

# Atividade 1

## Espaço de estados: Um projeto simples

---

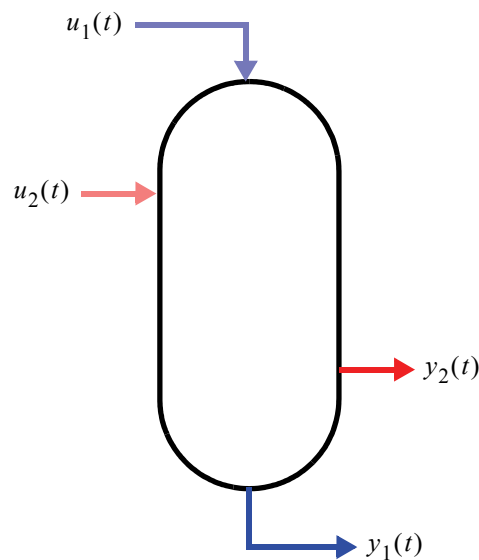
### 1.1 Introdução

Nesta atividade se solicita um projeto de controle por realimentação do estado do sistema, utilizando um regulador linear quadrático. Erro de regime nulo será garantido por uma malha integradora. O sistema a ser controlado será um processo industrial fictício, com uma série de simplificações.

A discussão com colegas é encorajada, porém esta atividade deve ser realizada individualmente.

