

Geometria Analítica

Superfícies Quádricas

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Superfícies Quádricas

Chama-se quádrlica qualquer subconjunto Ω de E^3 que possa ser descrito, em relação a um sistema ortogonal de coodernadas, por uma equação de segundo grau, nas três variáveis x , y e z :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$$

Sendo a, b, c, d, e ou f diferentes de zero.

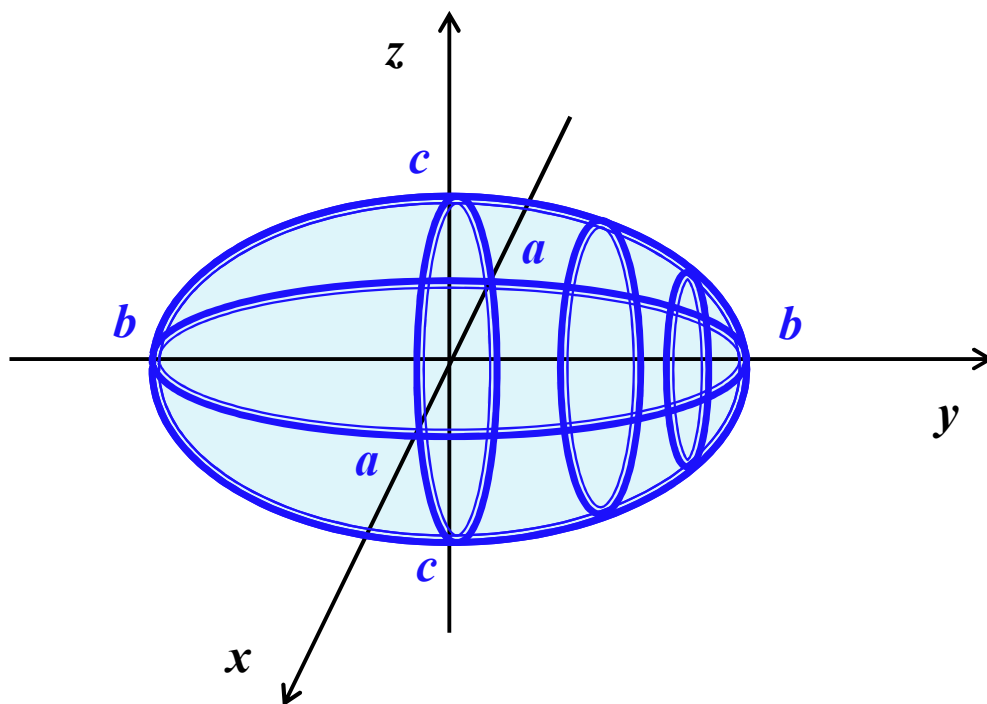
Superfícies Quádricas Centradas

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrlica centrada:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- Elipsoide
- Hiperboloide de uma folha
- Hiperboloide de duas folhas

Elipsoide



Equação do elipsoide:

$$+ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$a, b \text{ e } c > 0$$

As medidas dos semieixos
do elipsoide.

Elipsoide com centro fora da origem do sistema de coordenadas:

Se o centro do elipsoide é o ponto (h, k, l) e seus eixos forem paralelos aos eixos coordenados, temos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1$$

Superfície esférica de raio a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{onde } a = b = c$$

Superfície esférica de centro (h, k, l) e raio a :

