Mecânica dos Fluidos II (PME 3330)
Gabarito Terceira Prova - 2018

1. (**3 pontos**) Um cilindro circular é equipado com dois sensores de pressão de superfície para medir p_a na posição angular π (ponto de estagnação frontal) e p_b numa posição angular $\pi/2 < \theta_b < \pi$, onde não aconteceu o descolamento da camada limite. A intenção é utilizar o cilindro como um anemômetro para medir a velocidade da corrente livre U_∞. Aplicando a teoria potencial, deduza uma fórmula para avaliar U_∞ em termos de p_a, p_b, ρ e o ângulo θ_b.

Solução:

Ajustando a potência do dipolo para gerar um cilindo de raio a, calculando a velocidade na superfície do cilindro e aplicando Bernoulli, a distribuição e pressão na superfície do cilindro é:

$$p_s = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1 - 4\,\mathrm{sen}^2\theta\right)$$

Aplicando a relação anterior para o ponto de estagnação frontal e o ponto com θ_b, resulta:

$$p_a = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$$

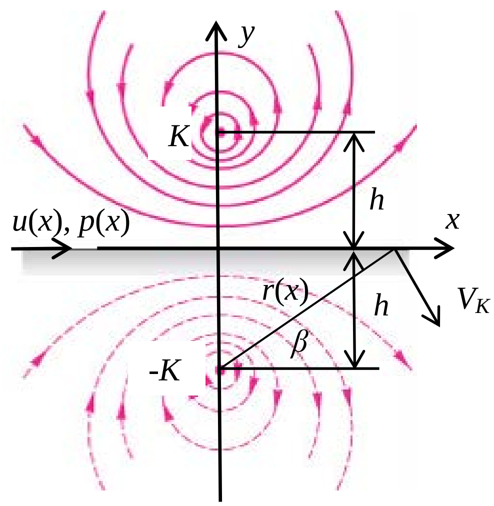
$$p_b = p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1 - 4\,\mathrm{sen}^2\theta_b\right)$$

Isolando U_∞, resulta finalmente: $U_\infty = \left(\dfrac{p_a - p_b}{2\rho}\right)^{1/2}\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\theta_b}$

2. (4 pontos) Podemos gerar um escoamento numa parede localizando duas linhas de vórtice de potência K em $(0,h)$ e $-K$ em $(0,-h)$.

a) Sabendo que a pressão infintamente afastados é p_∞, achar a distribuição de velocidade $u^*(x^*)=\dfrac{u}{u_0}$ e de pressão $p^*(x^*)=\dfrac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}$ adimensionais na parede, onde u_0 é a velocidade na origem de coordenadas e $x^*=\dfrac{x}{h}$. Fazer um desenho qualitativo destas variáveis.

b) Achar a distribuição de gradiente de pressão adimensional $\dfrac{dp^*}{dx^*}$ (fazer um desenho qualitativo) e a região na parede onde o gradiente de pressão é desfavorável ($\dfrac{dp^*}{dx^*}>0$), o ponto $x^*_{\max}$ nessa região onde ele é máximo e seu valor $\left(\dfrac{dp^*}{dx^*}\right)_{\max}$.



Solução:
A componente vertical da velocidade resultante das duas linhas de vorticidade na superfície é zero. A componente horizontal vale:

$$u(x)=2V_K\,\mathrm{sen}\beta=2\frac{K}{r(x)}\frac{h}{r(x)}=\frac{2Kh}{r^2(x)}=\frac{2Kh}{h^2+x^2}$$

$$u_0=\frac{2K}{h}\quad\Rightarrow\quad u^*=\frac{u}{u_0}=\frac{1}{1+x^{*2}}$$

Para a distribuição de pressão, sabemos que a velocidade no campo afastado é zero, de maneira que:

$$p_\infty=p+\frac{1}{2}\rho u^2\quad\Rightarrow\quad p-p_\infty=-\frac{1}{2}\rho u^2=-\frac{1}{2}\rho u_0^2\left(\frac{u}{u_0}\right)^2=-\frac{1}{2}\rho u_0^2u^{*2}$$

$$p^*=\frac{p-p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_0^2}=-u^{*2}=-\frac{1}{\left(1+x^{*2}\right)^2}$$