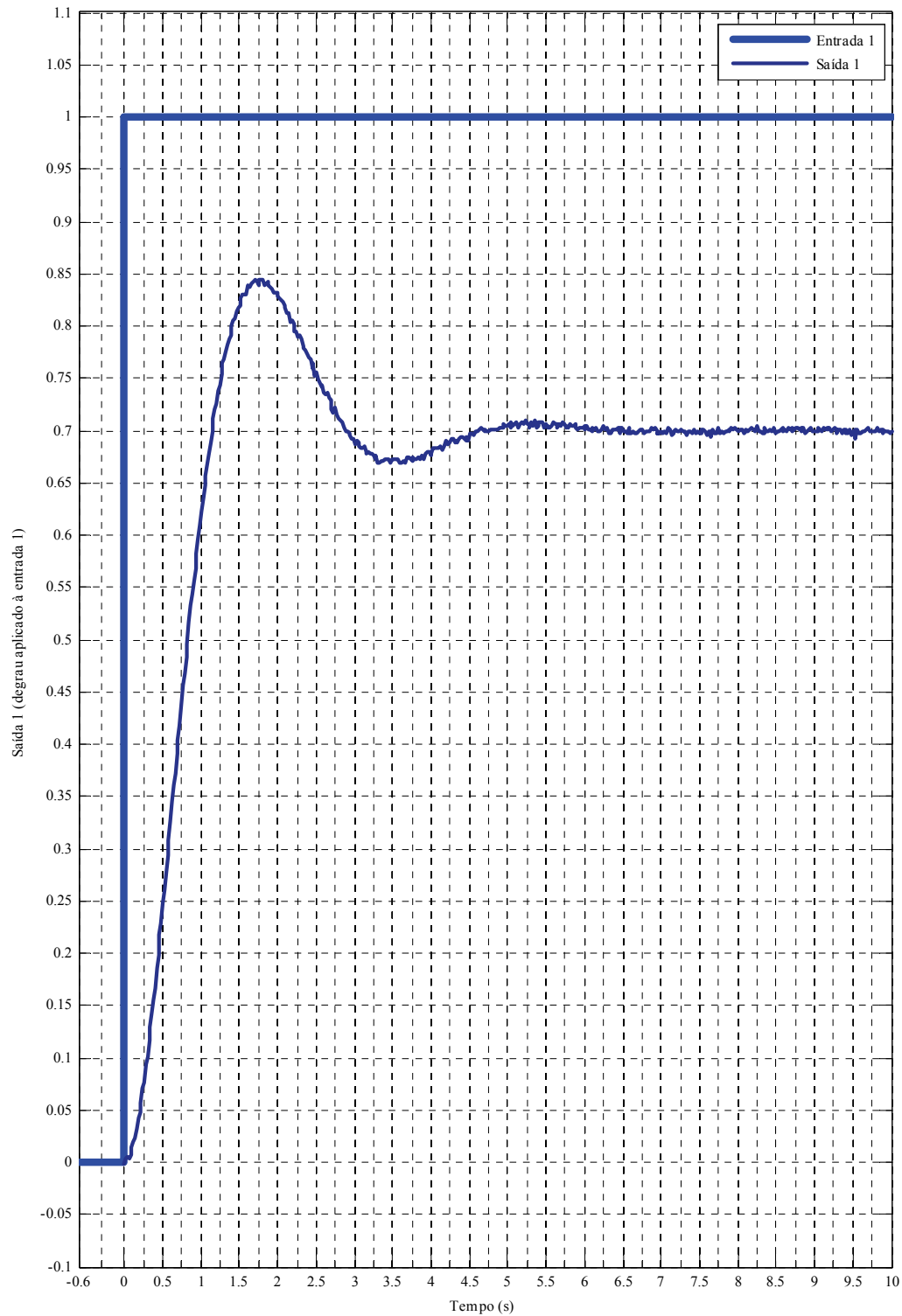
### 1.2 O processo

Considere o processo esquematizado na Figura 1.1, com duas entradas  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  e duas saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Como parte das simplificações o processo será assumido linear e invariante no tempo, sua natureza física será ignorada e seu ponto de equilíbrio será tal que, para  $u_1(t) = u_2(t) = 0$  tem-se  $y_1(t) = y_2(t) = 0$ . O Apêndice A apresenta procedimentos que levam a tais aproximações.



**Figura 1.1** Um processo fictício

Para se identificar o processo, foram aplicados degraus unitários em cada entrada (com excitação nula na outra entrada) e registradas as saídas, conforme as figuras 1.2 - 1.5 a seguir.