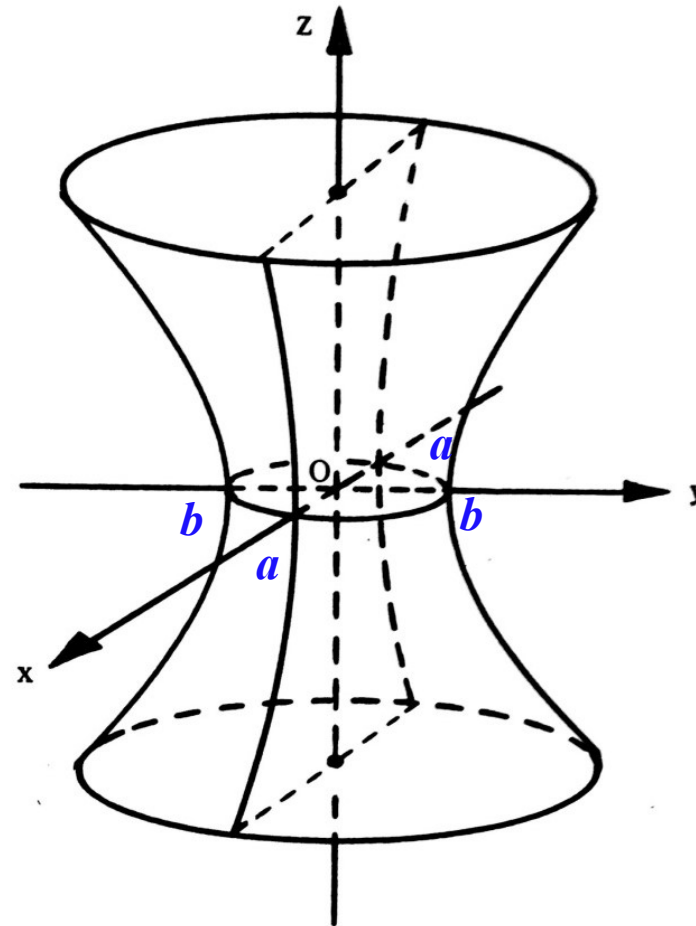
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = a^2$$

Hiperboloide de uma folha

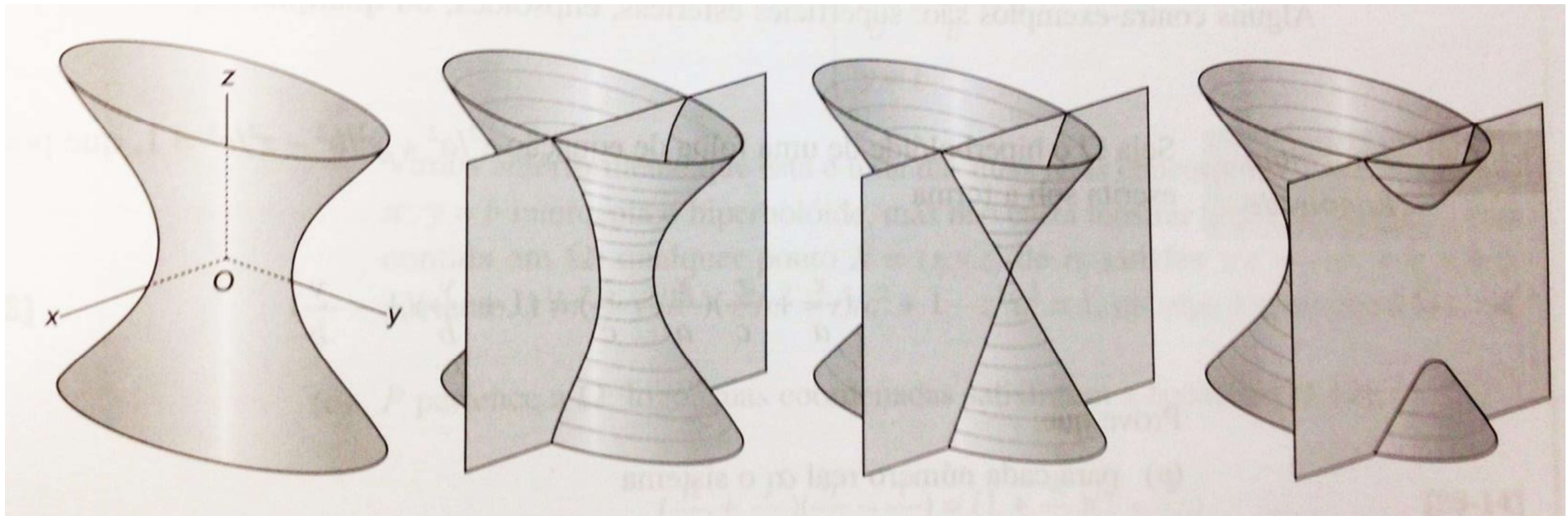
A equação que representa um hiperboloide de uma folha:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação
do hiperboloide de
uma folha ao longo
do eixo z .



Hiperboloide de uma folha



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo y .