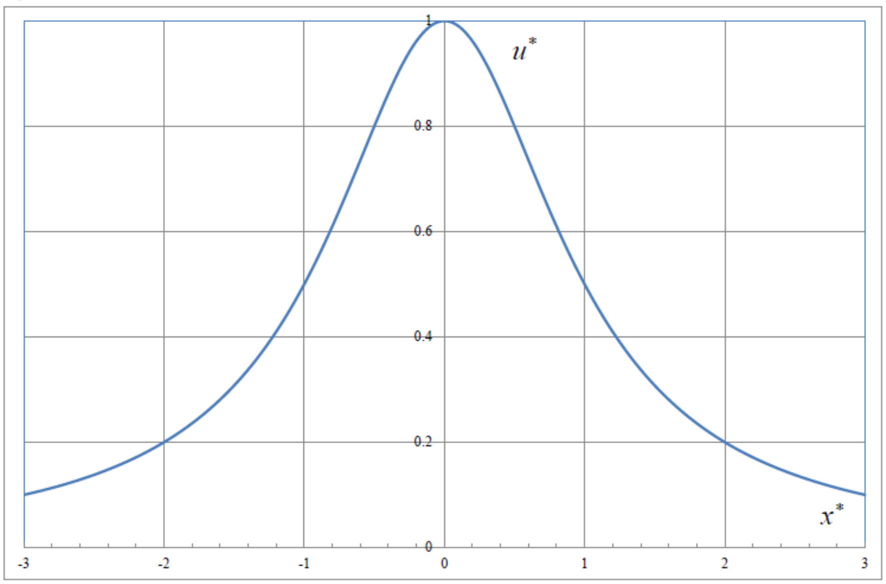
O gradiente de pressão adimensional resulta: $\dfrac{dp^*}{dx^*} = -1\left[\dfrac{-2\times 2x^*}{\left(1+x^{*2}\right)^3}\right] = \dfrac{4x^*}{\left(1+x^{*2}\right)^3}$

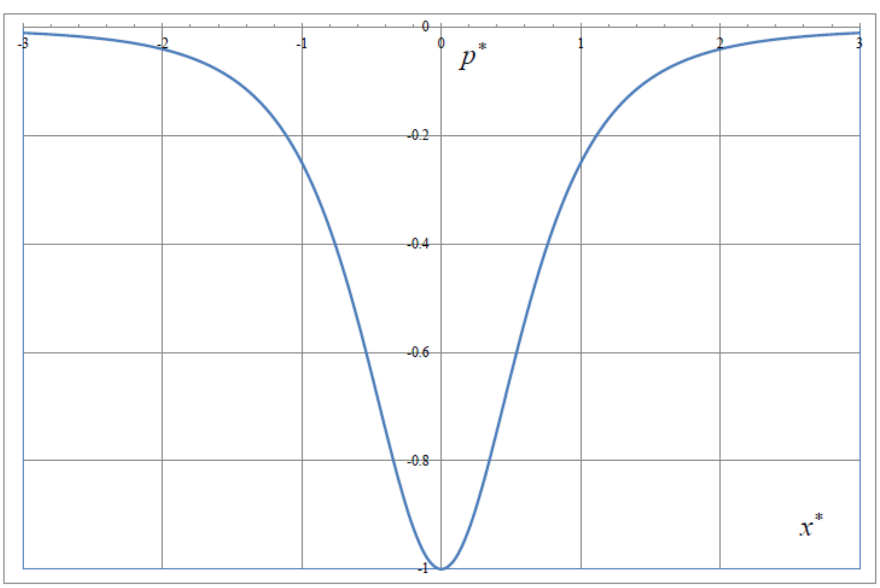
Vemos que $\dfrac{dp^*}{dx^*}(0)=0$ e $\dfrac{dp^*}{dx^*}\to 0$ para $x^*\to\infty$, de maneira que deve existir um máximo local. No máximo:

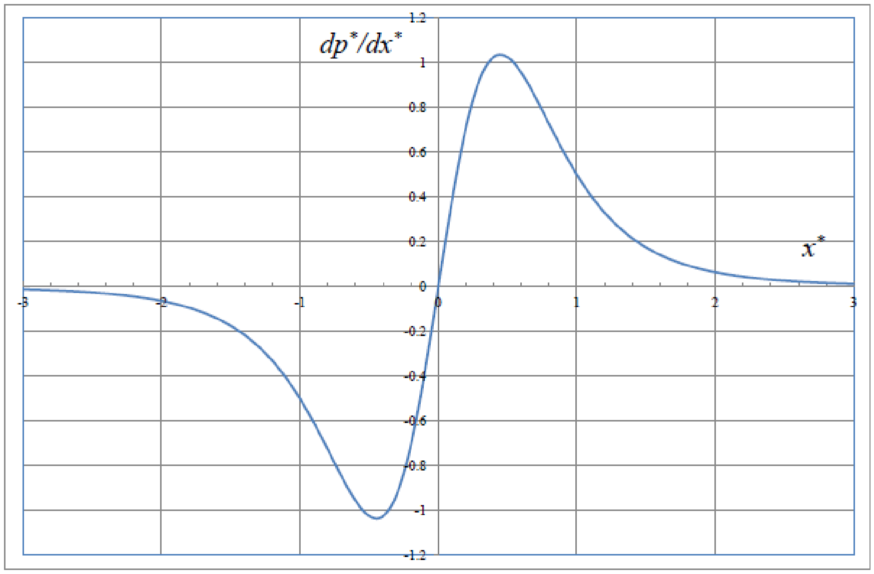
$$\frac{d}{dx^*}\left(\frac{dp^*}{dx^*}\right) = \frac{4}{\left(1+x^{*2}\right)^3} + \frac{4x^*(-3)}{\left(1+x^{*2}\right)^4}2x^* = 0 \quad\Rightarrow\quad 1+x^{*2}-6x^{*2}=0 \quad\Rightarrow\quad x^*_{\max} = \frac{5^{1/2}}{5} \approx 0{,}447$$