**Figura 1.2** Resposta da Saída 1 para degrau unitário aplicado à Entrada 1

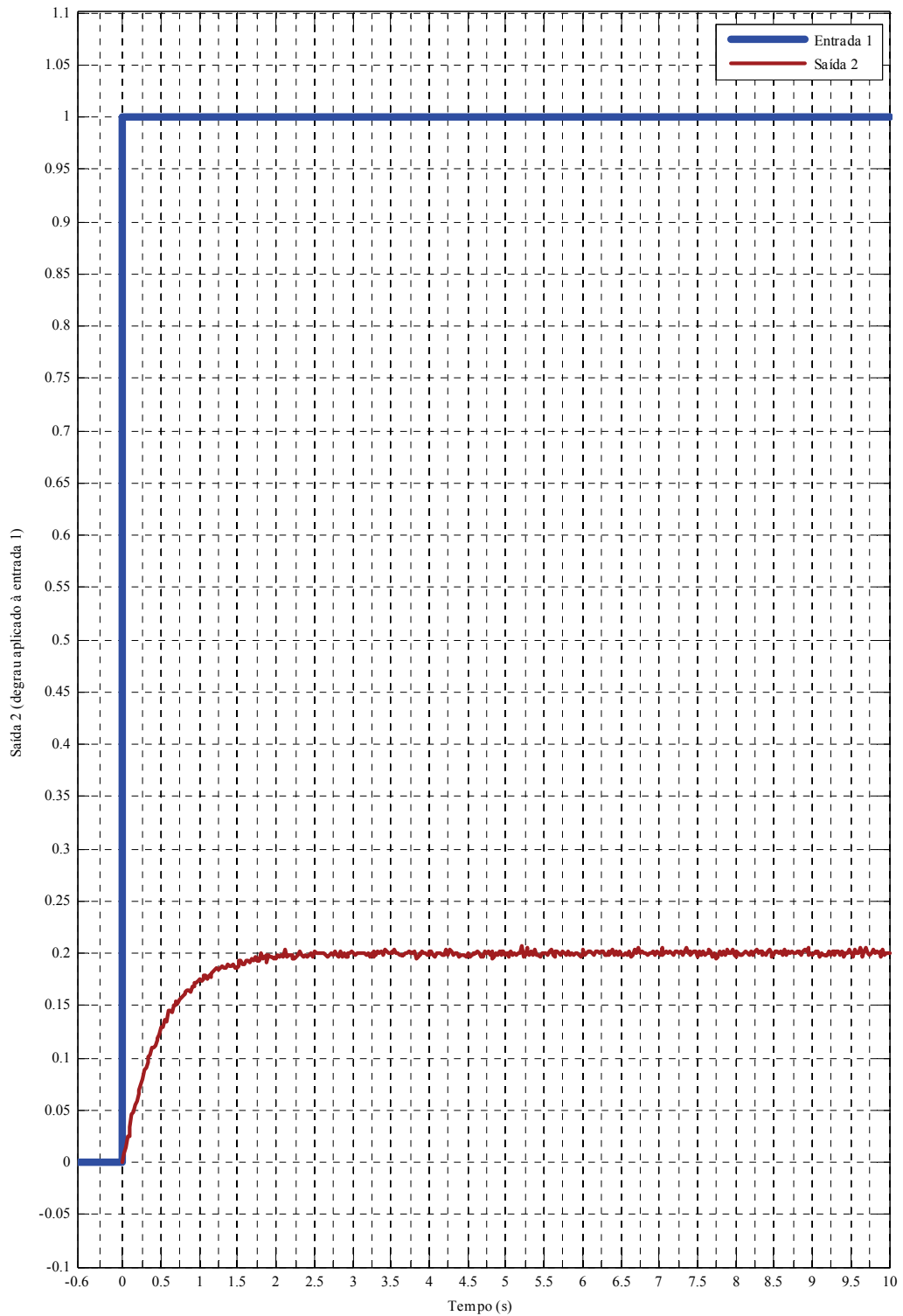


Figura 1.3 Resposta da Saída 2 para degrau unitário aplicado à Entrada 1

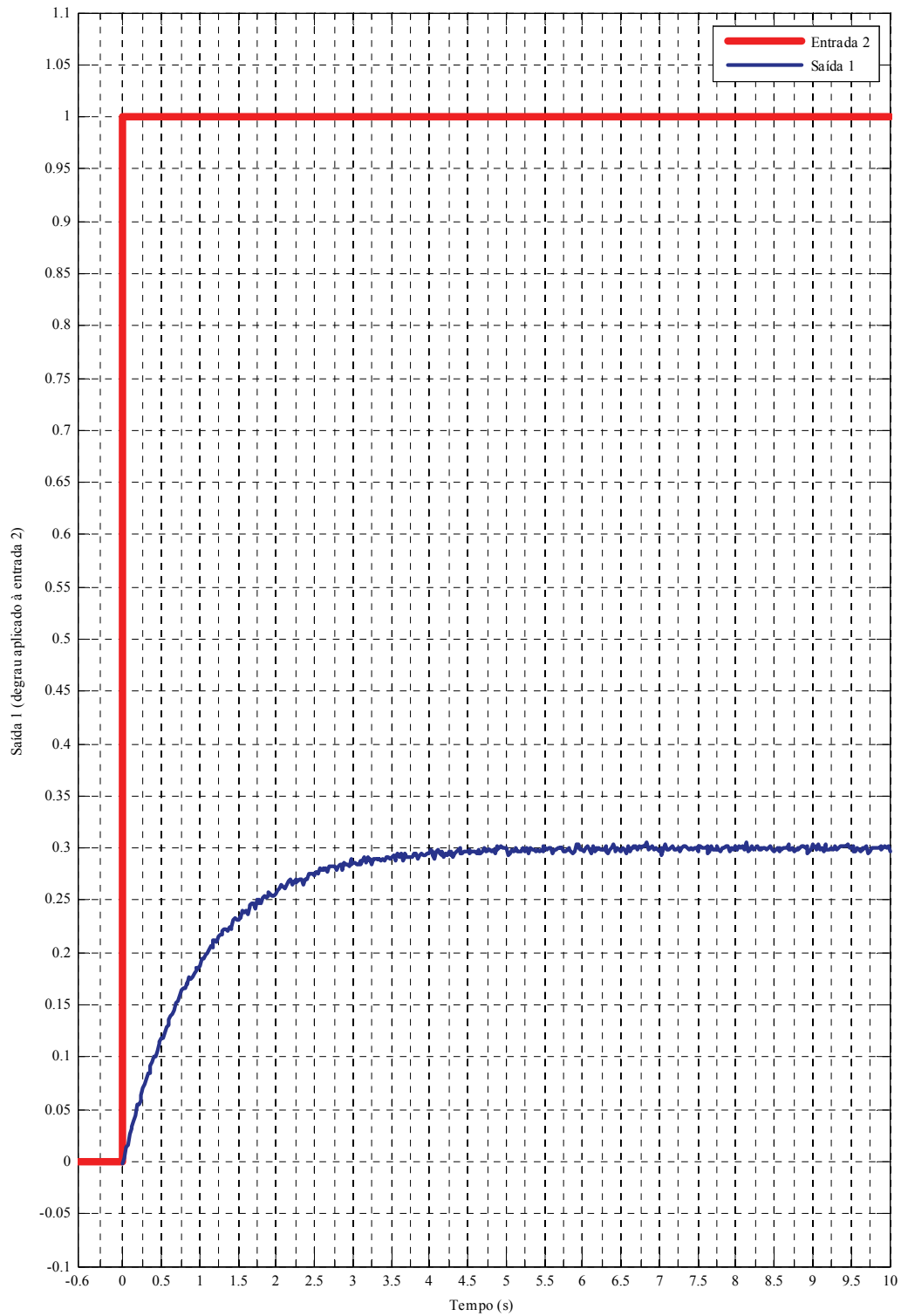


Figura 1.4 Resposta da Saída 1 para degrau unitário aplicado à Entrada 2