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

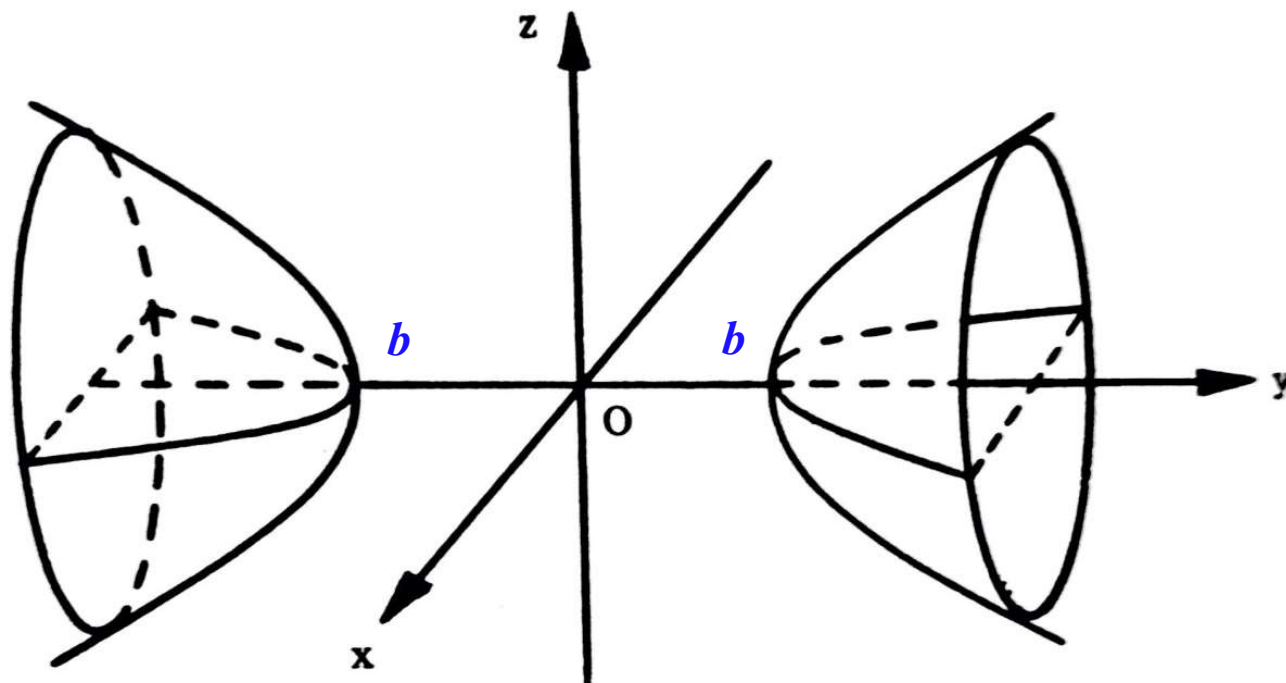
Canônica da equação do hiperboloide de uma folha ao longo do eixo x .

Hiperboloide de duas folhas

A equação que representa um hiperboloide de duas folhas:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo y .



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo x .

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Canônica da equação do hiperboloide de duas folhas ao longo do eixo z .

Superfícies quádricas não centradas

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Forma canônica ou padrão de uma superfície quádrica não centrada.

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = by$$

$$\pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = ax$$

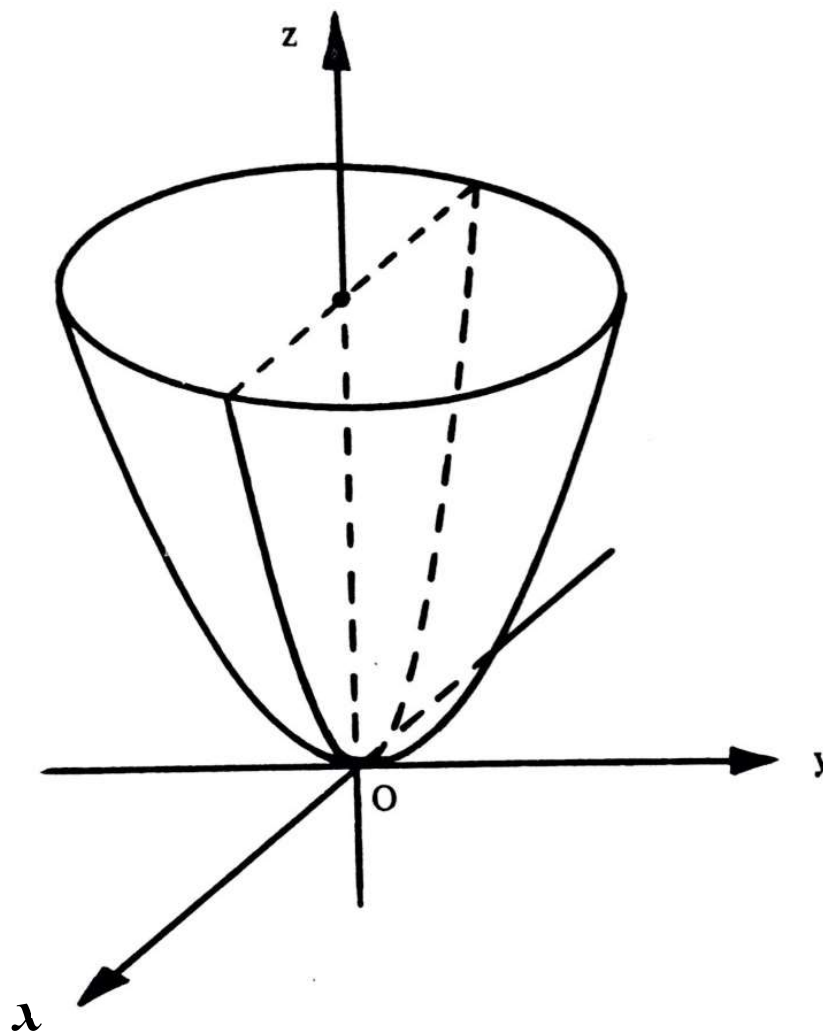
- *Parabolóide elíptico*
- *Parabolóide hiperbólico*