O valor máximo resulta: $\left(\dfrac{dp^*}{dx^*}\right)_{\max} = \dfrac{4\times\dfrac{5^{1/2}}{5}}{\left(1+\dfrac{1}{5}\right)^3} = \dfrac{25}{54}\times 5^{1/2} \approx 1{,}035$

A continuação, gráficos das variáveis calculadas.







dp*/dx*
x*
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
-3
-2
-1
0
1
2
3

3. (3 pontos) Uma aeronave de peso $m\,g$ possui uma asa de área planiforme A_p, razão de aspecto RA e coeficiente de arrasto de asa infinita $C_{D\infty}$, se deslocando em ar com massa específica ρ.

a) Qual a velocidade de cruzeiro U_{cr} dessa aeronave em função dos parâmetros $m\,g$, A_p, RA, $C_{D\infty}$ e ρ se em cruzeiro temos a condição ideal em que C_L / C_D é máximo?

b) Espera-se que essa aeronave seja capaz de desenvolver uma velocidade máxima $U_{\max}$. Qual a potência W necessária para vencer o arrasto nessa velocidade como função de $U_{\max}$, $m\,g$, A_p, RA, $C_{D\infty}$ e ρ?

Solução:

a)Na condição em que C_L / C_D é máximo: $C_D = C_{D\infty} + \dfrac{C_L^2}{\pi\,RA} = 2\,C_{D\infty} \;\Rightarrow\; C_L = \sqrt{\pi\,RA\,C_{D\infty}}$

Mas a força de sustentação tem que igualar o peso. Assim: $mg = C_L\,\dfrac{1}{2}\rho U_{cr}^2\,Ap \Rightarrow U_{cr} = \sqrt{\dfrac{2\,mg}{C_L\,\rho\,Ap}}$

Substituindo a expressão para C_L na condição em que C_L/C_D é máximo: $U_{cr} = \sqrt{\dfrac{2\,mg}{\sqrt{\pi\,RA\,C_{D\infty}}\,\rho\,Ap}}$

b) A potência W será dada por: $W = D\,U_{\max} = \dfrac{1}{2}\rho U_{\max}^3\,A_p\,C_D = \dfrac{1}{2}\rho U_{\max}^3\,A_p\left(C_{D\infty} + \dfrac{C_L^2}{\pi\,RA}\right)$

Mas a força de sustentação tem que igualar o peso: $mg = C_L\,\dfrac{1}{2}\rho U_{\max}^2\,A_p \Rightarrow C_L = \dfrac{2\,mg}{\rho U_{\max}^2\,A_p}$

Substituindo na expressão da potência: $W = \dfrac{1}{2}\rho U_{\max}^3\,A_p\left[C_{D\infty} + \dfrac{\left(\dfrac{2\,mg}{\rho U_{\max}^2\,A_p}\right)^2}{\pi\,RA}\right]$

Formulário:

Função corrente corrente uniforme horizontal: $\psi = U_\infty\,r\,\mathrm{sen}\,\theta$

Função corrente dipolo: $\psi = -\dfrac{\lambda}{r}\mathrm{sen}\,\theta$; Funcão corrente linha de vórtice: $\psi = -K\ln r$

Componentes da velocidade: $v_r = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}$; $v_\theta = -\dfrac{\partial\psi}{\partial r}$; Bernoulli: $p + \dfrac{1}{2}\rho U^2 = cte$

Força de arrasto: $D = \dfrac{1}{2}\rho U^2\,A_p\,C_D$; Força de Sustentação: $L = \dfrac{1}{2}\rho U^2\,A_p\,C_L$

$C_L = \dfrac{2\pi\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}{1+\dfrac{2}{RA}}$; $\beta = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{2h}{c}\right)$; $C_D = C_{D\infty} + \dfrac{C_L^2}{\pi\,RA}$; $RA = \dfrac{b^2}{A_p}$

Na condição em que temos $\left.\dfrac{C_L}{C_D}\right|_{\text{máximo}}$ resulta $C_D = 2\,C_{D\infty}$