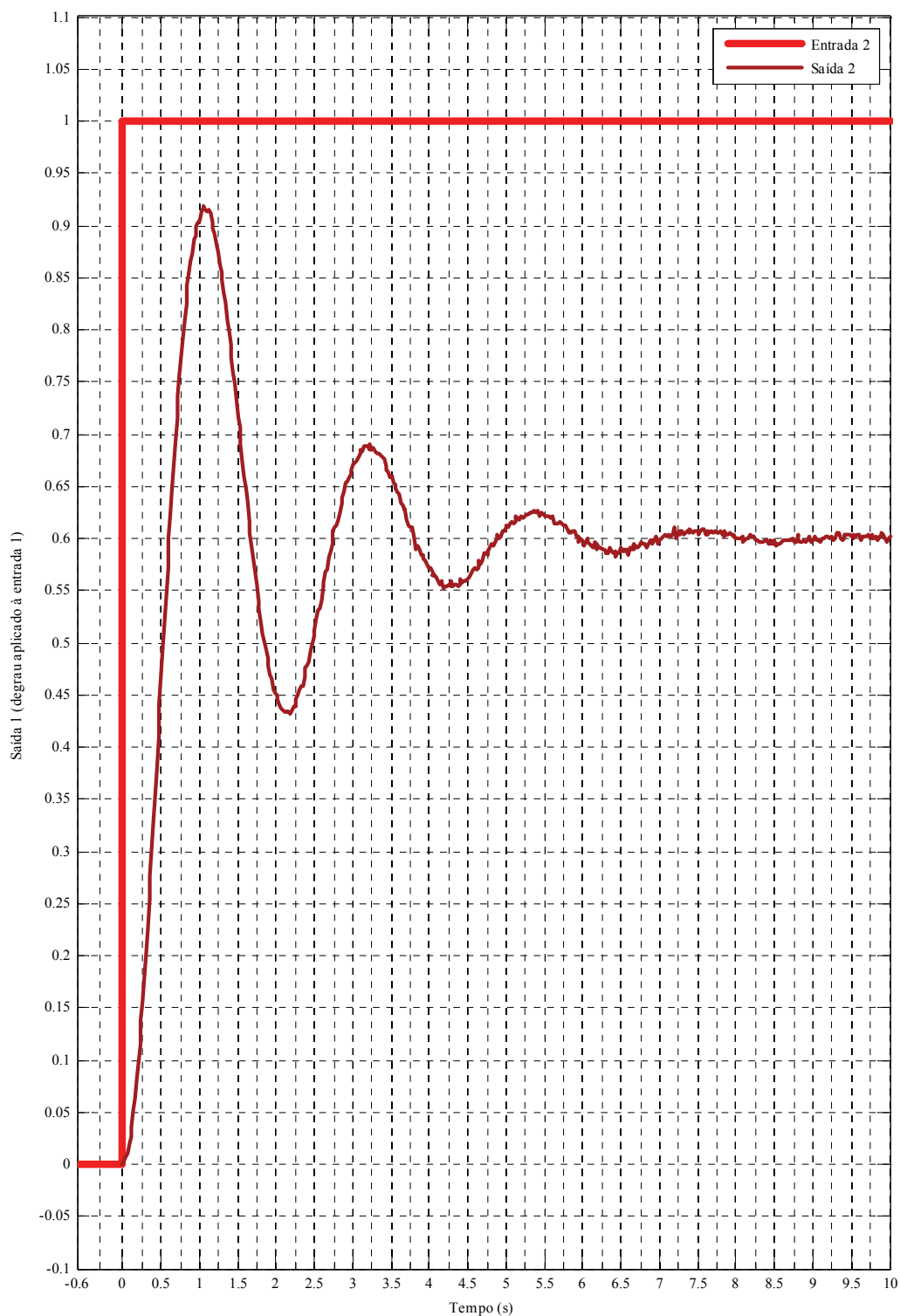


Figura 1.5 Resposta da Saída 2 para degrau unitário aplicado à Entrada 2

### 1.3 Atividades

Utilize as respostas a degrau do sistema para estimar um modelo e utilize-o para projetar um controle por realimentação de estado. Para tanto realize a seguinte sequência de atividades.

