Instituto de Física - USP - 2015/02
4300430 - Introdução à Cosmologia Física
Prof. Raul Abramo

Lista 3 – Data de entrega: 5 de Novembro

---

1. **Abundâncias de partículas no universo primordial**

   Em sala de aula vimos que partículas em equilíbrio térmico obedecem a distribuição de Bose-Einstein (BE, "−") se elas são bosons (*spin* inteiro), ou de Fermi-Dirac (FD, "+") se elas são fermions (*spin* semi-inteiro), onde:

   $$f_{\mp} = \frac{1}{e^{E/T} \mp 1} \; .$$

   Note que estamos usando um sistema de unidades "natural", no qual $\hbar = c = k_B = 1$. Isso significa que a temperatura T fica expressa em unidades de energia, e a massa também fica expressa em unidades de energia (por sinal, nesse sistema de unidades até distâncias e tempos são expressas em termos de (energia)$^{-1}$, e você pode fazer essas conversões usando que 1 GeV^{-1} $= 1.97 \times 10^{-14}$ m $= 6.58 \times 10^{-25}$ s). Para esse exercício, keV$= 10^{-6}$ GeV é uma unidade conveniente para expressar a energia.

   Responda:

   (a) [**1.0**] Vamos considerar o número de partículas de um determinado tipo, supondo que essas partículas estão em *equilíbrio térmico* com um certo ambiente com temperatura T. A densidade volumétrica de partículas com momento entre p e $p + dp$ é dada por $dn = f_{\mp}\, d^3p/(2\pi)^3$, e $E^2 = m^2 + p^2$. Usando que $E\,dE = p\,dp$, e integrando sobre E, mostre que, quando as partículas estão em equilíbrio com um meio a uma temperatura T, a densidade em número é dada por:

   $$n_{i,e} = g_i \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & BE \quad T >> m \\ \\ \frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & FD \quad T >> m \\ \\ \left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} & BE \,\&\, FD \quad m >> T \; , \end{cases}$$

   onde $\zeta(n)$ é a função Zeta de Riemann e g_i é o número de graus de liberdade da partícula — $g = 2$ no caso de elétrons, prótons, nêutrons e fótons [1].

   (b) [**1.0**] Faça um gráfico aproximado do número de partículas como função da temperatura. [Se você ficar em dúvida quanto às "unidades naturais" que eu estou usando, pegue a Eq. (9.21) do livro da Barbara Ryden, que tem unidades mais normais.] Considere o caso dos elétrons ($m_e = 511$ keV). Assumindo que vale a hipótese feita no item anterior (ou seja, que há equilíbrio térmico), qual seria a densidade em número dos elétrons quando o universo tem uma temperatura de 1 keV? Lembrando que $n_e = n_p \approx 0.2$ m^{-3} hoje, quando $T \approx 3. \times 10^{-4}$ eV, e usando que $T \propto 1/a$, verifique que o número estimado acima está errado por MUITAS ordens de magnitude, e portanto a própria hipótese de que elétrons estão em equilíbrio com o ambiente à temperatura T não pode fazer sentido!

---

[1] Por sinal, a última linha é *quase* a distribuição de Maxwell-Boltzmann (MB), mas elas *não* são idênticas – e o livro da Barbara Ryden faz um pouco de confusão sobre isso. Para recuperar a distribuição de Maxwell-Boltzmann (MB) você deveria fazer a aproximação não-relativística $f_{\mp} \to e^{-E/T} \to e^{-(m+p^2/2m)/T}$. Porém, note que a MB "clássica" não carrega o fator exponencial com a massa de repouso, $e^{-m/T}$! De fato, a MB não diz nada sobre o "número de partículas", apenas sobre a distribuição de velocidades de um gás ideal clássico.

(c) **[1.0]** A resposta ao item acima evidencia que, em algum momento, o número de elétrons deve ter saído de equilíbrio com o ambiente. Extrapolando a densidade atual de elétrons para o passado, e a densidade dos elétrons calculada sob a hipótese de equilíbrio térmico para o futuro, mostre que os elétrons deve ter saído de equilíbrio por volta de $T \sim 20$ keV.

(d) **[1.0]** Usando o mesmo argumento utilizado no item anterior para o caso de prótons, mostre que eles devem ter saído de equilíbrio quando o universo tinha uma temperatura da ordem de $T \sim 0.1$ GeV.

(e) **[1.0]** Qual a conclusão que você tira dos resultados acima? O que você espera que deve acontecer com o número de elétrons no universo quando a temperatura cai de centenas de keV para alguns keV? E para os prótons, o que acontece quando a temperatura do universo cai de muitos GeV para uma fração de GeV?