Paraboloide elíptico

Sinais iguais:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

Forma canônica da equação
do parabolóide elíptico ao
longo do eixo do z .



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$$

Forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo do y .

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$$

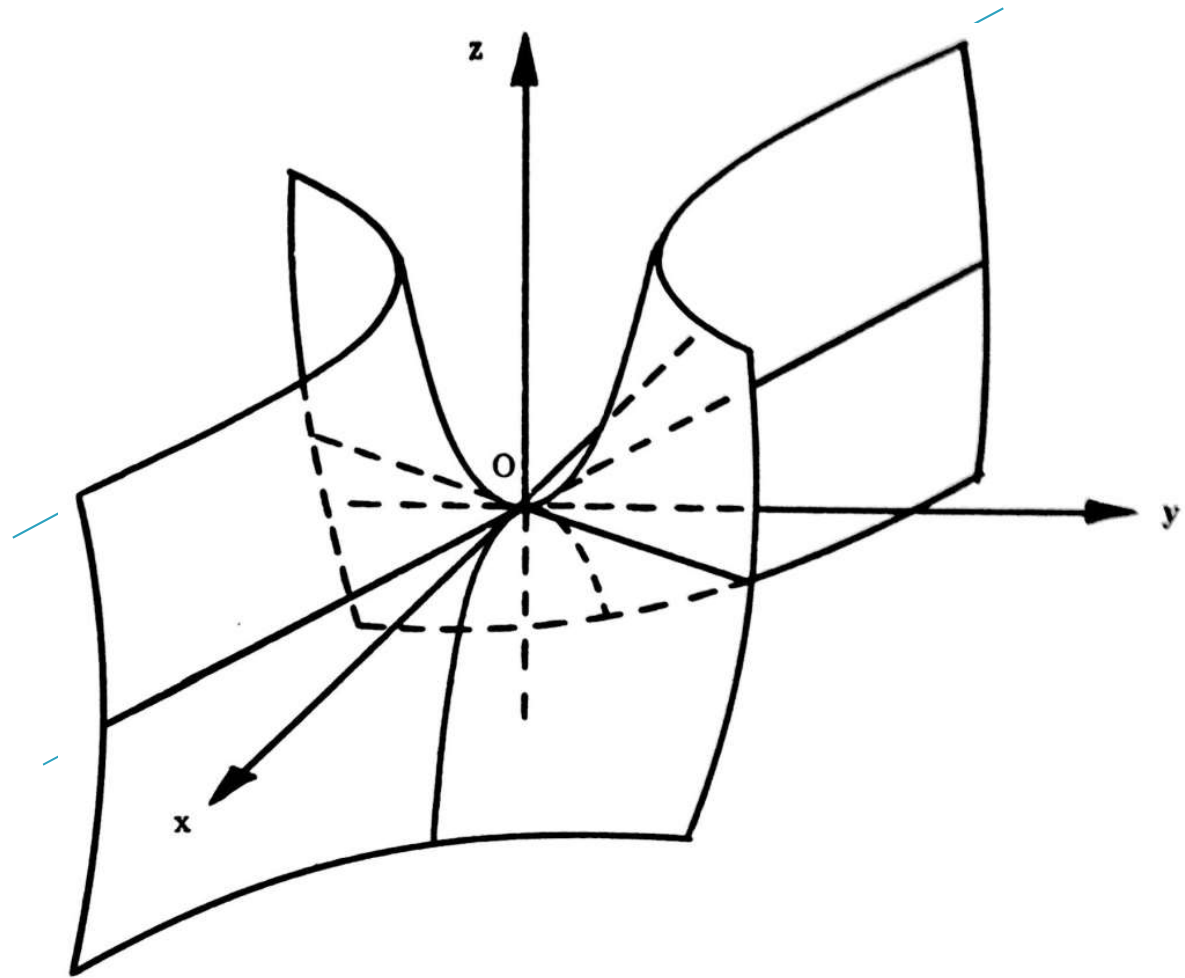
Forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo do x .