- a) Obtenha as funções de transferência a tempo contínuo  $G_{11}(s)$ ,  $G_{12}(s)$ ,  $G_{21}(s)$  e  $G_{22}(s)$  do sistema, onde  $G_{ij}(s)$  representa a função de transferência da entrada  $i$  para a saída  $j$ , ou seja:

$$\frac{Y_j(s)}{U_i(s)} = G_{ij}(s).$$

DICA: Assuma que as funções de transferência  $G_{11}(s)$  e  $G_{22}(s)$  sejam de segunda ordem com estruturas dadas por

$$\frac{Y_1(s)}{U_1(s)} = G_{11}(s) = \frac{K_{11} \cdot (\omega_{11})^2}{s^2 + 2\zeta_{11}\omega_{11}s + (\omega_{11})^2} \text{ e}$$

$$\frac{Y_2(s)}{U_2(s)} = G_{22}(s) = \frac{K_{22} \cdot (\omega_{22})^2}{s^2 + 2\zeta_{22}\omega_{22}s + (\omega_{22})^2}.$$

e que as funções de transferência  $G_{12}(s)$  e  $G_{21}(s)$  sejam de primeira ordem com estruturas dadas por

$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_{12}(s) = \frac{K_{12}}{T_{12}s + 1} \text{ e}$$

$$\frac{Y_1(s)}{U_2(s)} = G_{21}(s) = \frac{K_{21}}{T_{21}s + 1}.$$

- b) Obtenha um modelo em espaço de estados a tempo contínuo para o processo, considerando ambas as entradas e saídas com a estrutura dada por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

SUGESTÃO: Note que  $Y_{11}(s) = G_{11}(s)U_1(s)$  e  $Y_{21}(s) = G_{21}(s)U_2(s)$ , e por superposição, tem-se  $Y_1(s) = Y_{11}(s) + Y_{21}(s)$  e  $y_1(t) = y_{11}(t) + y_{21}(t)$ .

Da mesma forma,  $Y_{22}(s) = G_{22}(s)U_2(s)$  e  $Y_{12}(s) = G_{12}(s)U_1(s)$ , e por superposição, tem-se  $Y_2(s) = Y_{12}(s) + Y_{22}(s)$  e  $y_2(t) = y_{12}(t) + y_{22}(t)$ .

Assim sendo, sugere-se a seguinte realização em espaço de estados a partir das funções de transferência acima:  $x_1(t) = y_{11}(t)$ ,  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ ,  $x_3(t) = y_{21}(t)$ ,  $x_4(t) = y_{12}(t)$ ,  $x_5(t) = y_{22}(t)$  e  $x_6(t) = \dot{x}_5(t)$  com

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= f(x_1(t), x_2(t), u_1(t)) \\ \dot{x}_3(t) &= f(x_3(t), u_2(t)) \\ \dot{x}_4(t) &= f(x_4(t), u_1(t)) \\ \dot{x}_5(t) &= x_6(t) \\ \dot{x}_6(t) &= f(x_5(t), x_6(t), u_2(t)) \end{aligned}$$

- c) Obtenha um modelo em tempo discreto (frequência de amostragem 10Hz) do processo considerando todas as entradas e saídas.

DICA: Use o comando `c2d` do Matlab.

- d) Projete um regulador linear quadrático discreto para o sistema com a seguinte lei de controle:

$$u(k) = r(k) - K_{rlq} \cdot x(k).$$

Utilize a matriz de ponderação  $Q = C^T C$  para o estado, uma matriz  $R$  diagonal para ponderar as entradas e use uma relação adequada de pesos para que o controle tenha um desempenho razoável e não seja excessivamente agressivo.

Note que  $u(k), y(k) \in \mathfrak{R}^{2 \times 1}$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$  e  $R \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ .

- e) Teste o sistema de controle com os seguintes setpoints (simultaneamente):

$$r_1(t) = 0 \text{ para } 0 \leq t < 5 \text{ passando a } r_1(t) = 1 \text{ para } t \geq 5;$$

$$r_2(t) = 0 \text{ para } 0 \leq t < 10 \text{ passando a } r_2(t) = 2 \text{ para } t \geq 10.$$

onde  $r_1(t)$  é uma referência para  $y_1(t)$  e  $r_2(t)$  para  $y_2(t)$ . Faça uma simulação com duração de no mínimo 30s com o regulador linear quadrático discreto controlando a planta discretizada.

- f) Inclua um integrador na implementação, de modo a eliminar o erro de regime e teste o sistema com a mesma sequência de setpoints.

PROCEDIMENTO: Anote os polos de malha fechada do sistema controlado com o regulador linear quadrático e acrescente polos adequados para o integrador. Reprojete o controle para o sistema aumentado como visto em aula.

## 1.4 Observações gerais

Os exemplos apresentados em aula são boas referências de como realizar os projetos e simulações usando Matlab/Simulink.

As escolhas de projeto (pesos do projeto do RLQ, constantes de tempo dos integradores) têm impacto extremo sobre o desempenho do sistema. Para esta atividade, o desempenho do sistema de controle não será avaliado, apenas a correta aplicação dos métodos.

Escreva um relatório detalhando os passos do projeto e apresentando os resultados (sempre que possível na forma de gráficos). Inclua eventuais códigos e diagramas de simulação.

# Apêndice A

## Linearização e ponto de equilíbrio

---

### A.1 Introdução

#### A.1.1 Não-linearidades

Praticamente todo sistema físico possui, em maior ou menor medida, comportamento não-linear. Em muitas situações pode-se simplesmente ignorar as não-linearidades ao se modelar um dado sistema e assumir que o seu comportamento é puramente linear, sem prejuízos para a qualidade efetiva do modelo obtido ou do desempenho de eventuais controladores projetados.

Para alguns tipos de sistema, é impossível ignorar as não-linearidades, e elas devem ser obrigatoriamente levadas em conta tanto na modelagem como no projeto de controladores, o que eventualmente acaba por requerer o uso de técnicas de projeto e análise extremamente complexas.

Há, porém, muitos sistemas não-lineares para os quais pode-se obter modelos lineares aproximados, em geral sob alguma condição restritiva, mas que são adequados tanto para a descrição pura e simples do comportamento do sistema como para o projeto de controladores. Será com esta última classe de sistemas que nos preocuparemos aqui.

#### A.1.2 Por que linearizar?

Chamamos de *linearização* ao procedimento de aproximação de um modelo não-linear por outro linear. Como em geral o comportamento de sistemas não-lineares é muito mais rico que o de sistemas lineares, os modelos não-lineares são potencialmente mais precisos que os primeiros, e assim perdas de qualidade são certamente esperadas ao se linearizar um dado modelo.

Por que então utilizar linearização? Em primeiro lugar porque modelos lineares são mais simples. Além disso existe todo um arsenal de análise de sistemas e técnicas para projeto de controladores que são aplicáveis somente a sistemas lineares. Em muitos casos as técnicas para se tratar com sistemas não-lineares são muito complexas ou pouco poderosas ou ambas as coisas, e para muitos tipos de sistemas não-lineares simplesmente não são conhecidos procedimentos formais de projeto de controladores.

#### A.1.3 Aproximações lineares

A idéia básica utilizada aqui é a expansão de uma função em uma série de Taylor em torno de um ponto  $x_0$  dado, isto é,

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{d}{dx}f(x-x_0) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}f(x-x_0) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dx^3}f(x-x_0) + \dots \quad (\text{A.1})$$

Fazendo  $y_0 = f(x_0)$ , podemos escrever a equação acima como

$$y - y_0 = \frac{d}{dx}f(x-x_0) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2}{dx^2}f(x-x_0) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3}{dx^3}f(x-x_0) + \dots \quad (\text{A.2})$$

A expressão (A.2) vale a princípio para quaisquer valores de  $x$  e  $x_0$ , e para uma série infinita é uma



expressão exata, não envolvendo qualquer aproximação. Note que quanto menor é a diferença entre  $x$  e  $x_0$ , menos significativos são os termos de ordem superior. No caso limite, quando  $x \rightarrow x_0$ , tem-se que

$$y = y_0 + \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0} (x-x_0). \quad (\text{A.3})$$

