0 EE$$

$$\frac{1}{A} Pot = c\varepsilon_0 EBc$$

$$\frac{1}{A} Pot = c^2\varepsilon_0 EB$$

Substituindo $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$$\frac{1}{A} Pot = \frac{\varepsilon_0 EB}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

$$\frac{1}{A} Pot = \frac{EB}{\mu_0}$$

9. A partir do resultado 7.b. é definido um vetor, chamado *vetor de Poynting*, dado por $\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}$. Qual o significado físico desse vetor?

Resp.: O vetor de Poynting representa o módulo, sentido e direção da propagação de energia associada a onda eletromagnética.