Paraboloide hiperbólico

Forma canônica ou padrão
de uma superfície quádrica
não centrada.

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$$

Forma canônica da equação
do paraboloide hiperbólico
ao longo do eixo dos z .



$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$$

Forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos y .

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$$

Forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos x .

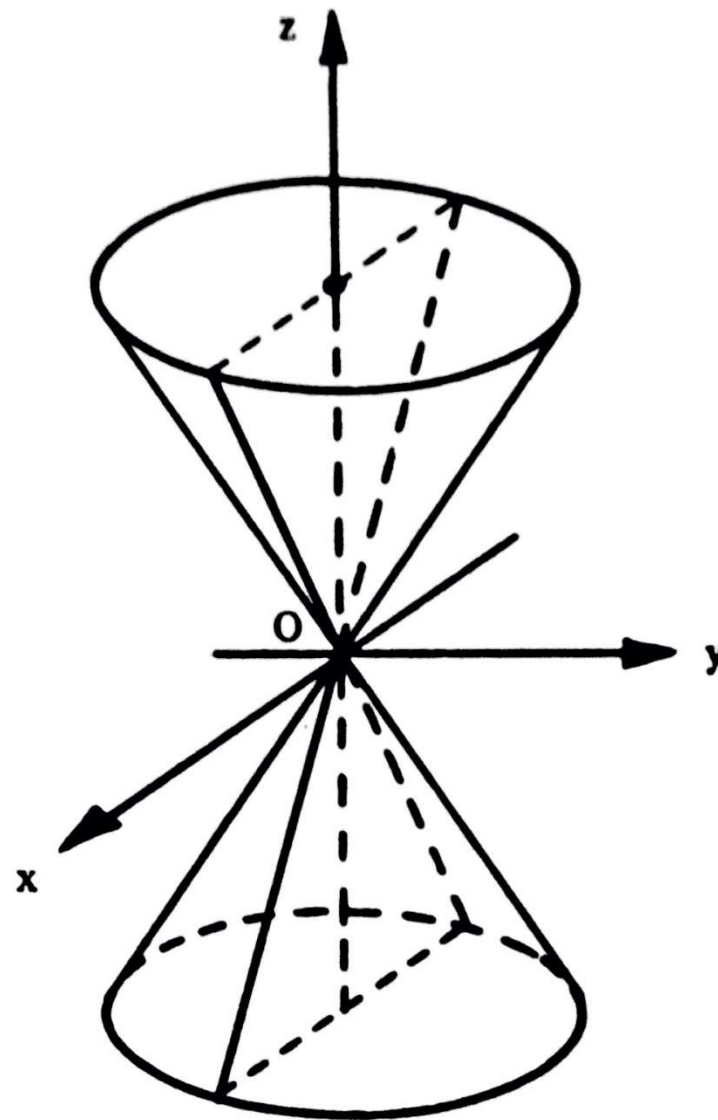
Superfície Cônica

Superfície cônica é uma superfície gerada por uma reta que se move apoiada numa curva plana qualquer e passando sempre por um ponto dado não situado no plano desta curva.

A reta é denominada geratriz, a curva plana é a diretriz e o ponto fixo dado é o vértice da superfície cônica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos z .