A aproximação a ser feita consiste em se supor que para os pontos  $x$  próximos de  $x_0$  vale

$$y \cong y_0 + \delta(x-x_0) \quad (\text{A.4})$$

$$\text{com } \delta = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}.$$

A figura abaixo ilustra o procedimento. Note que quanto mais próximos  $x$  e  $x_0$ , menor é o erro come-

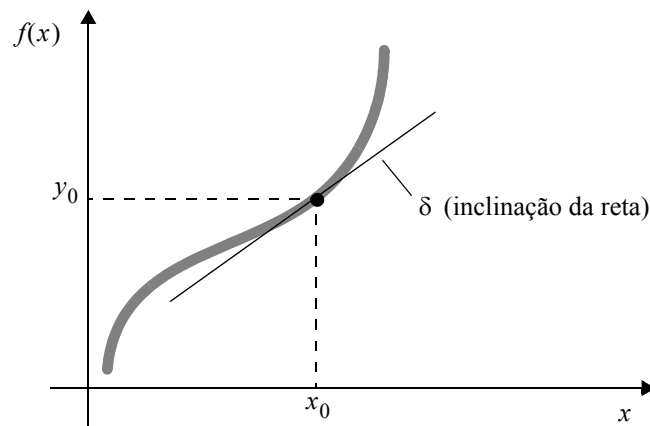


Figura A.1: Aproximando uma função qualquer por uma reta.

tido na aproximação.

Para eliminar os termos  $x_0$  e  $y_0$ , e obter uma expressão puramente proporcional para (A.4), podemos fazer as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - x_0 \\ \tilde{y} &= y - y_0 \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde o sinal diacrítico “~” indica que a variável é considerada em torno de um dado ponto. Dessa forma, (A.4) pode ser reescrita como

$$\tilde{y} = \delta \tilde{x}.$$

A relação entre as variáveis pode ser vista na Figura A.2, abaixo. Note que a tangente à curva agora passa pela origem dos eixos das coordenadas. Note também que o valor de  $\delta$  não se altera com a mudança de variáveis.

O mesmo pode ser feito para funções de várias variáveis (na verdade é este o caso que mais nos interessa). Para uma função de  $n$  variáveis  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  teríamos, já desprezando os termos de ordem superior e fazendo as aproximações necessárias

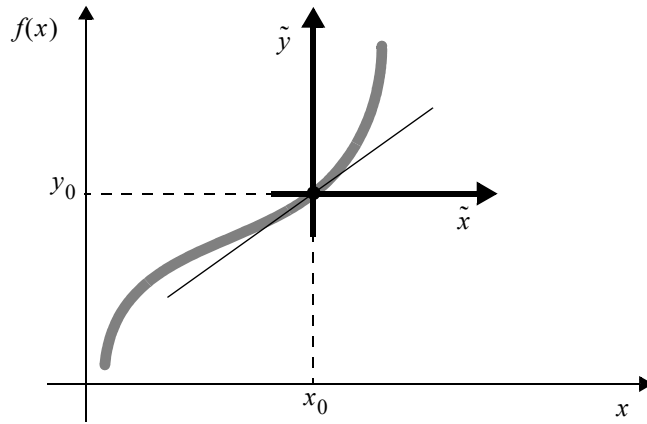


Figura A.2: Mudança de coordenadas.

$$y = y_0 + \delta_1(x_1 - x_{10}) + \delta_2(x_2 - x_{20}) + \dots + \delta_n(x_n - x_{n0}) \quad (\text{A.6})$$

onde  $y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ ,

$$\delta_i = \left. \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right|_{x_1 = x_{10}, x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Definindo

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= y - y_0 \\ \tilde{x}_1 &= x_1 - x_{10} \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - x_{20} \\ &\dots \\ \tilde{x}_n &= x_n - x_{n0} \end{aligned}$$

tem-se que

$$\tilde{y} = \delta_1 \tilde{x}_1 + \delta_2 \tilde{x}_2 + \dots + \delta_n \tilde{x}_n \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Um exemplo simples de linearização

O procedimento visto acima pode ser utilizado para se obter um modelo linear a partir de uma descrição original não-linear de um dado sistema. Considere o sistema formado por um braço mecânico simplificado, apresentado na Figura A.3.