2. **Nucleossíntese num universo paralelo**

(a) **[1.0]** Suponha que os prótons e nêutrons num universo paralelo possuem uma diferença de massas de 0.13 MeV (no nosso universo, os nêutrons são 1.3 MeV mais pesados que os prótons). Digamos que todos os outros parâmetros físicos são idênticos nos dois universos. Estime a fração de massa bariônica que termina na forma de ^{4}He, assumindo que todos os nêutrons terminam dentro dos núcleos de ^{4}He.

(b) **[1.0]** Suponha agora que num outro universo paralelo a meia-vida dos nêutrons livres é de 89 s, ao invés de 890 s como temos no nosso universo (todos os outros parâmetros físicos, incluindo as massas dos nêutros e prótons, são idênticos aos do nosso universo). Estime a fração de massa bariônica que termina na forma de ^{4}He – sempre assumindo que todos os nêutrons terminam dentro dos núcleos de ^{4}He.

3. **He primordial** *v.* **He gerado por fusão nuclear em estrelas**

[1.0] A nossa galáxia tem uma massa bariônica total de aproximadamente $M \simeq 10^{11} M_\odot$ e uma luminosidade de $L \simeq 2 \times 10^{10} L_\odot$, onde $L_\odot \simeq 4 \times 10^{26}$ W (aqui, como sempre, "$\odot$" significa o valor do parâmetro para o Sol). Suponha que toda essa luminosidade vem da liberação de energia da fusão de H em ^{4}He, que emite 28.4 MeV para cada núcleo de ^{4}He formado. Assumindo que essa luminosidade foi aproximadamente constante ao longo dos últimos 10 bilhões de anos, encontre o número de núcleos de ^{4}He formados nas estrelas da Via Lactea. Compare esse número com a fração primordial de ^{4}He, assumindo que essa fração é 25% em massa.

4. **Curvas de rotação de galáxias espirais**

Vamos considerar uma galáxia cuja massa bariônica total é $M_B = 10^{11} M_\odot$. Vamos supor que essa galáxia roda em torno do eixo z como se fosse um corpo rígido, e que a distribuição de massa dessa galáxia tem uma simetria esférica (isso, claro, não é uma configuração estável, mas deixe isso para lá por enquanto). Assuma que a densidade de massa bariônica é dada por:

$$\rho_B(r) = \frac{M_B}{4\pi\, R_0^2\, r}\, e^{-r/R_0}$$

onde $R_0 = 10$ kpc é o raio característico do disco da galáxia.

(a) **[1.0]** Encontre a velocidade de rotação de uma partícula no plano $z = 0$, como função da distância r ao eixo. Obtenha a expressão aproximada para $r \ll R_0$ e para $r \gg R_0$.

(b) **[1.0]** Digamos que as observações da curva de rotação dessa galáxia indiquem que, para $r > 2R_0$, a velocidade é aproximadamente constante. Encontre a distribuição de massa não-bariônica que falta para explicar essa velocidade constante. (Você pode fazer aproximações para resolver esse problema.)

5. **Distribuição de corpo negro da radiação**

   [**1.0**] Vimos em sala de aula que, mesmo para energias/temperaturas bem menores do que 13.6 eV (a energia de ligação do átomo de Hidrogênio), há um grande número de fótons com energias superiores a esse valor, devido ao enorme número de fótons para cada bárion do universo (aproximadamente $5. \times 10^9$). Calcule quantos fótons por bárion possuem energias superiores a 13.6 eV, quando a temperatura dos fótons é $T = 1$ eV, e quando $T = 0.1$ eV.

6. **Distância até a Superfície de Último Espalhamento (SUE)**

   Digamos que o modelo "padrão" está correto, ou seja, que hoje temos aproximadamente $\Omega_m = 0.25$, $\Omega_\Lambda = 0.75$, $\Omega_r \simeq 10^{-4}$, e curvatura espacial nula. A SUE marca o instante quando os fótons desacoplaram da matéria bariônica, o que, nesse modelo, deve ter ocorrido em $z_{SUE} = 1100$.

   (a) [**1.0**] Encontre a distância comóvel até a SUE.

   (b) [**1.0**] Encontre a distância-luminosidade até a SUE.

   (c) [**1.0**] Encontre a distância-diâmetro angular até a SUE.

   (d) [**1.0**] Calcule o Horizonte de Hubble na época da SUE, $h_{SUE} = cH^{-1}(z_{SUE})$. Em seguida, usando a distância-diâmetro angular calculada no item (c), encontre o ângulo no céu que corresponde a um objeto em $z = z_{SUE}$, cujo tamanho é igual a h_{SUE}.