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

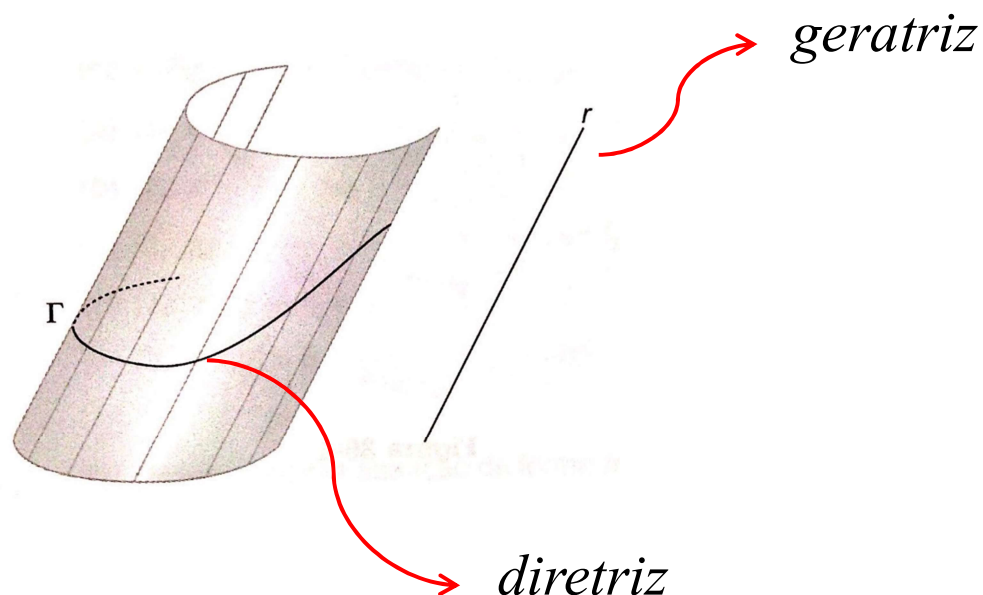
Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos x .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Superfície cônica cujo eixo é o eixo dos y .

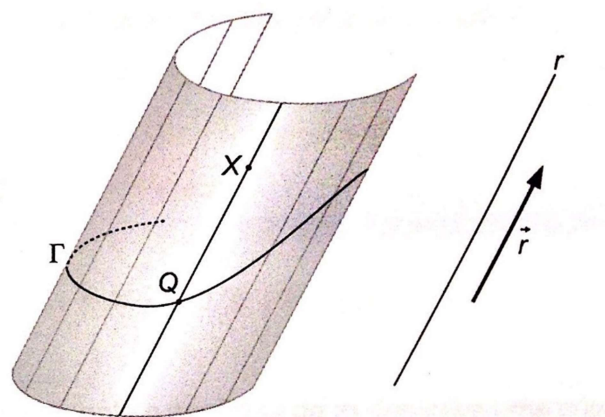
Superfície cilíndrica

Um subconjunto Ω de E^3 é uma **superfície cilíndrica** se existem uma curva Γ e uma reta r tais que Ω seja a reunião das retas paralelas a r que contêm algum ponto de Γ . Cada uma dessas retas é chamada **geratriz** de Ω , e Γ é chamada de **diretriz** de Ω .



Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas, sejam $\vec{r} = (m, n, p)$ um vetor diretor de r e

$$\Gamma \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$



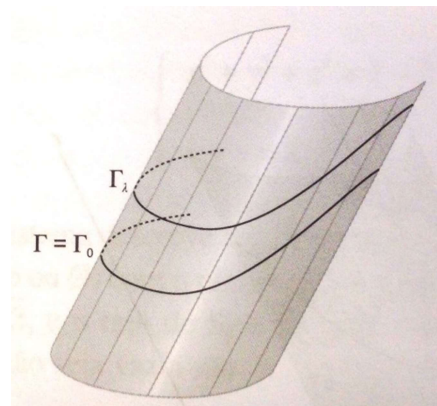
De acordo com a definição, um ponto $X(x, y, z)$ pertence a Ω se, e somente se, existem um ponto $Q(u, v, w)$ de Γ e um número real λ tais que $\overrightarrow{XQ} = \lambda \vec{r}$, ou seja:

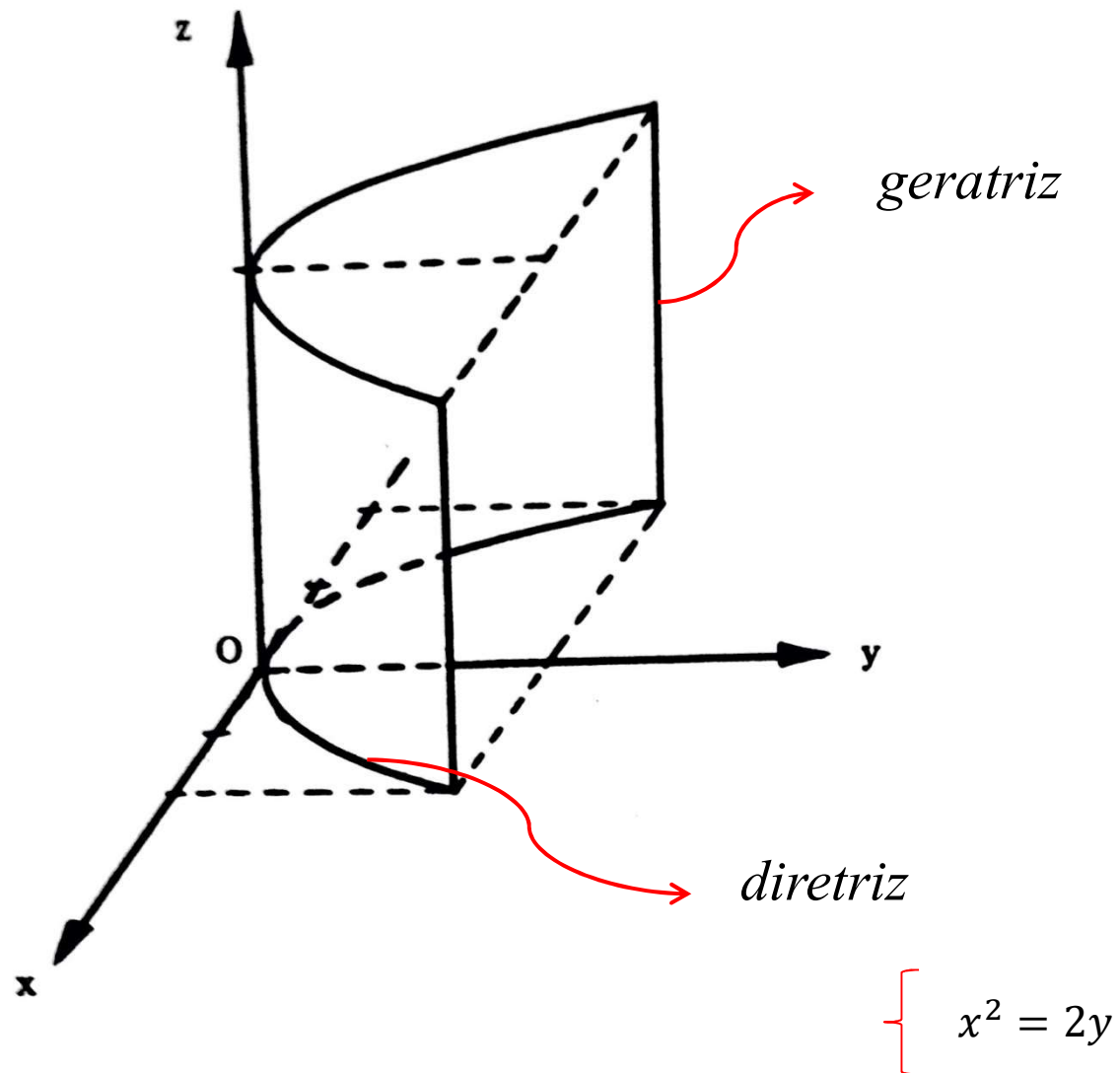
$$\left\{ \begin{array}{l} u = x + \lambda m \\ v = y + \lambda n \\ w = z + \lambda p \end{array} \right.$$

Logo, X pertence a Ω se, e somente se, existe um número real λ tal que:

$$\Gamma \left\{ \begin{array}{l} f(x + \lambda m, y + \lambda n, z + \lambda p) = 0 \\ g(x + \lambda m, y + \lambda n, z + \lambda p) = 0 \end{array} \right.$$

Desse modo, um sistema de duas equações dependendo do parâmetro λ , caracteriza os pontos de Ω .





Exercício

Obtenha equações da superfície cilíndrica Ω cujas geratrizes são paralelas à reta $r: X = (0,1,0) + \lambda(1,1,2)$, que tem por diretriz Γ a interseção das superfícies $\Omega_1: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e $\Omega_2: z = 0$.