Vamos supor que há um motor no eixo da base, para o qual se pode manipular o torque  $\tau(t)$  produzido, que a massa total do braço é desprezível face a massa da carga útil  $m$  e que há um atrito viscoso linear  $f$  no eixo da base. Consideraremos como entrada do sistema o sinal de torque aplicado pelo motor  $\tau(t)$  e como saída o ângulo  $\theta(t)$  do braço mecânico.

Das leis de Newton, tem-se

$$\tau = mL\ddot{\theta} + f\dot{\theta} - mgL \cos\theta. \quad (\text{A.8})$$

A equação diferencial obtida para o modelo do sistema é não-linear. Para linearizá-la segundo o apresentado na Seção A.1.3, é necessário escolher um ponto em torno do qual fazer a aproximação. Vamos supor

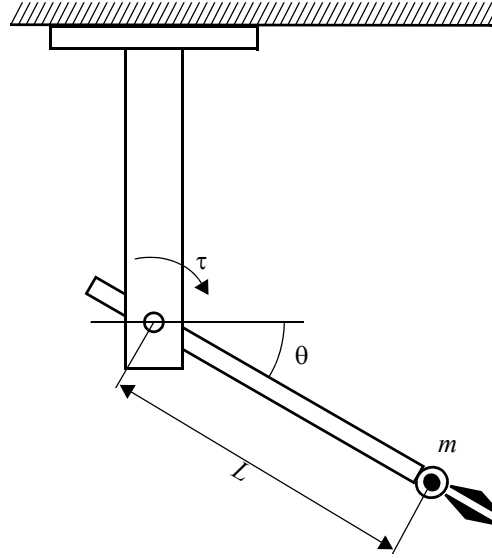


Figura A.3: Um braço mecânico simples

que o robô, em suas tarefas usuais, trabalhe numa faixa de ângulos próxima de  $\theta_0 = 30^\circ$ . O torque aplicado  $\tau_0$  que mantém o braço mecânico parado nesse ângulo é tal que

$$\tau_0 = -mgL \cos \theta_0 = -mgL \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{A.9})$$

Note que como o braço não se move,  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , o que configura um *ponto de equilíbrio* do sistema.

Quando escolhermos um ponto para fazer a linearização que é também um ponto de equilíbrio, chamamos este ponto de *ponto de operação*. No caso do robô apresentado acima, podemos dizer que a  $n$ -upla

$(\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0, \tau_0) = \left(30^\circ, 0, 0, mgL \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  é um ponto de operação do sistema.

Fazemos então as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(t) &= \tau(t) - \tau_0 = \tau(t) + mgL \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tilde{\theta}(t) &= \theta(t) - \theta_0 = \theta(t) - \frac{\pi}{6} \\ \tilde{\theta}^{(1)}(t) &= \dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}(t) \\ \tilde{\theta}^{(2)}(t) &= \ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_0 = \ddot{\theta}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Aplicando a aproximação (A.7) à equação diferencial (A.8), que pode ser interpretada como  $\tau = f(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ , resulta

$$\begin{aligned}\tau &= \tau_0 + \left[ (\ddot{\theta} - 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \ddot{\theta}} mL\ddot{\theta} \Big|_{\dot{\theta}=0} \right] + \left[ (\dot{\theta} - 0) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} f\dot{\theta} \Big|_{\dot{\theta}=0} \right] - \left[ (\theta - \theta_0) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} mgL \cos \theta \Big|_{\theta=\theta_0} \right] \\ \Rightarrow \tau &= \tau_0 + mL\ddot{\theta} + f\dot{\theta} + mgL \operatorname{sen} \theta_0 (\theta - \theta_0) \\ \Rightarrow \tilde{\tau} &= mL\tilde{\theta}^{(2)} + f\tilde{\theta}^{(1)} + mgL \frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{\theta}\end{aligned}\tag{A.11}$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace à equação acima, tem-se

$$\tilde{T}(s) = s^2 mL\tilde{\Theta}(s) + sf\tilde{\Theta}(s) + \left( mgL \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \tilde{\Theta}(s),\tag{A.12}$$

e a Função de Transferência correspondente é

$$G(s) = \frac{\tilde{\Theta}(s)}{\tilde{T}(s)} = \frac{1}{mLs^2 + fs + mgL \frac{\sqrt{3}}{2}},\tag{A.13}$$

válida para ângulos  $\theta$  próximos de  $30^\circ$ .